

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΗ ΜΕΤΡΙΚΗ KERR

Καλεσοπούλου Αλεξάνδρα Σταυρούλα

Επιβλέπων καθηγητής: Αναγνωστόπουλος Κωνσταντίνος



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



- Εισαγωγή
- Ειδική και Γενική Θεωρία
της Σχετικότητας
- Μετρική Kerr
- Γεωδαιτικές Εξισώσεις της
Μετρικής Kerr
- Μέθοδος Αριθμητικής
Ολοκλήρωσης Runge-Kutta
- Ανάλυση Αποτελεσμάτων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ



Η παρούσα παρουσίαση έχει θέμα τη μελέτη της γεωμετρίας του χωροχρόνου μέσω των γεωδαιτικών εξισώσεων. Μελετάται η μετρική Kerr σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist στο επίπεδο του ισημερινού. Αναπτύσσεται υπολογιστικός κώδικας για τον αριθμητικό υπολογισμό της τροχιάς δοκιμαστικών σωμάτων μέσα σε μελανή οπή. Γίνεται μια μικρή εισαγωγή στην θεωρία και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στο τέλος. Οι εξισώσεις που μελετώνται είναι χρονοειδής γεωδαιτικές.

ΕΙΔΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Από την ειδική θεωρία της σχετικότητας, βλέπουμε πλέον διαφορετικά τον χώρο, τον χρόνο και την σχέση μεταξύ ύλης και ενέργειας. Ορίζεται ο τετραδιάστατο χωροχρόνο και η γεωμετρία του περιγράφεται από το στοιχείου μήκους:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Αναφέρεται συνήθως ως επίπεδος χωροχρόνος (flat spacetime) ή χώρος Minkowski (Minkowski space). Λόγω του αρνητικού προσήμου στον όρο που περιγράφει τη συνιστώσα του χρόνου, το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ δύο σημείων μας δίνει θετική, αρνητική ή μηδενική λύση.

$(\Delta s)^2 > 0$	χωροειδώς χωρισμένα
$(\Delta s)^2 = 0$	φωτοειδώς χωρισμένα
$(\Delta s)^2 < 0$	χρονοειδώς χωρισμένα

Τα φωτοειδώς χωρισμένα σημεία δημιουργούν τον κώνο φωτό (light cone). Χωρίζεται στον παρελθοντικό και μελλοντικό κώνο φωτός. Τα χρονοειδώς και χωροειδώς χωρισμένα σημεία βρίσκονται εντός και εκτός του κώνου φωτός, αντίστοιχα.

Όλων των ειδών τα σωματίδια κινούνται σε κοσμικές γραμμές (cosmic lines). Σωματίδια που κινούνται σε φωτοειδείς κοσμικές γραμμές κινούνται με τη ταχύτητα του φωτός.

Εκείνα στις χρονοειδείς κοσμικές γραμμές, που βρίσκονται εξ ολοκλήρου εντός του κώνου, κινούνται με ταχύτητα μικρότερη αυτής του c .

Άρα, για σωματίδια που ακολουθούν τις χωροειδείς κοσμικές γραμμές έχουν ταχύτητα μεγαλύτερης από του φωτός και άρα η ύπαρξή τους είναι υποθετική.

Για τη μέτρηση της απόστασης δύο γειτονικών σημείων στις χρονοειδείς γραμμές, εισάγουμε το μέγεθος του ιδιοχρόνου (proper time):

$$d\tau^2 \equiv -ds^2/c^2$$

Χρησιμοποιούνται διάφοροι μετασχηματισμοί, για να γίνουν καλύτερα κατανοητές οι τρόποι με τους οποίους συνδέονται τα διάφορα αδρανειακά συστήματα αναφοράς μεταξύ τους.

Οι πιο χρήσιμοι είναι οι μετασχηματισμοί Lorentz (Lorentz transformations). Γενικεύοντας για τη γεωμετρία του χωροχρόνου, και τις συντεταγμένες (t, x, y, z) που ορίζουν κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, πρέπει να διατηρείται η μορφή και όλα τα υπόλοιπα συστήματα με (t', x', y', z') .

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - ux/c^2), & y' &= y, \\ x' &= \gamma(x - ut), & z' &= z \end{aligned}$$

Για την περιγραφή του τετραδιάστατου χώρου χρησιμοποιείται το *τετράνυσμα*, κάτι αντίστοιχο για το διάνυσμα στον τρισδιάστατο χώρο.

$$\mathbf{a} = a^t \mathbf{e}_t + a^x \mathbf{e}_x + a^y \mathbf{e}_y + a^z \mathbf{e}_z$$

Από το εσωτερικό γινόμενο δύο τετρανυσμάτων έστω $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, ακολουθώντας τους κανόνες που ισχύουν και στα διανύσματα, από τα τετρανυσμάτων της βάσης δημιουργείται η μετρική του *χώροχρόνου* και πιο συγκεκριμένο του *επίπεδου χωροχρόνου* ή μετρική Minkowski.

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η μετρική αναπαριστάται από έναν συμμετρικό διαγώνιο πίνακα και έτσι μπορεί να περιγραφεί και το στοιχείο του μήκους μέσω αυτής.

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Και με όλα τα παραπάνω μπορεί να περιγραφεί η κίνηση στον χωροχρόνο, ορίζοντας το τετράνυσμα της μετατόπισης ως $\mathbf{x} = (ct, x, y, z)$

Και αντίστοιχα οι τετρα-ταχύτητα και τετρα-επιτάχυνση,

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad \mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}$$

Η θεωρία της ειδικής σχετικότητας, αποτελεί μία επιτυχημένη θεωρία για την περιγραφή σωμάτων σε καθολικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Εισάγοντας, όμως, τη βαρύτητα θα προχωρήσουμε στη γενική θεωρία της σχετικότητας.

Η βαρύτητα περιγράφεται σαν το αποτέλεσμα της καμπυλότητας του χωροχρόνου, η οποία προκαλείται επειδή η μάζα και η ενέργεια επηρεάζουν την τοπική γεωμετρία.

Για να περιγράψει ο Einstein τον καμπυλωμένο χωροχρόνο, πρέπει να υπάρξει μία εξίσωση που να συσχετίζει την καμπυλότητα αυτή με την πηγή που την προκαλεί. Είναι η εξίσωση Einstein και είναι μία θεμελιώδης εξίσωση της κλασικής φυσικής και βασική εξίσωση της γενικής σχετικότητας.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi G T_{\alpha\beta}$$

Μας ενδιαφέρει η λύση αυτής η οποία είναι η μετρική $g_{\alpha\beta}$. Είναι ένας συμμετρικός πίνακας και το στοιχείο του μήκους περιγράφεται ως

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta$$

Για την περιγραφή της κίνησης χρησιμοποιούνται οι γεωδαιτικές εξισώσεις.

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

Τα $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ είναι τα σύμβολα Christoffel, τα οποία προκύπτουν από την μετρική και τις πρώτες παραγώγους της.

$$g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Στην ανάλυση βοηθάνε οι νόμοι διατήρησης που προκύπτουν μέσα από συμμετρίες, που οδηγούν και σε αναλλοίωτες ποσότητες.

$$\xi \cdot \mathbf{u} = \text{constant}$$

Για ένα παράδειγμα καμπυλωμένου χωροχρόνου, δείχνουμε την γεωμετρία Schwarzschild που προσεγγίζει με πολύ καλή ακρίβεια την καμπυλότητα στο εξωτερικό του Ήλιου και χρησιμοποιείται ευρέως.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Η χρονική ανεξαρτησία και σφαιρική της συμμετρία δίνουν δυο αναλλοίωτες ποσότητες που βοηθούν στην ανάλυση της μετρικής.

$$e = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau},$$

$$\ell = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}$$

Η γεωμετρία Schwarzschild αποτελεί ένα βασικό μοντέλο και μια εξαιρετική προσέγγιση της γεωμετρίας στο εξωτερικό ενός μη περιστρεφόμενου άστρου ή μίας μη περιστρεφόμενης μελανής οπής.

Οι πραγματικές μελανές οπές, όπου εισάγονται περιστροφές και ηλεκτρικό φορτίο, είναι πιο σύνθετες στην περιγραφή τους.

Μια καλύτερη περιγραφή της γεωμετρίας του καμπυλωμένου χωροχρόνου από ένα περιστρεφόμενο σώμα είναι εκείνη της οικογένειας γεωμετριών από τον Kerr.

ΜΕΤΡΙΚΗ KERR

Στη μετρική Kerr, που ανακαλύπτει ο Roy Kerr το 1963, θα μπορούσαν να χαρακτηριστεί μία γενίκευση της μετρικής Schwarzschild. Υπάρχει εξάρτηση και από τη στροφορμή J , εφόσον υπάρχει περιστροφή.

$$\begin{aligned}
 a &\equiv J/M \\
 \rho^2 &\equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\
 \Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2
 \end{aligned}
 \quad
 ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2$$

Οι συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται, καλούνται *συντεταγμένες Boyer-Lindquist* και είναι της μορφής (t, r, θ, ϕ) . Την παράμετρο a την αποκαλούμε παράμετρο Kerr. Όταν το $a = 0$ η μετρική ανάγεται στη μετρική Schwarzschild.

Και για $M \rightarrow 0 (a \neq 0)$, η μετρική αποκτά τη μορφή ενός τοπικά επίπεδου χωροχρόνου.

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) & 0 & 0 & -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & 0 & \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Η μετρική Kerr έχει δύο συμμετρίες, την στατική συμμετρία, και ακόμα είναι αξονικά συμμετρική. Από αυτές παίρνουμε δύο διανύσματα Killing ως εξής,

$$\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0),$$

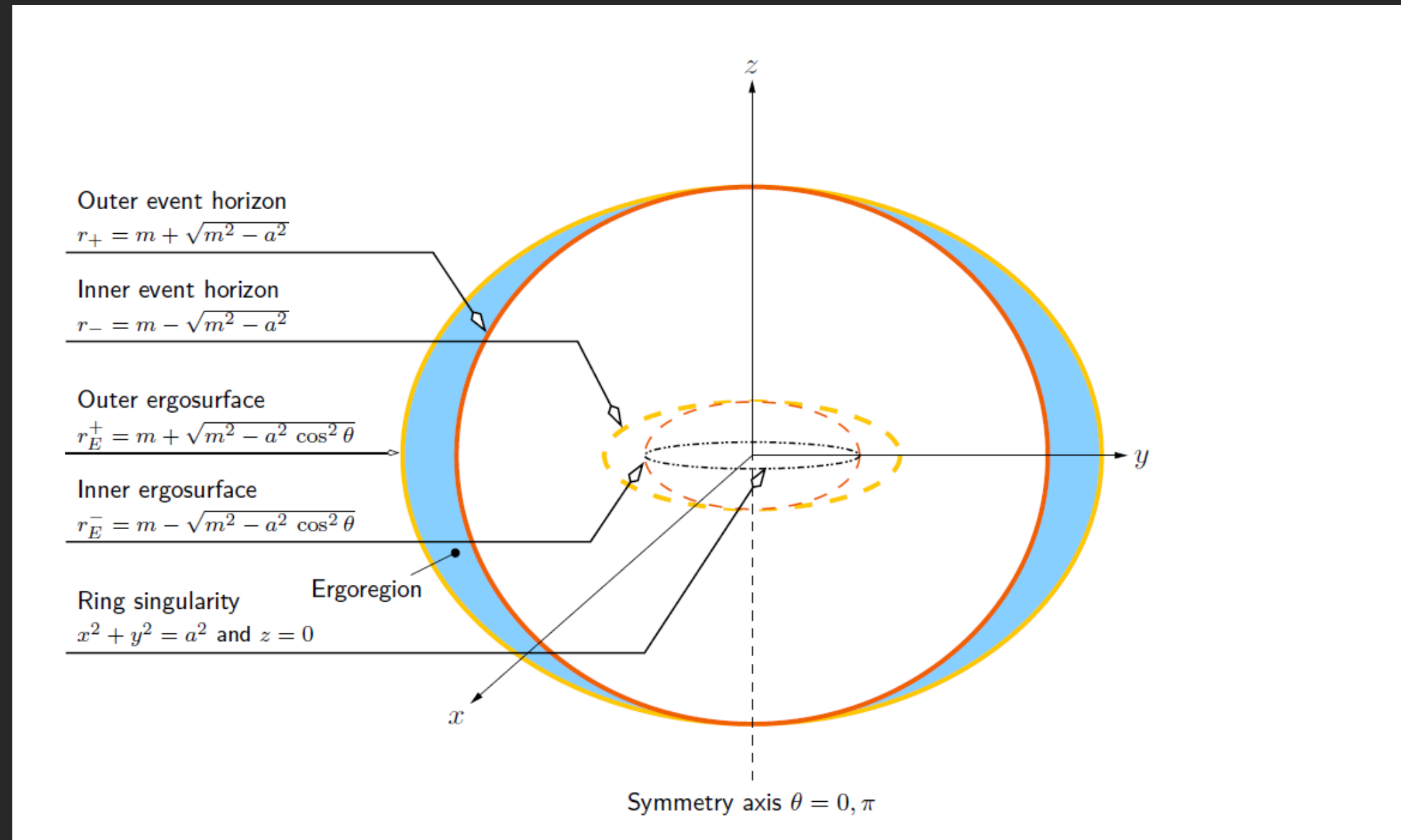
$$\eta^\alpha = (0, 0, 0, 1)$$

Η μετρική δεν έχει σφαιρική συμμετρία, αλλά κατοπτρική, παραμένει αναλλοίωτη κάτω από κατοπτρισμούς για $\theta = \pi/2$. Στη μελανή οπή Kerr υπάρχουν δύο ορίζοντες, ο ένας στο $r = r_+$ που ονομάζεται εξωτερικός ορίζοντας, και στο $r = r_-$ είναι ο εσωτερικός ορίζοντας. Αυτό το βλέπουμε όταν αναζητούμε τις λύσεις για $\Delta=0$.

