

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Η ενέργεια κλασικά για αυτό το σωματίδιο είναι

$$E = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I = \text{ροπή αδράνειας} = MR^2$$

$$L = MVR = MR^2\frac{V}{R} = I\omega$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{I^2\omega^2}{I} = \frac{\vec{L}^2}{2I}$$

Άρα η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι

$$\hat{H} = \frac{1}{2I}\vec{l}^2$$

όπου \vec{l}^2 ο τελεστής της στροφορμής του σωματιδίου με ιδιοσυναρτήσεις τις σφαιρικές αρμονικές Y_{lm}

Έχουμε

$$\vec{l}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}$$

$$\Rightarrow \hat{H} Y_{lm} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) Y_{lm}$$

$$\Rightarrow E_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$$

είναι οι δυνατές τιμές της ενέργειας με εκφυλισμό τάξεως $2l+1$. ■

Άσκηση 2.

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{(I\omega)^2}{I} = \frac{L_z^2}{2I}$$

διότι η στροφορμή του σωματιδίου είναι επάνω στον άξονα των z μόνο.

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{L}_z^2}{2I}, \quad \hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

με ιδιοτιμές

$$\begin{aligned}\hat{L}_z \Psi &= \lambda \Psi \\ \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} &= \lambda \Psi \Rightarrow \Psi(\phi) = N e^{i \frac{\lambda}{\hbar} \phi}\end{aligned}$$

για να έχουμε μονοτιμία $\Rightarrow \frac{\lambda}{\hbar} = m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ακέραιος.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lambda &= \hbar m, \Psi_m(\phi) = N e^{im\phi} \\ \hat{H} \Psi_m(\phi) &= \frac{\hbar^2}{2I} m^2 \Psi_m(\phi) \Rightarrow E_m = \frac{\hbar^2}{2I} m^2\end{aligned}$$

Εκφυλισμός 2 για $|m| \neq 0$.

Απόδειξη της σχέσης μεταξύ \hat{H} και \vec{L}^2

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad \vec{p} = -i\hbar \nabla \\ \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)\end{aligned}$$

στο πρώτο πρόβλημα έχουμε $r = R$ σταθερό

$$\Rightarrow \nabla^2 = \frac{1}{R^2} (f(\theta, \phi))$$

ο τελεστής της στροφορμής στο τετράγωνο σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \\ \Rightarrow -\hbar^2 \nabla^2 &= \frac{\vec{L}^2}{R^2} \Rightarrow \hat{H} = \frac{\vec{L}^2}{2mR^2} = \frac{\vec{L}^2}{2I}\end{aligned}$$

στο δεύτερο πρόβλημα έχουμε ακόμη $\theta = \frac{\pi}{2}$ =σταθερό

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sin \theta &= 1 \\ \Rightarrow \vec{L}^2 &= -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = L_z^2 \\ \hat{H} &= \frac{L_z^2}{2mR^2} = \frac{L_z^2}{2I} \\ L_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Έχουμε $L_z\Psi = \lambda\Psi$ με λ πραγματικό.

Ακόμη

$$\begin{aligned} [L_y, L_z] &= i\hbar L_x, \quad \lambda = \lambda^* \\ \Rightarrow \langle L_x \rangle &= \int \Psi^* \hat{L}_x \Psi d^3x = i\hbar \int \Psi^* [\hat{L}_y, \hat{L}_z] \Psi d^3x = \\ &= i\hbar \left(\int \Psi^* L_y L_z \Psi d^3x - \int \Psi^* L_z L_y \Psi d^3x \right) = \\ &= i\hbar \left(\lambda \int \Psi^* L_y \Psi d^3x - \int (L_z \Psi)^* L_y \Psi d^3x \right) = \\ &= i\hbar (\lambda \langle L_y \rangle - \lambda^* \langle L_y \rangle) = i\hbar \lambda (\langle L_y \rangle - \langle L_y \rangle) = 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Άσκηση 4.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \text{ και } H\Psi = E\Psi \text{ και}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} f(\theta, \phi)$$

$$f(\theta, \phi) = -\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2}$$

παίρνοντας τις κυματοσυναρτήσεις $\Psi(r, \theta, \phi) = \Psi(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ έχουμε $f(\theta, \phi)Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{1}{\hbar^2} \vec{L}^2 Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}$ διότι $\vec{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1)Y_{lm}$

$$\Rightarrow \hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \Psi + V(r)\Psi$$

για $l=0$ ο όρος της στροφορμής μηδενίζεται.