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

Στις μελανές οπές Kerr, συμβαίνει το φαινόμενο *frame dragging*. Για την καλύτερη κατανόησή του, έστω ένας παρατηρητής ZAMO, που κινείται προς τη μελανή οπή. Η ταχύτητα του κατά την κατεύθυνση φ θα είναι μηδενική.

Όπως κινείται προς τη μελανή οπή από το άπειρο, λόγω της περιστροφής της ο παρατηρητής θα αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα σαν να τον παρασέρνει η μελανή οπή, και μάλιστα θα περιστρέφεται μαζί με τη μελανή οπή.



Σχηματική τοποθέτηση των οριζόντων, εργόσφαιρας, εργοπεριοχών και τη μοναδικότητα καμπύλωσης στο χωροχρόνο για τη γεωμετρία $\lambda_{\text{en Kerr}}$

Η γεωμετρία, όπως φαίνεται και στο σχήμα, δεν σταματάει στους ορίζοντες. Μία ιδιομορφία της ακόμα είναι για $\rho^2 = 0$, και παρουσιάζει άπειρη καμπυλότητα.

Όπως και στη Schwarzschild για την εναλλαγή του προσήμου για το $g_{tt} = 0$, έτσι κι εδώ αναζητούμε τι συμβαίνει. Οι λύσεις είναι,

$$r_{E\pm} = M^2 \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

Και τοποθετούνται ως εξής. $r_{E-} \leq r_- \leq r_+ \leq r_{E+}$

Οι ορίζοντες λοιπόν βρίσκονται ανάμεσα σε αυτές τις περιοχές, όπου μεταξύ των r_+ και r_{E+} , ονομάζεται εργοπεριοχή και το όριο $r=r_{E+}$ ονομάζεται εργόσφαιρα.

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΤΡΙΚΗΣ KERR



Η ανάλυση των τροχιών δοκιμαστικών σωματιδίων και ακτίνων φωτός στη γεωμετρία Kerr είναι μία διαδικασία πιο περίπλοκη, σε σύγκριση με εκείνες στη γεωμετρία Schwarzschild, εφόσον η συμμετρία δεν είναι σφαιρική αλλά αξονικά συμμετρική. Ακόμα, θα επικεντρωθούμε σε τροχιές εκτός του ορίζοντα ($r > r_+$), καθώς η περιοχή αυτή συσχετίζεται και με αστροφυσικές παρατηρήσεις.

Η περίπτωση εκείνη που θα εξετάσουμε, βρίσκεται για $\theta = \pi/2$, που είναι το επίπεδο του ισημερινού, και βέβαια οι τροχιές αυτές δεν αποτελούν γενικό κανόνα καθώς περιορίζονται σε αυτόν.

Γράφουμε το στοιχείο του μήκους στο επίπεδο του ισημερινού.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{4aM}{r} dt d\phi + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) d\phi^2$$

Η Λαγκραζιανή, λοιπόν,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha; t) &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\mathcal{L} &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{4aM}{r} \dot{t} \dot{\phi} + \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M}{r}\right) \dot{\phi}^2. \end{aligned}$$

Από τις συμμετρίες και τα διανύσματα Killing δημιουργούνται οι σταθερές E και L που χρησιμοποιούνται για να περιγραφεί η τροχιά των σωματιδίων.

$$E = -\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} \quad \& \quad L = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u}$$

Χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες της τετρα-ορμής και λύνοντας το σύστημα για $\dot{t}$ και $\dot{\phi}$.

$$\begin{aligned} p_\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \quad \dot{t} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M}{r} \right) E - \frac{2aM}{r} L \right] = \frac{1}{\Delta} [g_{\phi\phi} E + g_{t\phi} L] \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) L + \frac{2aM}{r} E \right] = -\frac{1}{\Delta} [g_{tt} L + g_{t\phi} E] \end{aligned} \quad p_r = \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}$$

Συνεχίζοντας με τη Χαμιλτονιανή για τη συνιστώσα r .

$$H(x^\alpha, p_\alpha) = p_\alpha \dot{x}^\alpha - \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2H = [g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi}]\dot{t} + [g_{\phi\phi}\dot{\phi} + g_{t\phi}\dot{t}]\dot{\phi} + g_{rr}\dot{r}^2$$

Το $\delta_1 = -1$ για χρονοειδείς γεωδαιτικές
και $\delta_1 = 0$ για φωτοειδείς.

$$= -E\dot{t} + L\dot{\phi} + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 = \delta_1 = \text{constant}$$

Λύνοντας ως προς $\dot{r}^2$ και μετά το πολυώνυμο για τις ρίζες του δυναμικού υπολογίζονται τα δυναμικά των γεωδαιτικών.

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{r^2} (g_{\phi\phi}E^2 + 2g_{t\phi}LE + g_{tt}L^2) + \frac{\Delta}{r^2}\delta_1$$

$$V_r(r) = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}{r^4} (E - V_+)(E - V_-) + \frac{\Delta}{r^2}\delta_1$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = V_r(r), \quad V_\pm = \frac{2Mar \pm r^2\sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta} L$$

Για φωτοειδείς γεωδαιτικές και χρονοειδείς υπολογίζουμε τα δυναμικά, αντίστοιχα.

$$W_{\text{eff}}(r, b, \sigma) = \frac{1}{r^2} \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \frac{2M}{r} \left(1 - \sigma \frac{a}{b} \right)^2 \right],$$

$$V_{\text{eff}}(r, E, L) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(L - aE)^2}{r^3}.$$

Όπως αναφέρθηκε, εξετάζεται η χρονοειδής περίπτωση στην παρούσα εργασία.

Αναζητήθηκαν, ακόμα, και οι γεωδαιτικές εξισώσεις όταν βρισκόμαστε εκτός του επιπέδου του ισημερινού. Όπως τις αλγεβρικές εκφράσεις για τα $\dot{r}$ και $\dot{\theta}$. Φαίνεται χρήσιμη η προσέγγιση αυτών με Hamilton-Jacobi.

Εμφανίζεται μία σταθερά, η σταθερά Carter $\mathcal{C}$, που φαίνεται να είναι μία σταθερά διαχωρισμού και μαζί με τις υπόλοιπες σταθερές δίνεται η δυνατότητα να λυθούν προβλήματα στη γεωμετρία του χωροχρόνου Kerr. Παρόλα αυτά, να αναφέρουμε πως οι περιγραφή των τροχιών παραμένει αρκετά περίπλοκη.

Χωρίς περαιτέρω ανάλυση απλά αναφέρουμε τα εβρήματα.

$$\Theta(\theta) \equiv \mathcal{C} + \cos^2 \theta \left[(\delta_1 + E^2) a^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} L^2 \right]$$

$$R(r) \equiv \Delta [\delta_1 r^2 - (L - aE)^2 - \mathcal{C}] + [E(r^2 + a^2) - La]^2$$

Οι αλγεβρικές εκφράσεις, όπου το $\pm$ εξαρτάται από το πρόσημο που θα έχουν η ταχύτητα στην γωνιακή και ακτινική κατεύθυνση αντίστοιχα και μαζί με τις εκφράσεις των $\dot{t}$ και $\dot{\phi}$, εκτός του επιπέδου του ισημερινού.

$$p_\theta^2 = (g_{\theta\theta}\dot{\theta})^2 = (\rho^2\dot{\theta})^2 = \Theta(\theta) \Rightarrow \dot{\theta} = \pm \frac{1}{\rho^2} \sqrt{\Theta}$$

$$p_r^2 = (g_{rr}\dot{r})^2 = \left(\frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r} \right)^2 = \frac{R(r)}{\Delta} \Rightarrow \dot{r} = \pm \frac{1}{\rho^2} \sqrt{R}$$

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) E - \frac{2Mar}{\rho^2} L \right]$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) \frac{L}{\sin^2 \theta} + \frac{2Mar}{\rho^2} E \right]$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ RUNGE-KUTTA

Η μέθοδος της αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι μια διαδικασία υπολογισμού για την προσέγγιση της ολοκληρωτικής τιμής μιας συνάρτησης ή μαθηματικών ολοκληρωμάτων.

Η μέθοδος Runge-Kutta χρησιμοποιείται για τον αριθμητικό υπολογισμό συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ). Είναι μία επαγωγική μέθοδος δηλαδή λόγω της προηγούμενης θέσης προκύπτει η επόμενη.

Χρησιμοποιώντας περισσότερα σημεία ολοκλήρωσης η μέθοδος θα βελτιώνεται περισσότερο με μικρότερο σφάλμα. Έτσι, θα χρησιμοποιηθεί μέθοδος Runge Kutta 4ης τάξης.

$$k_1 = f(t_n, x_n)$$

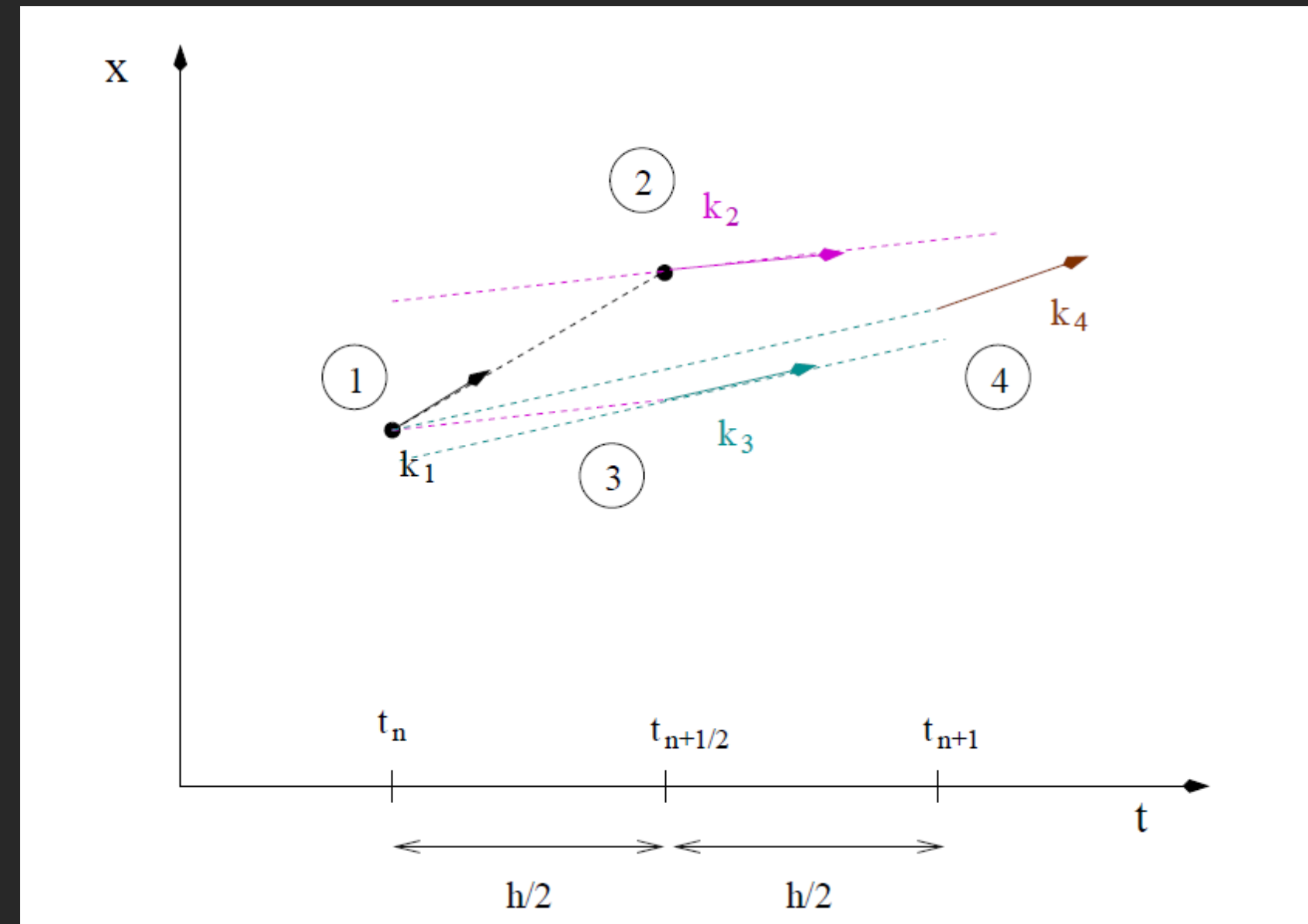
$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Η γεωμετρία του βήματος για μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης.



ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Θα παρουσιαστούν γραφήματα που δημιουργήθηκαν με gnuplot, από το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε σε γλώσσα Fortran για τις γεωδαιτικές εξισώσεις της μετρικής Kerr σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist, στο επίπεδο του ισημερινού. Οι γεωδαιτικές εξισώσεις έχουν υπολογιστεί από notebook στο Mathematica, με χρήση του βοηθητικού λογισμικού xAct και xCoba. Οι γεωδαιτικές είναι χρονοειδείς.

$$\ddot{t} = \frac{1}{4(r^4(a^2 + r(-2M + r)))} (M\dot{r}(4a^4\dot{t} - a^5\dot{\phi} - 4a^2\dot{t}r^2 + 5a^3\dot{\phi}r^2 - 8\dot{t}r^4 + 12a\dot{\phi}r^4 + a^3\dot{\phi}(a^2 - r^2) - 4a(a^3\dot{t} + a\dot{t}r^2 - a^2\dot{\phi}r^2 - 3\dot{\phi}r^4)))$$

$$\ddot{r} = -\frac{1}{r^5(a^2 + r(-2M + r))} (a^2 M \dot{\phi}^2 r (a^2 + r(-2M + r))^2 - \dot{\phi} r (2a M \dot{t} + \dot{\phi} r^3) \cdot (a^2 + r(-2M + r))^2 + r(a^4 M \dot{t}^2 + a^2 r(-4M^2 \dot{t}^2 + 2M \dot{t}^2 r + \dot{r}^2 r^2) + M r^2(4M^2 \dot{t}^2 - 4M \dot{t}^2 r + (\dot{t}^2 - \dot{r}^2) r^2)))$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\dot{r}(aM\dot{t} - a^2M\dot{\phi} + \dot{\phi}r^2(-2M + r))}{r^2(a^2 + r(-2M + r))}$$

Οι σταθερές ποσότητες L και E υπολογίζονται ως εξής,
$$L = -\frac{2Ma}{r}\dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)\dot{\phi}$$

Η αρχική ταχύτητα $\dot{t}$ υπολογίζεται μέσω διακρίνουσας λύνοντας το στοιχείο μήκους για $ds^2/d\tau^2 = -1$. Η αρνητική τιμή της θα

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} + \frac{2Ma}{r}\dot{\phi}$$

απορρίπτεται καθώς δίνει μιγαδικές λύσεις, και για όταν είναι θετική επιλέγουμε την θετική τιμή.

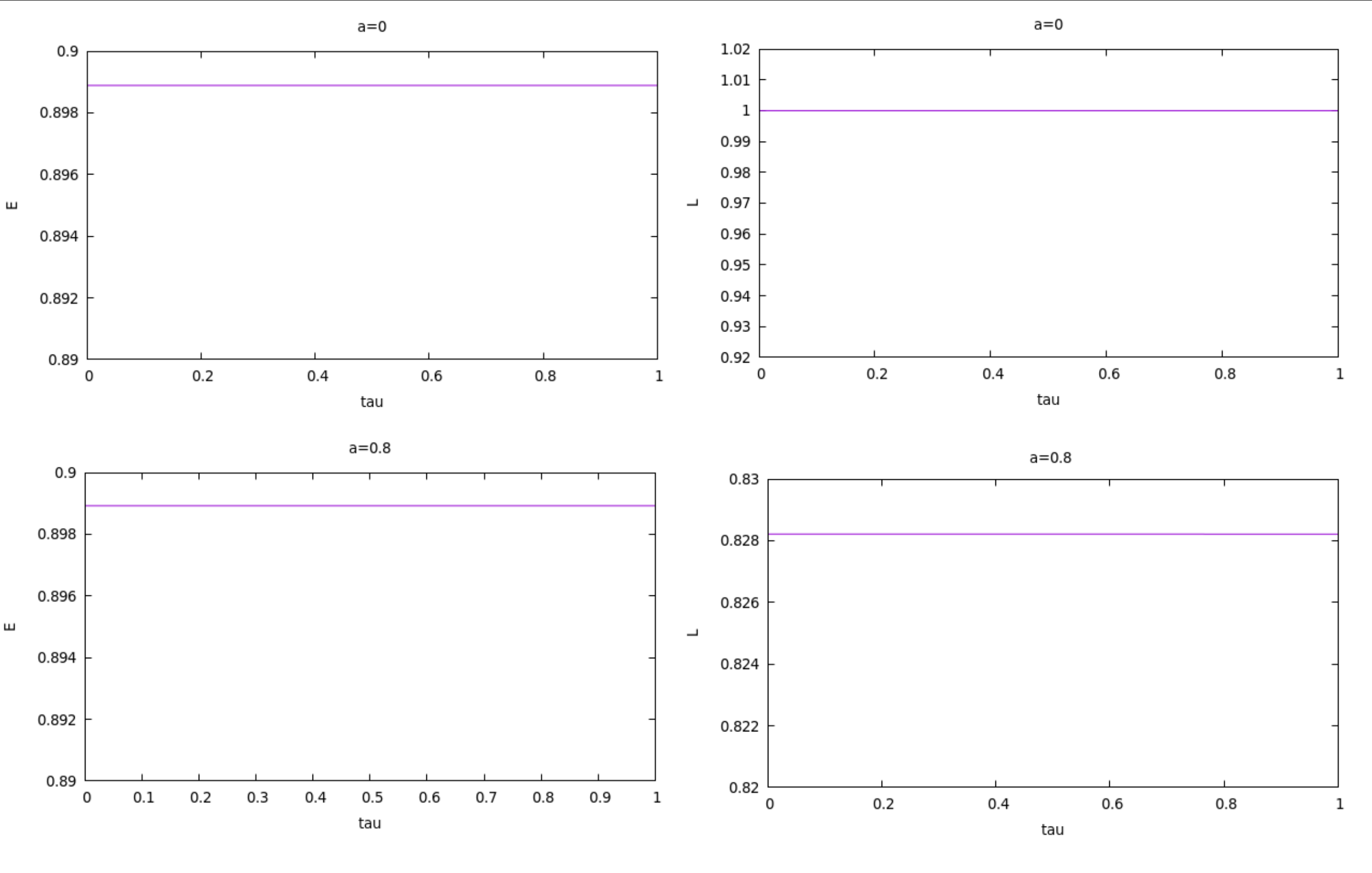
Η εργόσφαιρα, εφόσον μελετάται η περίπτωση του ισημερινού, είναι μεταξύ $0 \leq r_E \leq 2M$.

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

Η εξίσωση για το δυναμικό είναι,
$$V_{\text{eff}}(r, E, L) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(L - aE)^2}{r^3}$$

Και τη γραμμή της ενέργειας την υπολογίζουμε από,
$$\frac{E^2 - 1}{2}$$

Ξεκινάει η ανάλυση του κώδικα για να δούμε πως δουλεύει σωστά αναζητώντας αν οι σταθερές ποσότητες παραμένουν όντως σταθερές και στη συνέχεια θα δούμε την περίπτωση μελανής οπής Schwarzschild για $a=0$ και τέλος θα προσπαθήσουμε να δούμε συμπεριφορές για τη μετρική Kerr με $0 < a < 1$.

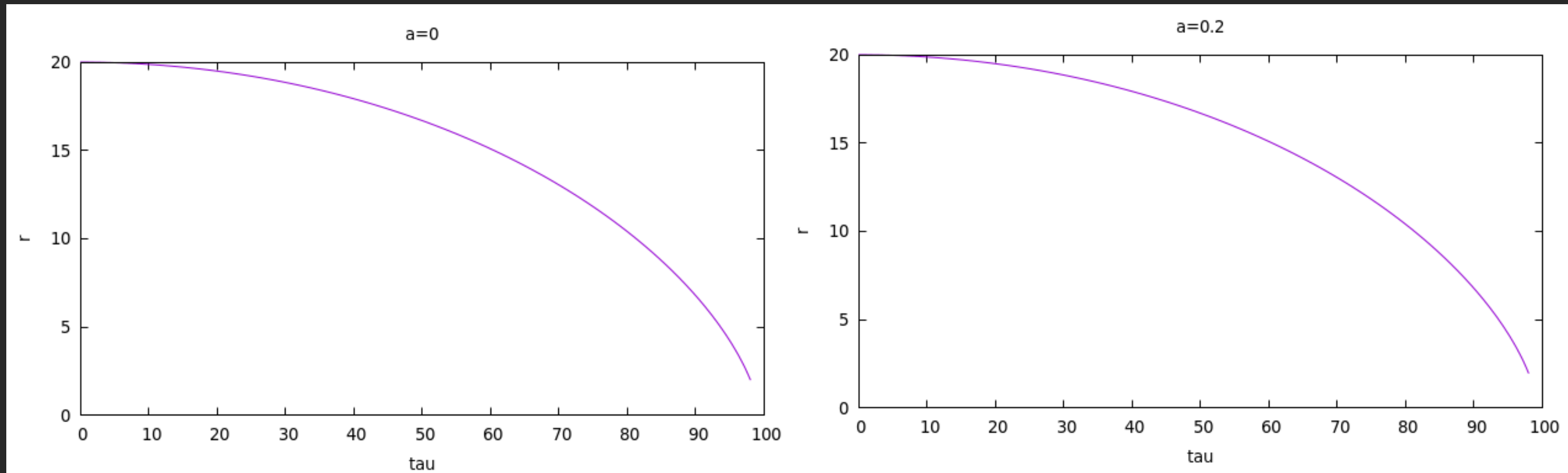


Σταθερές E και L για διάφορες τιμές της σταθεράς Kerr.

Αρχικές συνθήκες:

$a = 0$	$a = 0.8$
$M = 1$	$M = 1$
$r = 10$	$r = 10$
$\dot{r} = 0$	$\dot{r} = 0$
$\dot{\phi} = 0.01$	$\dot{\phi} = 0.01$
$E = 0.8895$	$E = 0.8989$
$L = 1$	$L = 0.8282$

Παρατηρούνται αστάθειες στις σταθερές τιμές αλλά οι αποκλίσεις είναι πολύ μικρές. Οι αλλαγές ίσως αντικατροπτίζουν τροχιές κοντά στον ορίζοντα.



Συνάρτηση r ως προς ιδιόχρονο τ . Αρχικές συνθήκες:

Μελετάται η περίπτωση για μελανή οπή

Schwarzschild, δηλαδή $a=0$ και πολύ κοντά σε αυτή για

$a=0.2$. Πρόκειται για ακτινική πτώση σωματιδίου από

κάποια απόσταση μακριά από τη μελανή οπή να

πέφτει ελεύθερο προς αυτή.