Ενώ $V(r) = 0$ για $0 \leq r \leq \alpha$.

Ακόμη θέτοντας $\Psi(r) = \frac{U(r)}{r}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= -\frac{U}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \\ r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= -U + r \frac{dU}{dr} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) &= -\frac{dU}{dr} + \frac{dU}{dr} + r \frac{d^2 U}{dr^2} = r \frac{d^2 U}{dr^2} \\ \Rightarrow \hat{H}\Psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{r}{r^2} \frac{d^2 U}{dr^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2 U}{dr^2} \end{aligned}$$

για $0 \leq r \leq \alpha$

Με την συνθήκη $U(r) \rightarrow 0$ για $r \rightarrow 0$.

Η χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger είναι:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2 U}{dr^2} &= E\Psi = E\frac{U}{r} \\ \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 U}{dr^2} &= EU \end{aligned}$$

με $0 \leq r \leq \alpha$, $U(0) = 0$ και $U(\alpha) = 0$.

Άρα έχουμε την περίπτωση ενός απειρόβαθου πηγαδιού.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dr^2} &= -\frac{2mE}{\hbar^2} U = -k^2 U \\ U(r) &= A \sin(kr) + B \cos(kr) \\ U(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ U(\alpha) = 0 &\Rightarrow \sin(k\alpha) = 0 \Rightarrow k\alpha = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \\ k &= \frac{n\pi}{\alpha} \\ E_n &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{\alpha^2} n^2 \\ \Psi_n(r) &= \frac{A_n}{r} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} r\right) \end{aligned}$$

Κανονικοποίηση:

$$\begin{aligned} \int \Psi^*(r, \theta, \phi) \Psi(r, \theta, \phi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi &= 1 \\ \Rightarrow 4\pi A_n^2 \int_0^\alpha \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{\alpha} r\right)}{r^2} r^2 dr &= 1 \\ \Rightarrow 4\pi A_n^2 \int_0^\alpha \sin^2\left(\frac{n\pi}{\alpha} r\right) dr &= 1 \\ 4\pi A_n^2 \frac{\alpha}{2} = 1 &\Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} = \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) &= (\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 + \sigma_3 A_3)(\sigma_1 B_1 + \sigma_2 B_2 + \sigma_3 B_3) \\ &= \sigma_1^2 A_1 B_1 + \sigma_2^2 A_2 B_2 + \sigma_3^2 A_3 B_3 + \sigma_1 \sigma_2 A_1 B_2 + \sigma_1 \sigma_3 A_1 B_3 + \sigma_2 \sigma_1 A_2 B_1 \\ &\quad + \sigma_2 \sigma_3 A_2 B_3 + \sigma_3 \sigma_1 A_3 B_1 + \sigma_3 \sigma_2 A_3 B_2 \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} + i\sigma_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1) + i\sigma_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + i\sigma_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

διότι έχουμε τις ιδιότητες των σ πινάκων :

$$\sigma_k^2 = 1, \quad \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$$

ή αλλιώς

$$\sigma_k\sigma_l = i\epsilon_{klm}\sigma_m + \delta_{kl}$$

$$\text{και } (\vec{A} \times \vec{B}) = \epsilon_{jkl}A_jB_k\hat{l} \quad \blacksquare$$

Άσκηση 6.