$$a = 0$$

$$a = 0.2$$

$$M = 1$$

$$M = 1$$

$$r = 20$$

$$r = 20$$

$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{\phi} = 0$$

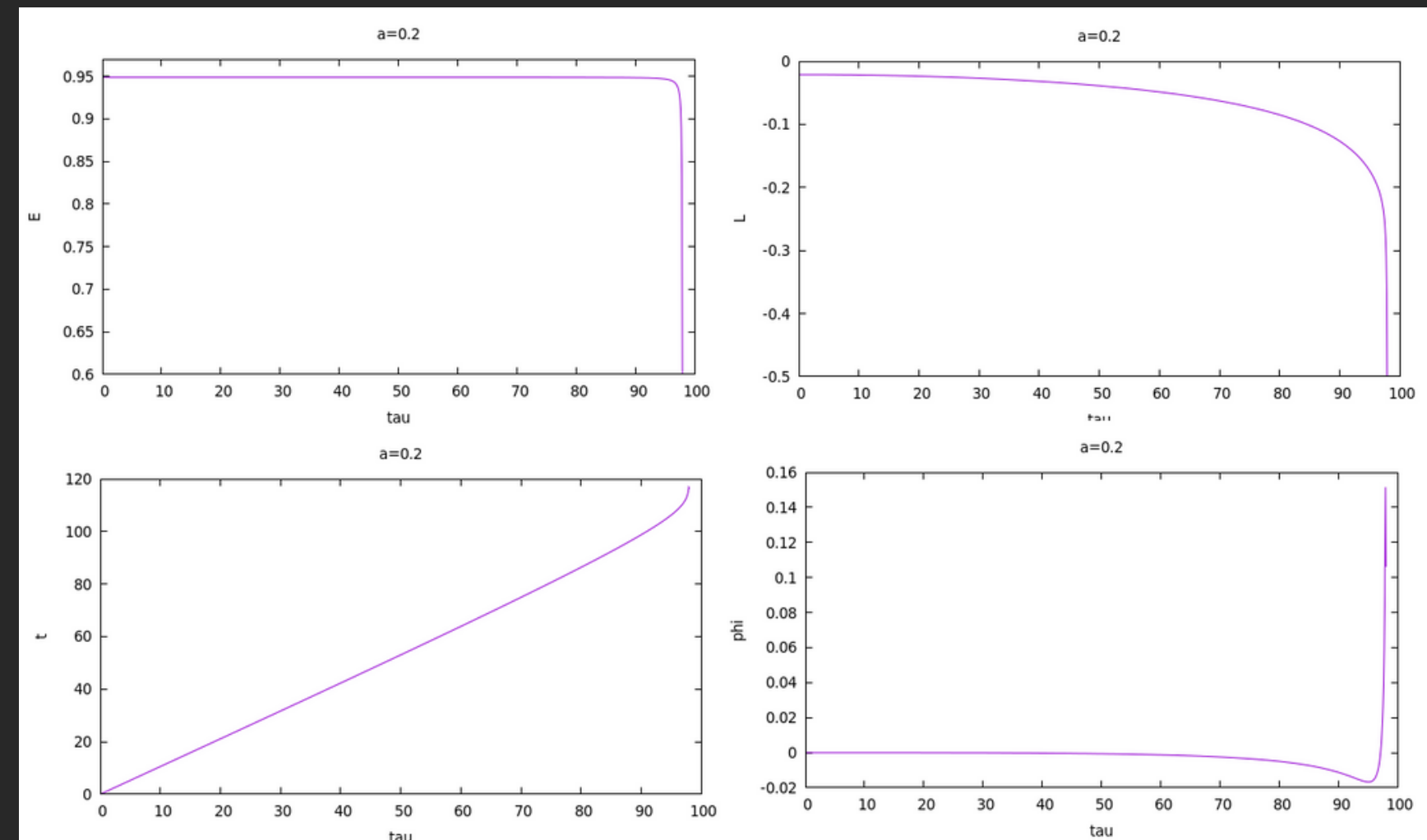
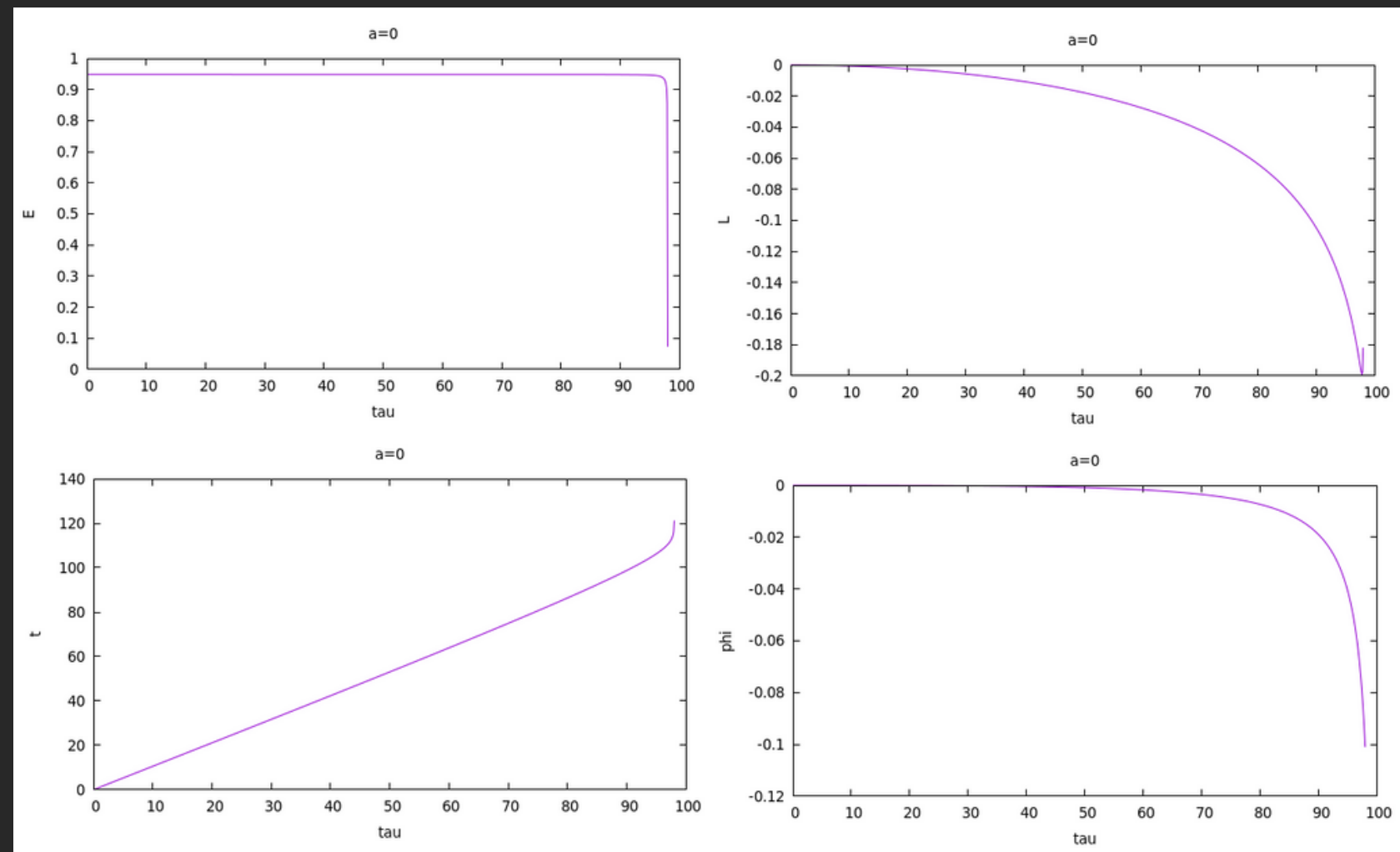
$$\dot{\phi} = 0$$

$$E = 0.9487$$

$$E = 0.9487$$

$$L = 0$$

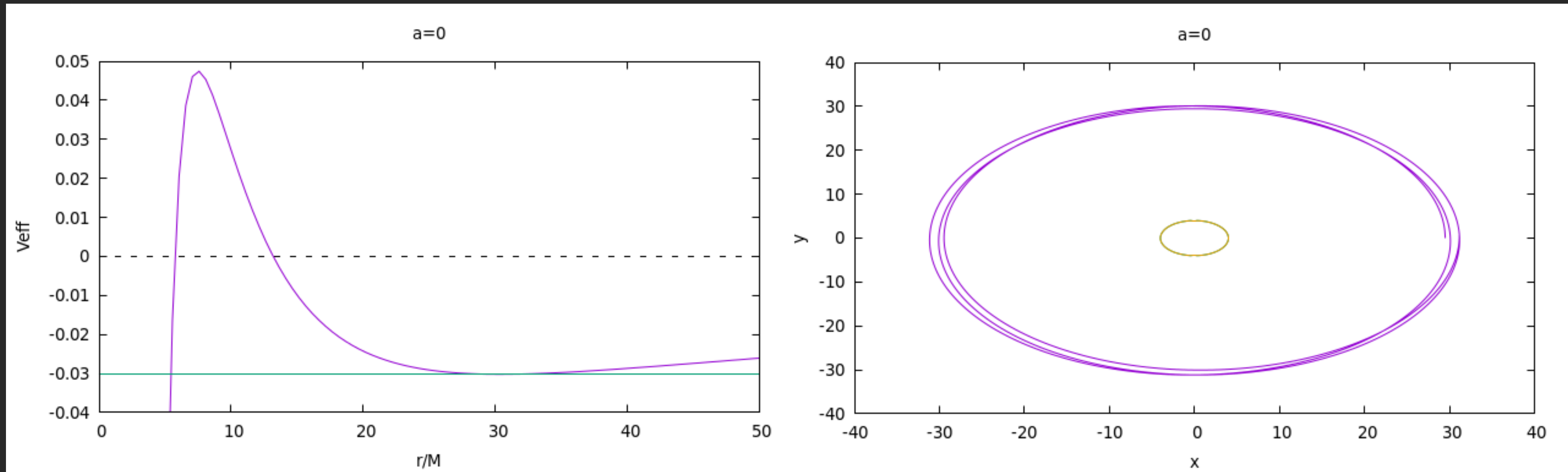
$$L = -2.1082$$



Διαγράμματα διάφορων τιμών για τις αρχικές συνθήκες.

Αντίστοιχα για τις διαφορετικές σταθερές Kerr. Φαίνεται να απειρίζονται μετά από κάποιο χρονικό διάστημα και κοντά στις αντίστοιχες τιμές των οριζόντων, για $a=0$ να είναι $r=2$ και για $a=0.2$ να είναι $r=[0.02, 1.98]$.

Το οποίο είναι ένα αποτέλεσμα που έχει λογική υπόσταση.

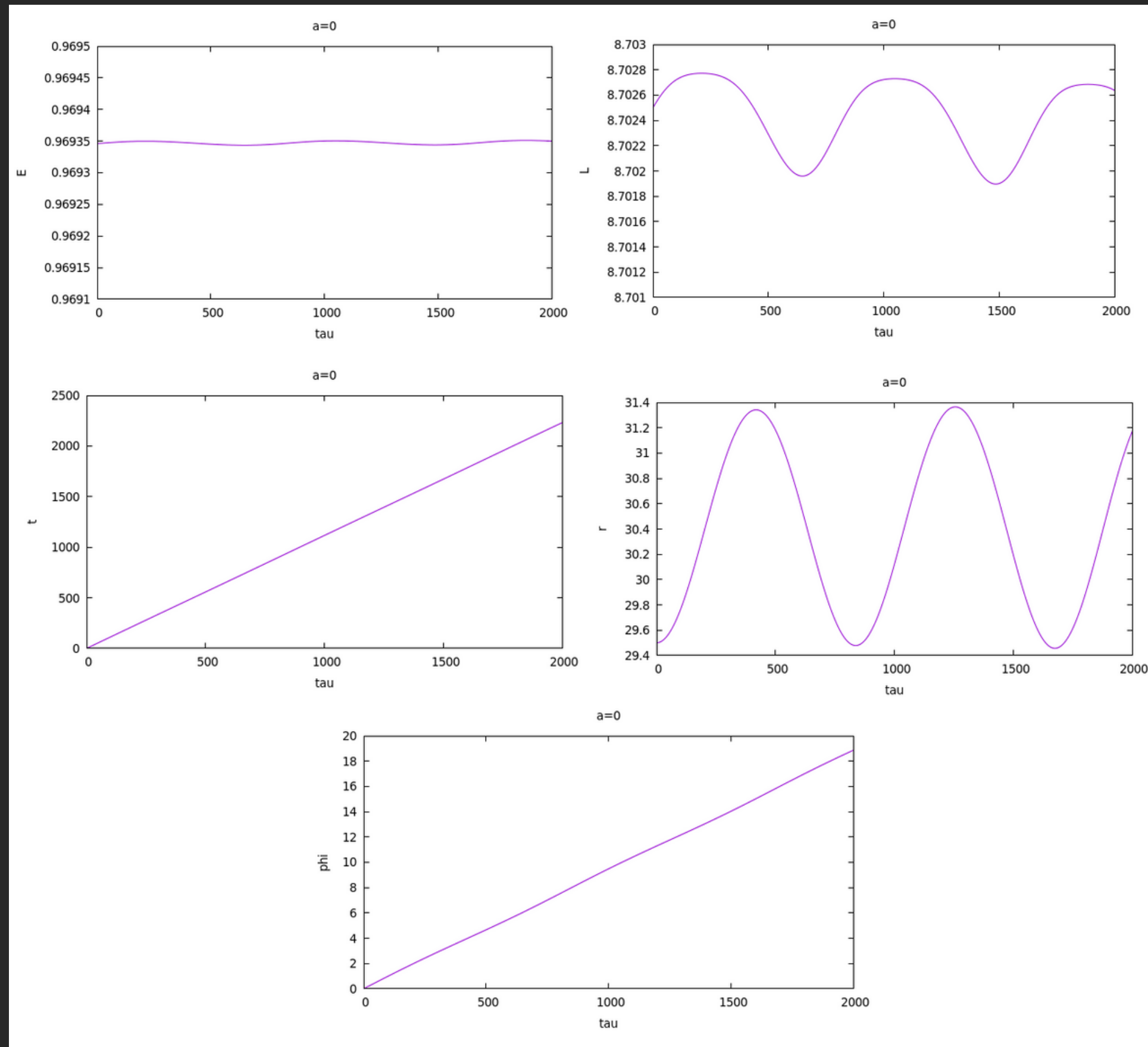


Αναπαράσταση V_{eff} (αριστερά) και τροχιάς σωματιδίου (δεξιά).