α)

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}}{d\gamma} &= iJ_y e^{i\gamma J_y} J_z e^{-i\gamma J_y} - i e^{i\gamma J_y} J_z J_y e^{-i\gamma J_y} \\ &= i e^{i\gamma J_y} [J_y, J_z] e^{-i\gamma J_y} \\ &= -\hbar e^{i\gamma J_y} J_x e^{-i\gamma J_y} \end{aligned}$$

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{A}}{d\gamma^2} &= -i\hbar e^{i\gamma J_y} J_y J_x e^{-i\gamma J_y} + i\hbar e^{i\gamma J_y} J_x J_y e^{-i\gamma J_y} \\ &= i\hbar e^{i\gamma J_y} [J_x, J_y] e^{-i\gamma J_y} \\ &= -\hbar^2 e^{i\gamma J_y} J_z e^{-i\gamma J_y} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\hat{A}}{d\gamma^2} = -\hbar^2 \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}_1 \cos(\gamma\hbar) + \hat{C}_2 \sin(\gamma\hbar)$$

$$\gamma = 0 \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}_1 = J_z$$

$$\frac{d\hat{A}}{d\gamma} = -\hbar\hat{C}_1 \sin(\gamma\hbar) + \hbar\hat{C}_2 \cos(\gamma\hbar)$$

$$\gamma = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{A}}{d\gamma} = \hbar\hat{C}_2 = -\hbar J_x$$

$$\Rightarrow \hat{C}_2 = -J_x$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{J}_z \cos(\gamma\hbar) - \hat{J}_x \sin(\gamma\hbar)$$

β)

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \left(e^{-i\frac{\pi}{2\hbar} J_y} Y_{lm} \right) &= e^{-i\frac{\pi}{2\hbar} J_y} J^2 Y_{lm} = \\ &= \hbar^2 l(l+1) \left(e^{-i\frac{\pi}{2\hbar} J_y} Y_{lm} \right) \end{aligned}$$

διότι $[\hat{J}^2, J_y] = 0$

$$\begin{aligned} J_x \left(e^{-i\frac{\pi}{2\hbar} J_y} Y_{lm} \right) &= e^{-i\frac{\pi}{2\hbar} J_y} J_x e^{i\frac{\pi}{2\hbar} J_y} e^{-i\frac{\pi}{2\hbar} J_y} Y_{lm} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2\hbar} J_y} J_x Y_{lm} = \hbar m \left(e^{-i\frac{\pi}{2\hbar} J_y} Y_{lm} \right) \end{aligned}$$

διότι $e^{i\lambda J_y} e^{-i\lambda J_y} = 1$, $\lambda = \text{πραγματικό}$ και $\hat{A}(\gamma = -\frac{\pi}{2\hbar}) = -\hat{J}_x \sin\left(-\frac{\pi\hbar}{2\hbar}\right) = \hat{J}_x$

Σημείωση: Άλλος τρόπος απόδειξης του α) είναι να αναπτύξω σε σειρά $e^{\pm\gamma J_y}$ και να κρατήσω τις δυνάμεις του γ χωριστά για άρτιες και περιττές δυνάμεις. ■

Άσκηση 7.

α) Έστω το διάνυσμα \hat{n} στην κατεύθυνση (θ, ϕ) , μοναδιαίο διάνυσμα

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{n} &= \hat{x} \sin\theta \cos\phi + \hat{y} \sin\theta \sin\phi + \hat{z} \cos\theta \\ S_n &= \vec{S} \cdot \hat{n} = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} \\ S_n &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

β) Ιδιοτιμές του πίνακα $S_n = \frac{\hbar}{2} A$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{I}) &= 0 \\ \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} &= -(\cos^2\theta - \lambda^2) - \sin^2\theta = 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta &= 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} S_n \mathcal{X}_+^{(n)} &= \frac{\hbar}{2} \mathcal{X}_+^{(n)} \\ \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cos\theta + \beta \sin\theta e^{-i\phi} = \alpha \\ \alpha \sin\theta e^{i\phi} - \beta \cos\theta = \beta \end{cases} \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha(1 - \cos \theta) &= \beta \sin \theta e^{-i\phi} \\ \Rightarrow 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} &= 2\beta \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \Rightarrow \alpha \sin \frac{\theta}{2} &= \beta \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}\end{aligned}$$

Την ίδια εξίσωση παίρνουμε και από την δεύτερη εξίσωση.

Άρα διαλέγοντας $\alpha = \cos \frac{\theta}{2}$ και $\beta = \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$ βλέπουμε ότι $\alpha^* \alpha + \beta^* \beta = 1$

$$\Rightarrow \mathcal{X}_+^{(n)} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Ομοίως:

$$\mathcal{X}_-^{(n)} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

με ιδιοτιμή $-\frac{\hbar}{2}$. Προφανώς ισχύει $\mathcal{X}_-^{(n)\dagger} \mathcal{X}_+^{(n)} = 0$ ■

Άσκηση 8.

α) Παίρνουμε τον τελεστή S_n που παριστάνει την προβολή του spin στην κατεύθυνση (θ, ϕ) και έχουμε

$$\begin{aligned}\langle S_n \rangle &= \mathcal{X}_+^\dagger S_n \mathcal{X}_+ = \frac{\hbar}{2} (1 \ 0) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} (1 \ 0) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\phi} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \cos \theta\end{aligned}$$

$\mathcal{X}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου στον χώρο του spin.

β) Εάν $P_+(\theta)$ είναι η πιθανότητα να βρούμε το spin πάνω $\left(+\frac{\hbar}{2}\right)$ και $P_-(\theta)$ η πιθανότητα να βρούμε το spin κάτω $\left(-\frac{\hbar}{2}\right)$ σε μια μέτρηση κατά τον άξονα \hat{n} ισχύει

$$\Rightarrow \langle S_n \rangle = \frac{\hbar}{2} P_+(\theta) + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) P_-(\theta)$$

Επίσης ισχύει προφανώς $P_+(\theta) + P_-(\theta) = 1$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow P_-(\theta) = 1 - P_+(\theta) \\
 &\Rightarrow \langle S_n \rangle = \frac{\hbar}{2}P_+(\theta) - \frac{\hbar}{2}(1 - P_+(\theta)) = \\
 &= \hbar P_+(\theta) - \frac{\hbar}{2} \\
 &\Rightarrow P_+(\theta) = \frac{1}{\hbar} \left(\langle S_n \rangle + \frac{\hbar}{2} \right) \\
 &\Rightarrow P_+(\theta) = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{2} \cos \theta + \frac{\hbar}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2} \\
 &\Rightarrow P_+(\theta) = \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \Rightarrow P_-(\theta) = \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Άλλος τρόπος λύσης

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{X}_+^{(z)}\rangle &= |\mathcal{X}_+^{(n)}\rangle \langle \mathcal{X}_+^{(n)} | \mathcal{X}_+^{(z)} \rangle + |\mathcal{X}_-^{(n)}\rangle \langle \mathcal{X}_-^{(n)} | \mathcal{X}_+^{(z)} \rangle \\
 P_+(\theta) &= \left| \langle \mathcal{X}_+^{(n)} | \mathcal{X}_+^{(z)} \rangle \right|^2 \\
 P_-(\theta) &= \left| \langle \mathcal{X}_-^{(n)} | \mathcal{X}_+^{(z)} \rangle \right|^2 \\
 \langle \mathcal{X}_+^{(n)} | \mathcal{X}_+^{(z)} \rangle &= \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right), \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\phi} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \\
 \langle \mathcal{X}_-^{(n)} | \mathcal{X}_+^{(z)} \rangle &= \left(\sin \left(\frac{\theta}{2} \right), -\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i\phi} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της άσκησης 7 για τους spinors \mathcal{X}_+^n και \mathcal{X}_-^n . ■