Για το $a=0$ αναζητάτε και μία δέσμια τροχιά, όπως φαίνεται από το διάγραμμα της τροχιάς εκτελεί ελλειπτική τροχιά γύρω από τον ορίζοντα. Και επιβεβαιώνεται από το διάγραμμα του δυναμικού.

Έχουμε αναζητήσει τις τιμές της τροχιάς και του δυναμικού για να δείξουμε αν υπάρχει ταύτιση.

Βρέθηκαν να είναι $[28.7696, 32.1822]$ για διάγραμμα V_{eff} και για το διάγραμμα της τροχιάς $[29.457, 31.1905]$.



Και τα παρόντα διαγράμματα δείχνουν μία περιοδικότητα στην εναλλαγή των τιμών.

Αρχικές συνθήκες:

$$a = 0$$

$$M = 2$$

$$r = 29.5$$

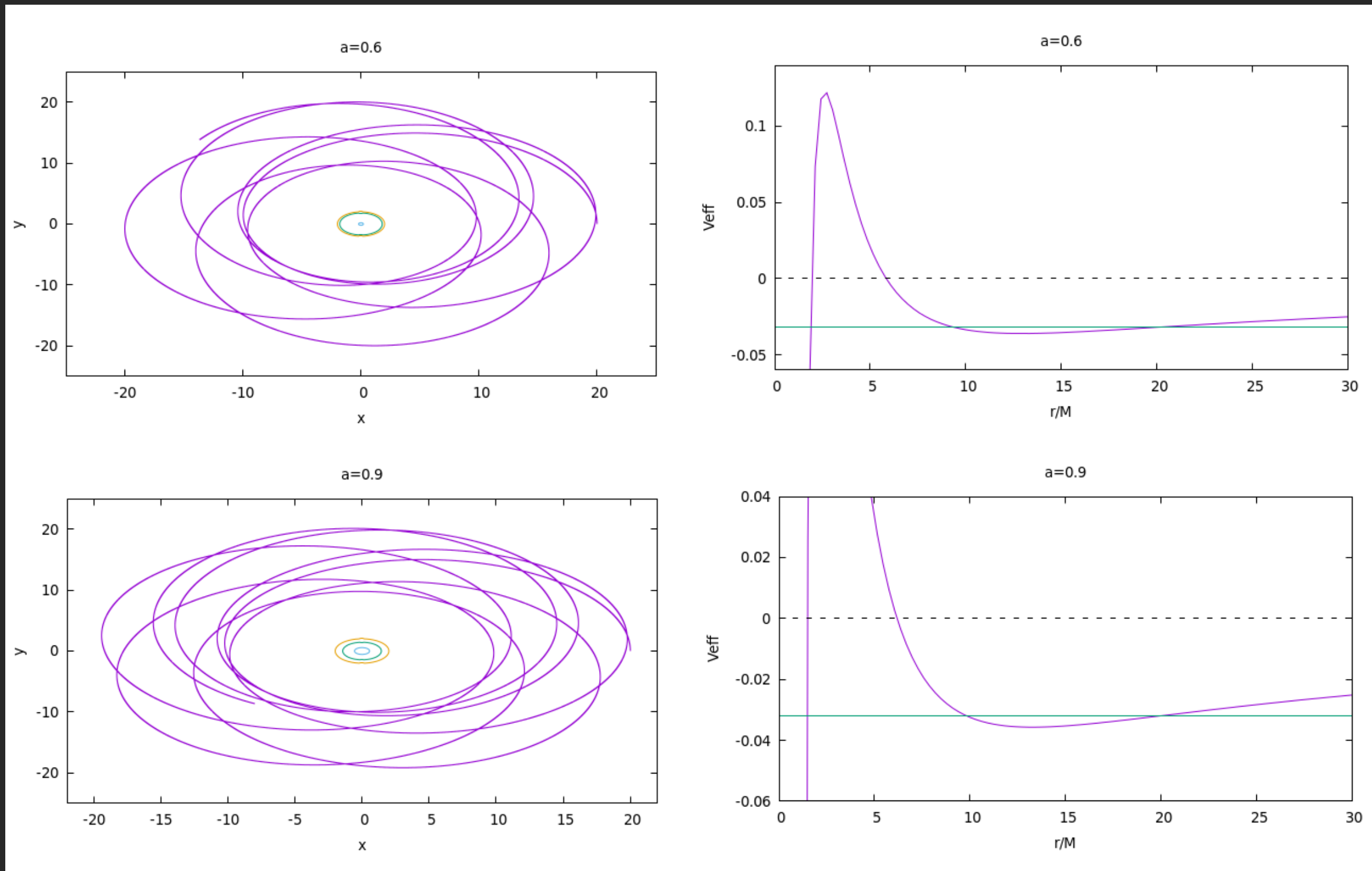
$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{\phi} = 0.01$$

$$E = 0.9693$$

$$L = 8.7025$$

Διαγράμματα των σταθερών και συντεταγμένων.



Διαγράμματα τροχιών και V_{eff}
για $a=0.6$ και $a=0.9$.

Αρχικές συνθήκες:

$$a = 0.6$$

$$M = 1$$

$$r = 20$$

$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{\phi} = 0.01$$

$$E = 0.9675$$

$$L = 3.9395$$

$$a = 0.9$$

$$M = 1$$

$$r = 20$$

$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{\phi} = 0.01$$

$$E = 0.9675$$

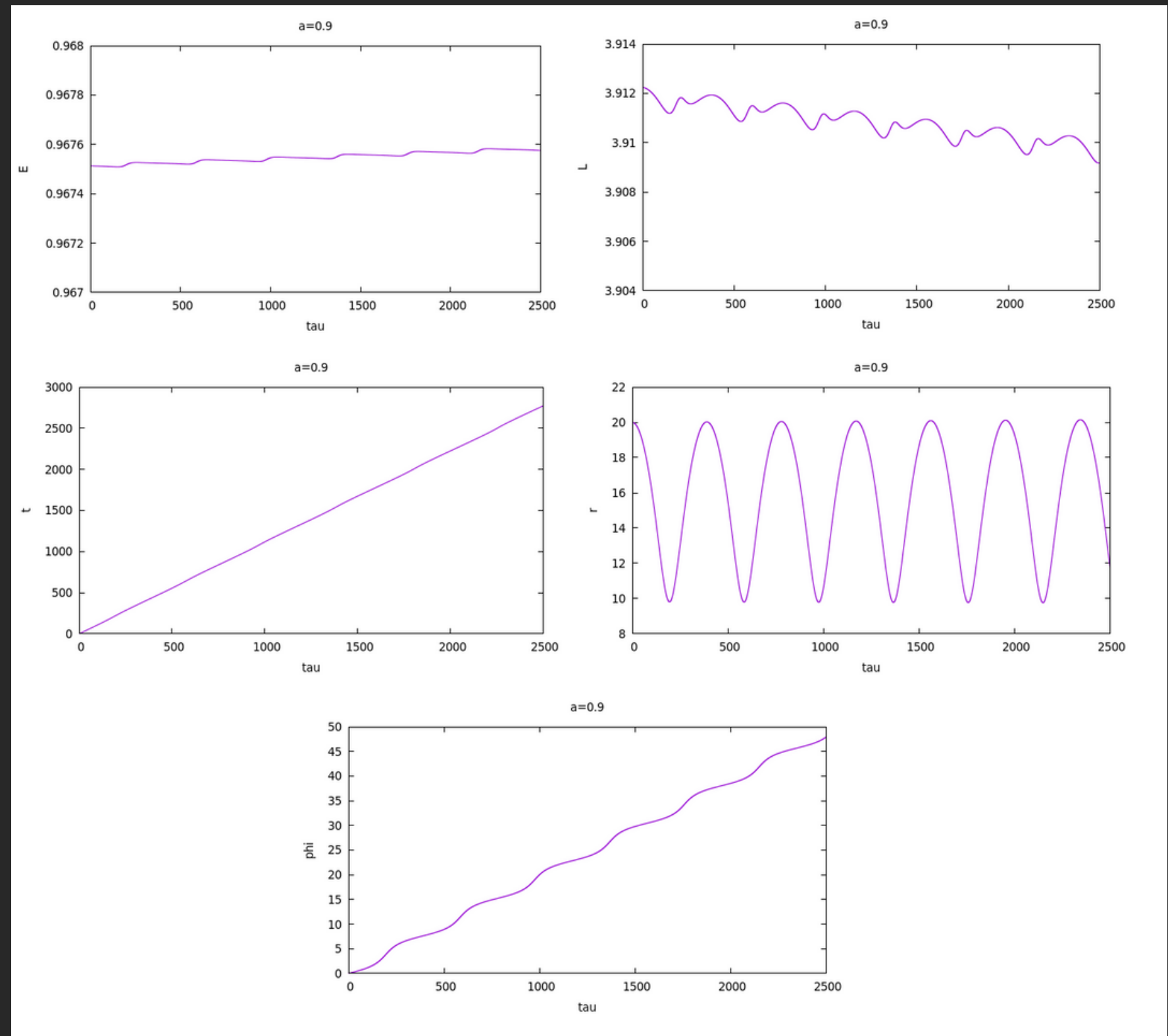
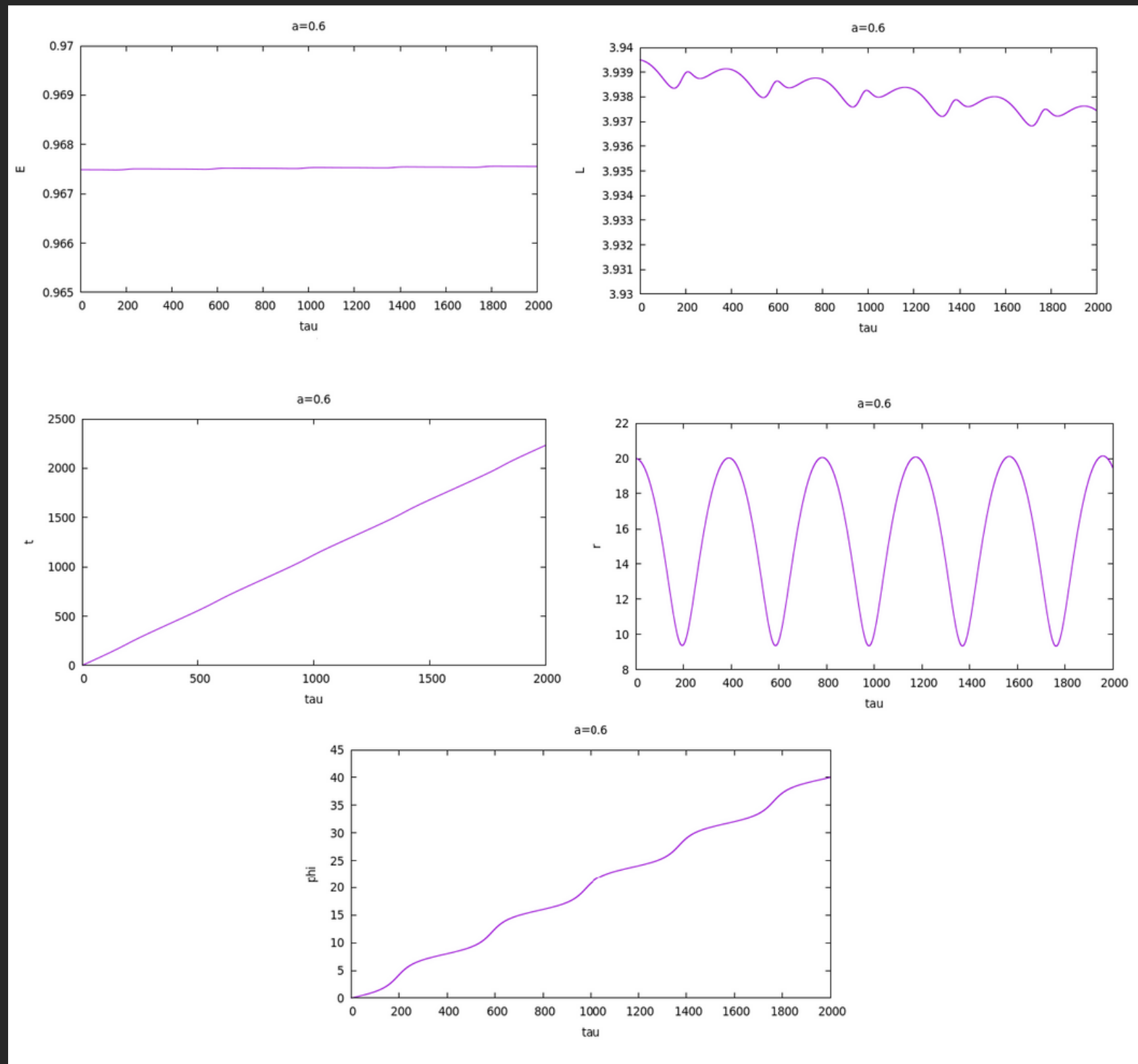
$$L = 3.9122$$

Γίνεται σύγκριση των τιμών για το σημείο πιο κοντά στον ορίζοντα και εκείνο πιο μακριά από αυτόν.

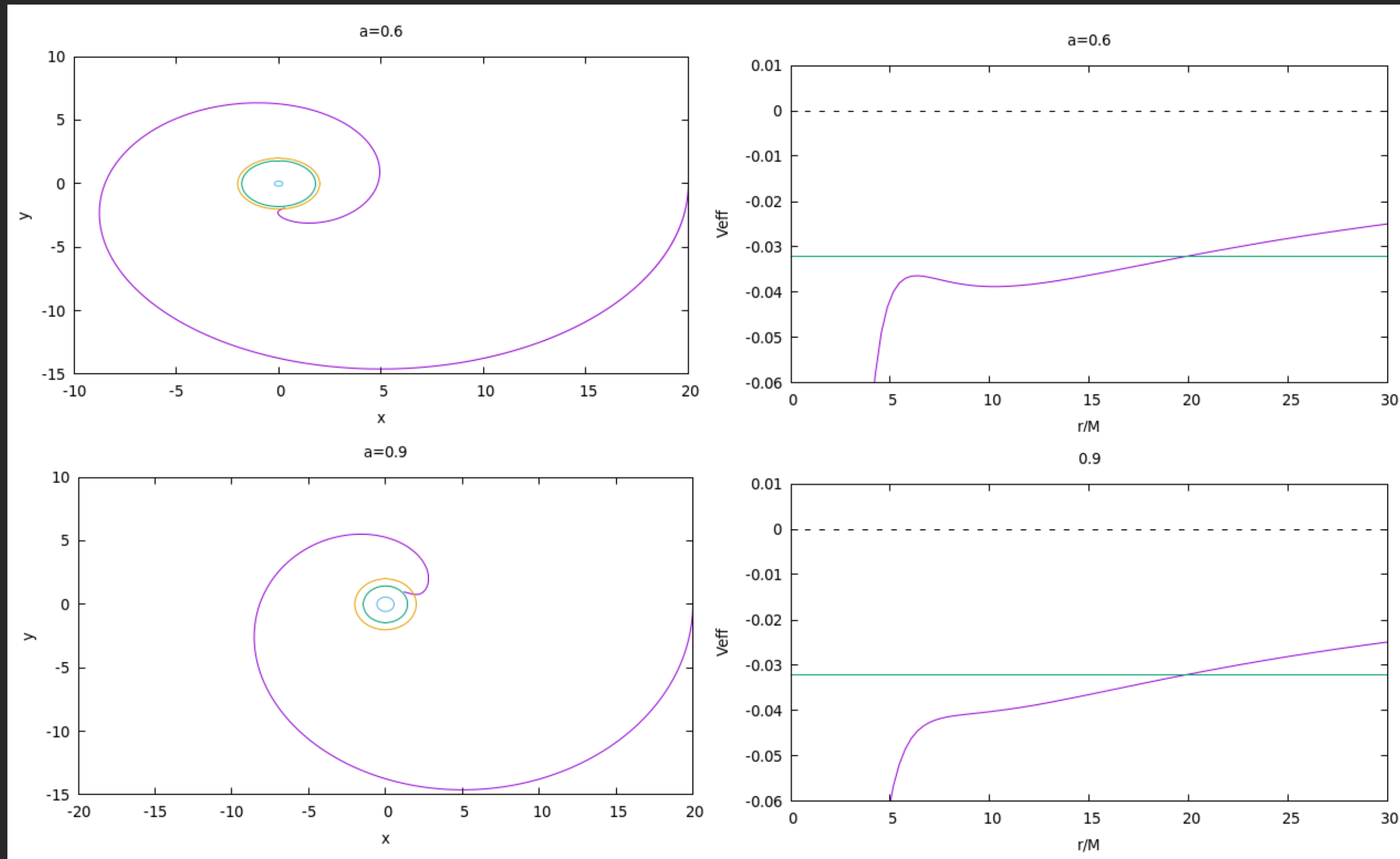
Και για την τομή της γραμμής ενέργειας με το δυναμικό. Για $a=0.6$ είναι $x=9.5635$ και $r=9.3854$,

$x=19.9811$ και $r=20.0133$. Για $a=0.9$ είναι $x=9.8143$ και $r=9.8188$ και $x=19.6474$ και $r=20.0133$.

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



Διαγράμματα σταθερών τιμών και μεταβλητών.



Διάγραμμα τροχιάς πτώσης. Υπάρχει τροχιά πτώσης στο κέντρο της μελανής οπής, όπως φαίνεται και από το διάγραμμα του δυναμικού.

Στην προκειμένη περίπτωση εξετάζεται η τροχιά του σωματιδίου όταν έχει αρνητική στροφορμή, δηλαδή κινείται αντιπεριστροφικά της μελανής οπής. Αρχικές συνθήκες:

$$a = 0.6$$

$$a = 0.9$$

$$M = 1$$

$$M = 1$$

$$r = 20$$

$$r = 20$$

$$\dot{r} = 0$$

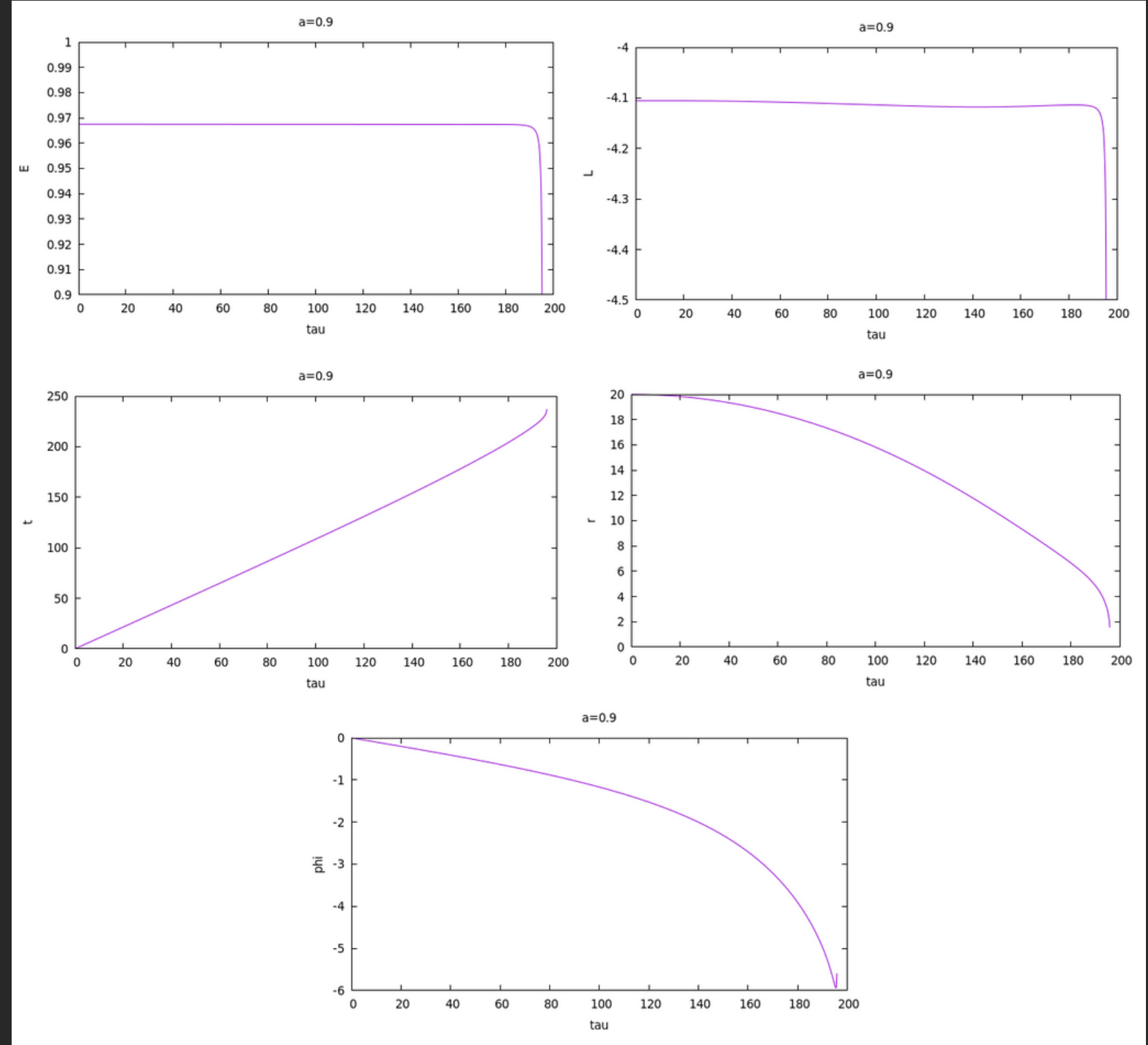
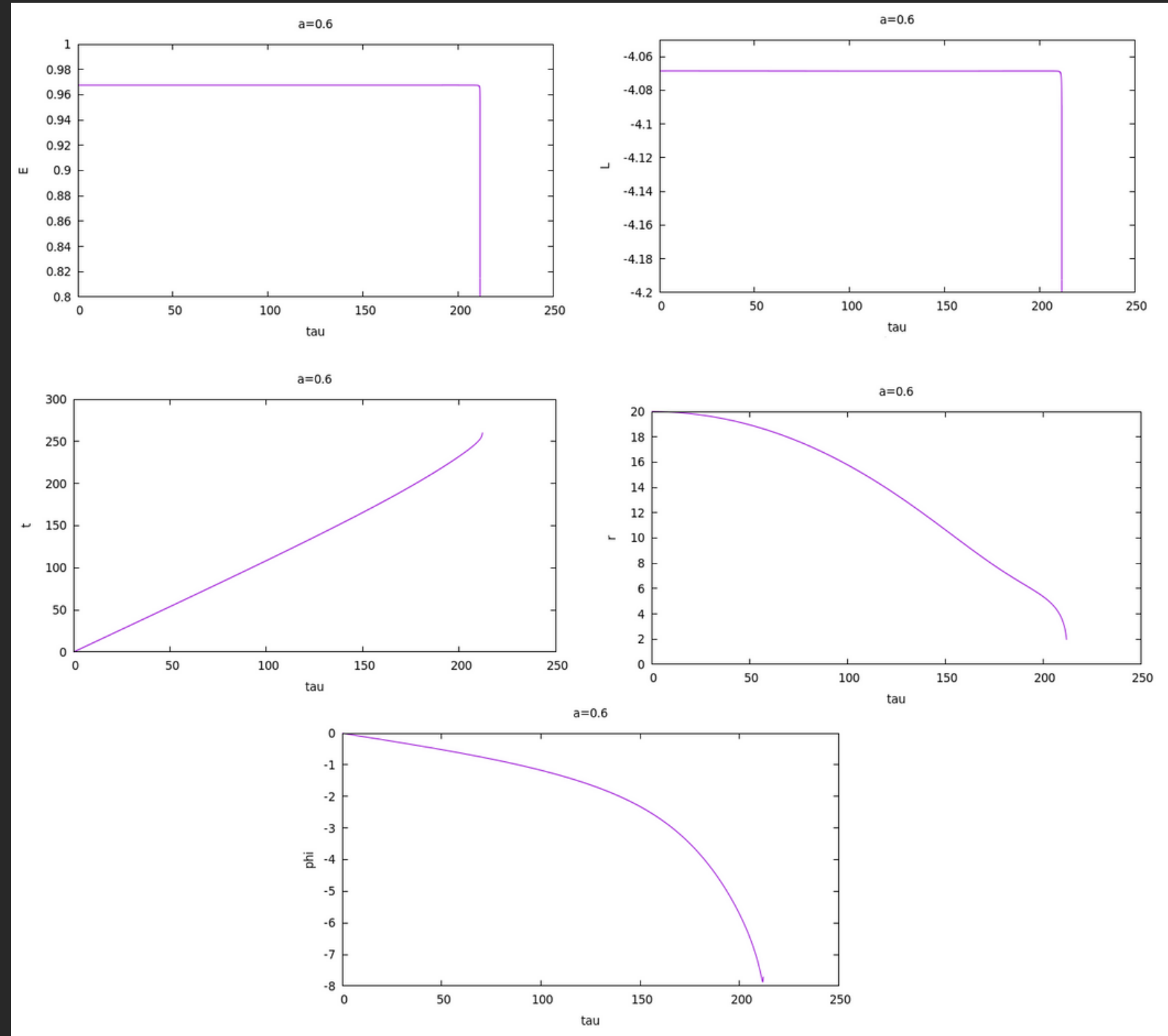
$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{\phi} = -0.01 \quad \dot{\phi} = -0.01$$

$$E = 0.9675 \quad E = 0.9675$$

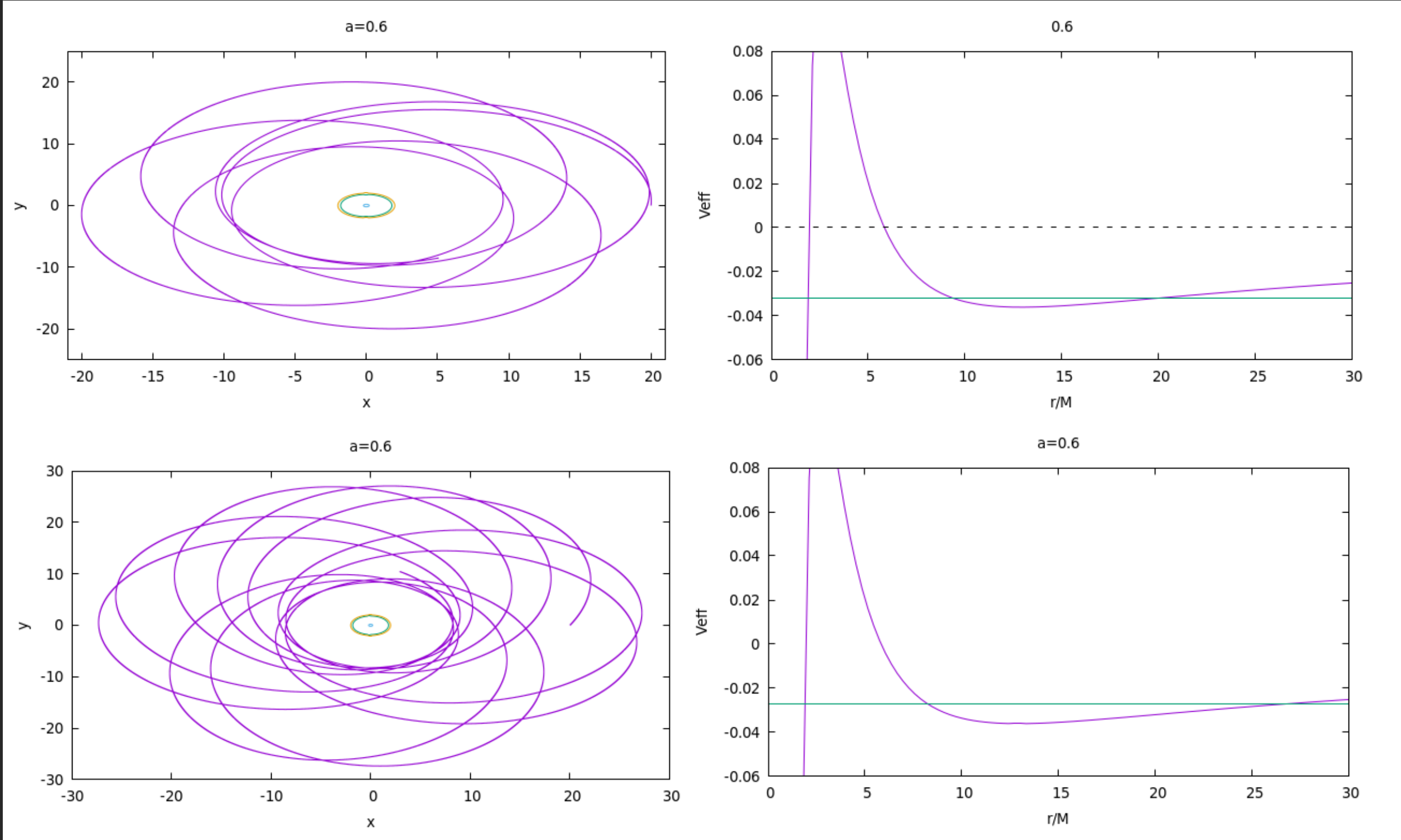
$$L = -4.0685 \quad L = -4.1058$$

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



Διαγράμματα σταθερών και μεταβλητών.

Οι τιμές που απειρίζονται ή δεν μπορούν να υπολογισθούν ή πιθανότατα μας δείχνει πως πέφτει στον ορίζοντα και κέντρο της μελανής οπής.



Αρχικές συνθήκες:

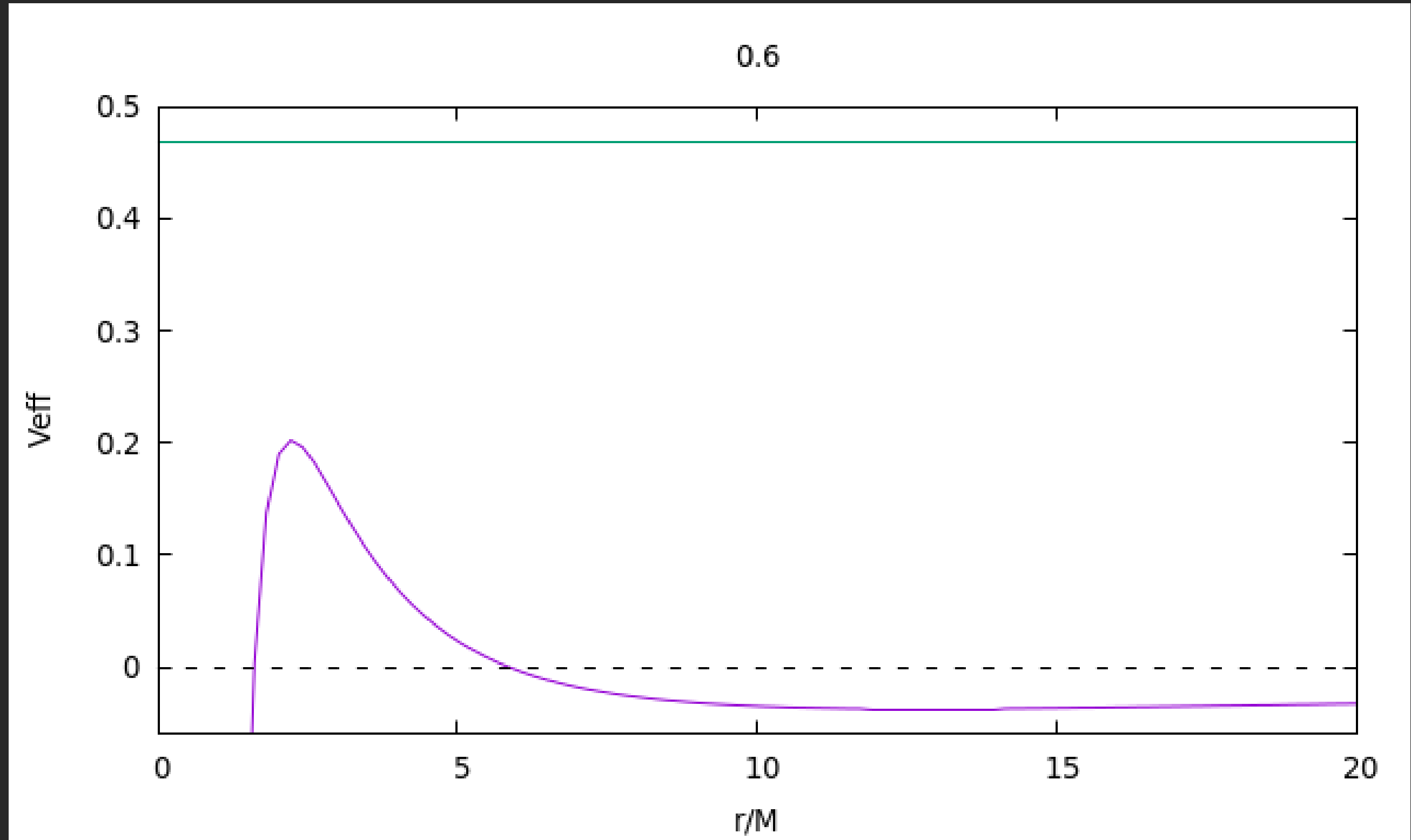
$a = 0.6$	$a = 0.6$
$M = 1$	$M = 1$
$r = 20$	$r = 20$
$\dot{r} = 0.01$	$\dot{r} = 0.1$
$\dot{\phi} = 0.01$	$\dot{\phi} = 0.01$
$E = 0.9675$	$E = 0.9726$
$L = 3.9395$	$L = 3.9392$

Διάγραμμα δέσμιων τροχιών.

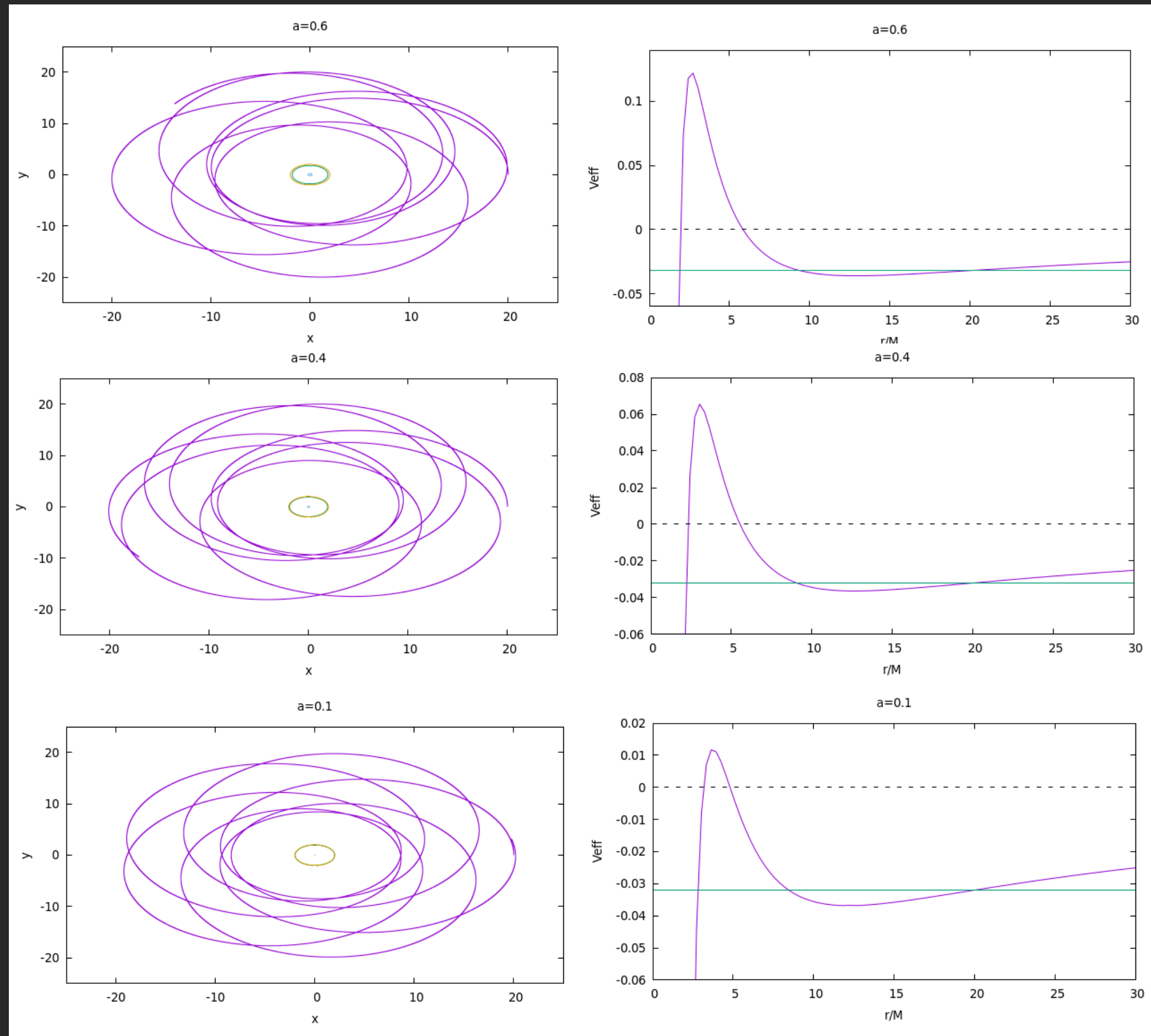
Και για τα παραπάνω διαγράμματα αναζητήθηκαν οι τιμές για πιο κοντινή και πιο μακρινή τροχιά γύρω από τη μελανή οπή. Για το πάνω είναι $x=9.43407$ και $r= 9.3854$, $x=19.9297$ και $r=20.0133$. Για το κάτω είναι $x=8.23751$ και $r= 8.23159$ και $x=27.0327$ και $r=26.8893$.

Στην προηγούμενη και παρούσα διαφάνεια, παραμένουν σταθερές οι υπόλοιπες τιμές και μεταβάλεται το $\dot{r}$.

Παρατηρούνται δέσμιες τροχιές γύρω από τη μελανή οπή. Και στην μεγαλύτερη ταχύτητα πιο έντονη η περιστροφή.



Για ταχύτητα $\dot{r} = 1$ η ενέργεια του ξεπερνάει το διάγραμμα του δυναμικού οπότε και διαφεύγει στο άπειρο.



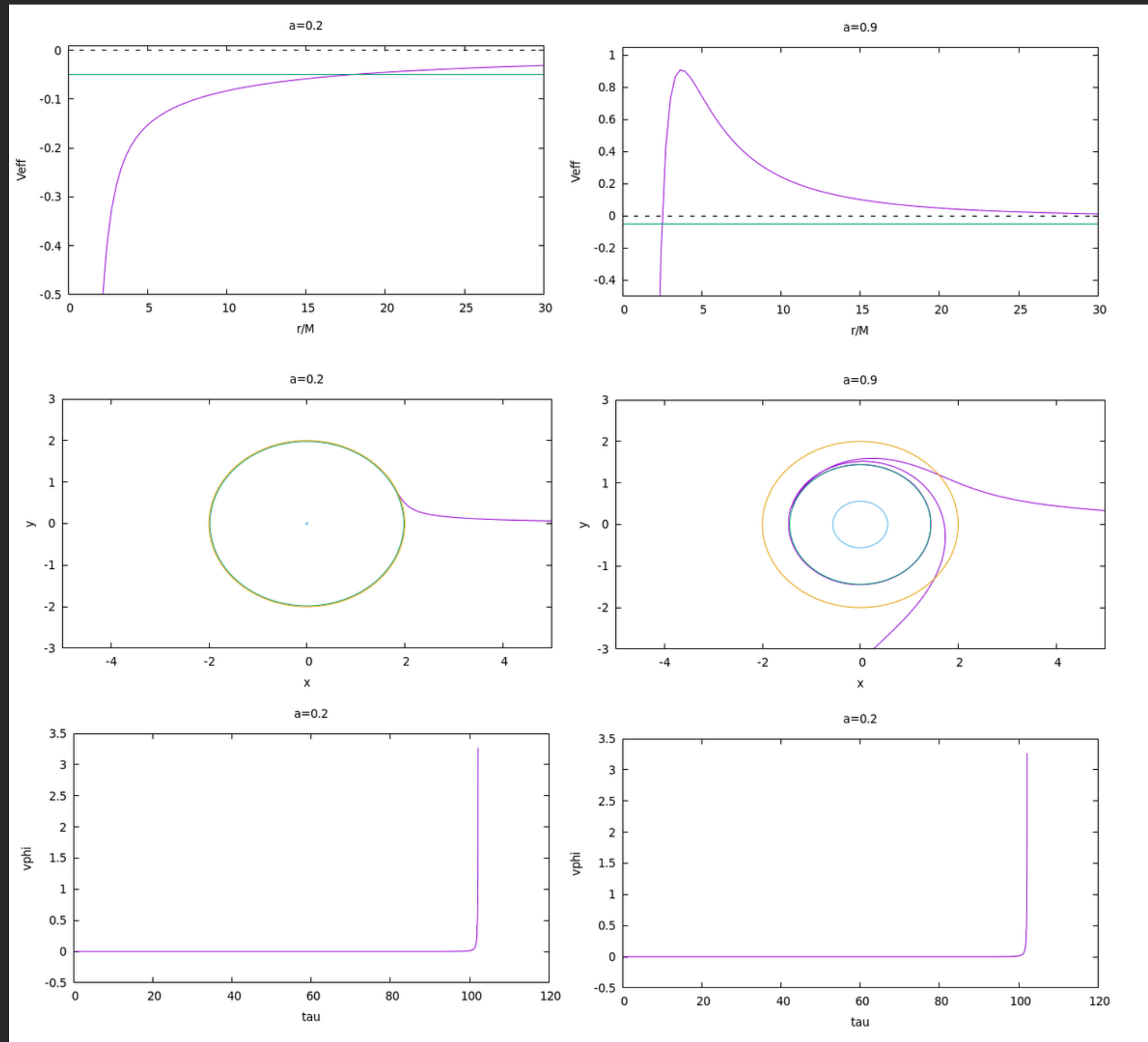
Δέσμιες τροχιές για μεταβλητές να παραμένουν σταθερές εκτός από τη σταθερά Kerr, που σταδιακά μικραίνει. Παρατηρείται πως για τη μικρότερη, $a=0.1$, η τροχιά φαίνεται πιο ομοιόμορφη αλλά δεν υπάρχουν αλλαγές, η τροχιά είναι δέσμια ανεξαρτήτως του a . Ακριβώς όπως και στα προηγούμενα οι τιμές για τις τροχιές θα είναι, για $a=0.6$ $x=8.2375$ και $r=8.2316$ με $x=27.0327$ και $r=26.8893$. Για $a=0.4$, $x=9.0841$ και $r=9.0502$ και $x=20.0643$ και $r=20.0257$. Και τέλος για $a=0.1$, $x=8.4105$ και $r=8.4404$ και $x=20.1797$ και $r=20.0344$.

Για τη διαφάνεια 21 οι αρχικές συνθήκες:

$a = 0.6$	$a = 0.4$	$a = 0.1$
$M = 1$	$M = 1$	$M = 1$
$r = 20$	$r = 20$	$r = 20$
$\dot{r} = 0$	$\dot{r} = 0$	$\dot{r} = 0$
$\dot{\phi} = 0.01$	$\dot{\phi} = 0.01$	$\dot{\phi} = 0.01$
$E = 0.9675$	$E = 0.9675$	$E = 0.9675$
$L = 3.9395$	$L = 3.9588$	$L = 3.9894$

Τέλος, θα διερευνήσουμε το frame dragging στη μελανή οπή.

Παρόλο που έχουμε αρχική $\dot{\phi}=0$, δεν καταφέρνουμε να έχουμε μηδενική στροφορμή για έναν παρατηρητή ZAMO, αλλά θα προσπαθήσουμε να δούμε αν η μελανή οπή θα αλλάξει την κατεύθυνση του σωματιδίου από αντιπεριστροφικά $aL < 0$ σε περιστροφή σύμφωνη με εκείνη της μελανής οπής.



Διαγράμματα τροχιάς και δυναμικού V_{eff} , για καλύτερη ευκρίνεια του διαγράμματος βλέπουμε μόνο την περιοχή μεταξύ $-5 < r < 5$.

Αρχικές συνθήκες:

$$a = 0.2$$

$$a = 0.9$$

$$M = 1$$

$$M = 1$$

$$r = 20$$

$$r = 20$$

$$\dot{r} = 0.01$$

$$\dot{r} = 0.01$$

$$\dot{\phi} = 0$$

$$\dot{\phi} = 0$$

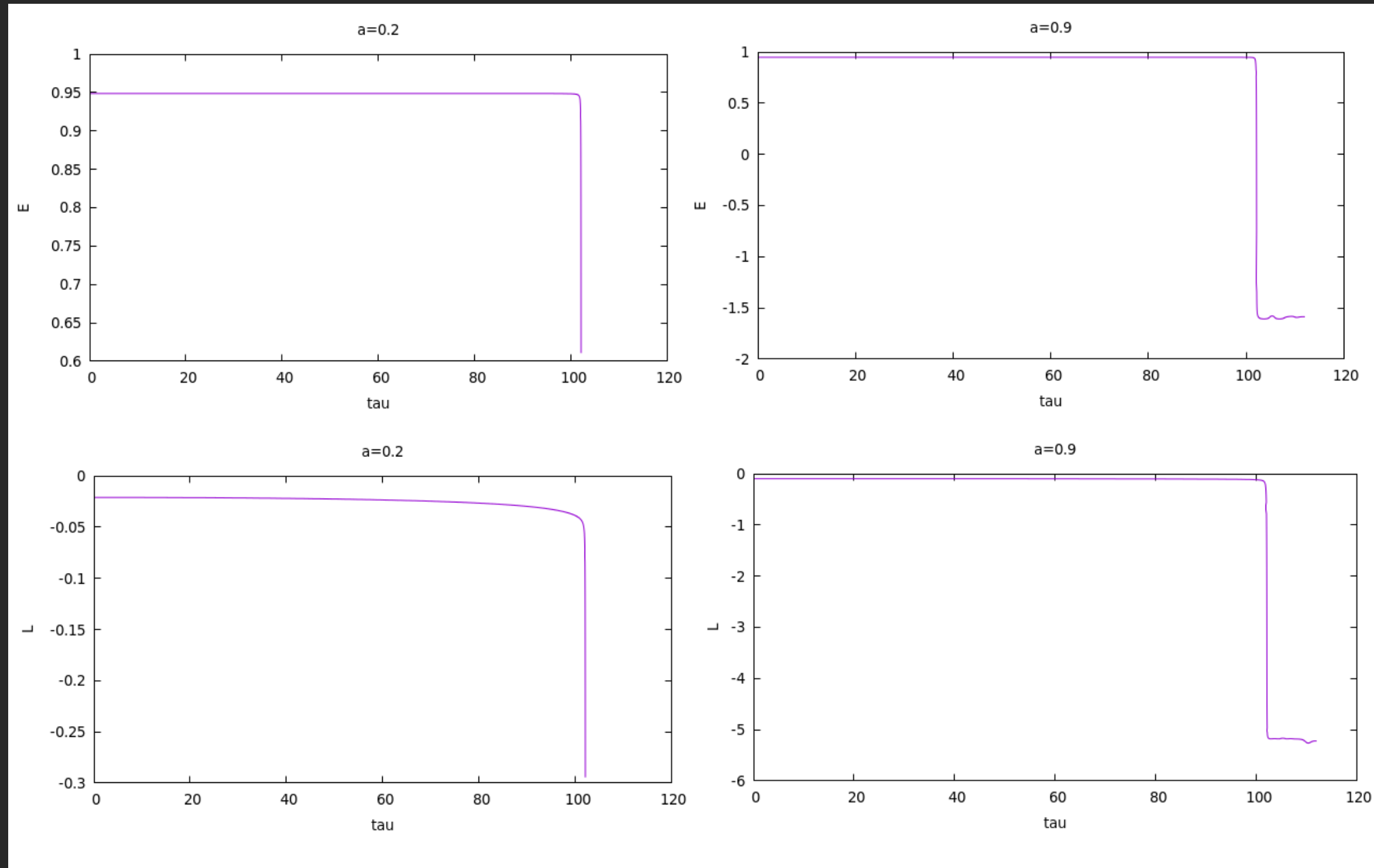
$$E = 0.9487$$

$$E = 0.9487$$

$$L = -2.1083$$

$$L = -9.4874$$

Και για τις δύο περιπτώσεις ξεκινώντας με μηδενική $\dot{\phi}$ βλέπουμε πως αποκτά ταχύτητα καθώς εισέρχεται στην εργόσφαιρα της μελανής οπής.



Για την περίπτωση $a=0.2$ από το ενεργειακό διάγραμμα διακρίνουμε πως θα γίνει πτώση στη μελανή οπή, όπως και φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα και τις απότομες μειώσεις των τιμών των σταθερών.

Για $a=0.9$ θα μπορούμε να πούμε πως έχουμε frame dragging . Το σωματίδιο εισερχόμενο στην εργόσφαιρα, μπαίνει σε κίνηση γύρω από τον ορίζοντα και αλλάζει η κίνηση του να κινείται συμπεριστροφικά και εν τέλει διαφεύγει.

Θα μπορούσε να οφείλεται στη διαδικασία Penrose, όπου το σωματίδιο καθώς εισέρχεται στην εργοπεριοχή και η ενέργεια του γίνεται αρνητική, διασπάται σε δύο σωματίδια. Το ένα διαφεύγει και το άλλο πέφτει στη μελανή οπή.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ



Από όλη τη διαδικασία της ανάλυσης της μετρικής Kerr, φαίνεται να υπάρχουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα στις γεωδαιτικές όσο ακόμα και για τον κώδικα που αναπτύχθηκε. Όπως δείξαμε παράγει λογικά αποτελέσματα στις αρχικές συνθήκες που επιλέχθηκαν να ελεγχούν. Στην περίπτωση διασταυρώσεων, αν υπήρχαν περισσότερα ερευνητικά άρθρα στις χρονοειδείς γεωδαιτικές της μετρικής Kerr να δινόταν μια πιο εμπεριστατωμένη ανάλυση. Παραμένει, όμως, ένα θέμα που χρίζει περισσότερη εμπειρία και πιο πολύπλοκες διαδικασίες αριθμητικής ανάλυσης και απεικόνισης. Η μετρική Kerr με διάφορες εφαρμογές μελετάται συνεχώς.



ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΑΣ

