



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

**Αριθμητική Ολοκλήρωση Γεωδαιτικών Εξισώσεων
στη Μετρική Kerr**

Καλεσοπούλου Αλεξάνδρα Σταυρούλα

Επιβλέπων: Αναγνωστόπουλος Κωνσταντίνος

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει σκοπό της την εμβάθυνση γνώσεων στη γεωμετρία του χωροχρόνου μέσω των γεωδαιτικών εξισώσεων. Θα μελετηθεί η μετρική Kerr σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist και Kerr-Schild, και ύστερα θα αναπτυχθεί υπολογιστικός κώδικας για τον αριθμητικό υπολογισμό της τροχιάς δοκιμαστικών σωμάτων μέσα σε μελανή οπή Kerr σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist, στην ειδική περίπτωση των γεωδαιτικών εξισώσεων στο επίπεδο του ισημερινού. Θα ξεκινήσουμε με μία εισαγωγή στην θεωρία της ειδικής και γενικής σχετικότητας, την περιγραφή της μελανής οπής Kerr, καθώς και της μετρικής για τα δύο συστήματα συντεταγμένων και θα εξερευνήσουμε τον τρόπο εύρεσης και διερεύνησης των γεωδαιτικών εξισώσεων. Στη συνέχεια θα περιγραφεί η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης και θα παρουσιαστεί ο κώδικας και τα αποτελέσματα της μελέτης. Οι εξισώσεις που μελετώνται είναι χρονοειδής γεωδαιτικές. Φαίνεται να είναι πρόσφατο κίνητρο μελέτης των τροχιών, ειδικά για supermassive black holes σε γαλαξίες, όπως και στον δικό μας γαλαξία που μελετήθηκε από το Event Horizon Telescope. Κυρίως, οι μελέτες απασχολούνται με φωτόνια, δηλαδή με φωτοειδείς γεωδαιτικές.

Abstract

This thesis aims to deepen the knowledge surrounding the geometry of space-time through geodesic equations. We will study the Kerr metric applying it to Boyer-Lindquist and Kerr-Schild coordinates, and subsequently we will develop a computational code to calculate the trajectory of test bodies within the Kerr black hole, in Boyer-Lindquist coordinates, specifically for the case of geodesic equations on the equatorial plane. We will begin with an introduction to the theory of special and general relativity, a description of the Kerr black hole, as well as the metric of the two coordinate systems, and we will explore the method of finding and analysing the geodesic equations. Finally, we will describe the numerical integration method and we will present the code alongside the research results. The equations that we study are timelike geodesics. As of lately it seems there is a motive to study said orbits, especially for supermassive black holes in galaxies, like our own that was studied by the Event Horizon Telescope. Mainly, studies focus on photons, so they utilise null geodesics.

Περιεχόμενα

1	Ειδική & Γενική Θεωρία της Σχετικότητας	1
1.1	Ειδική Σχετικότητα	1
1.1.1	Χωροχρόνος	2
1.1.2	Κώνοι Φωτός	5
1.1.3	Ιδιόχρονος & Διαστολή του Χρόνου	6
1.1.4	Μετασχηματισμός Lorentz	6
1.1.5	Μηχανική στην ειδική σχετικότητα	8
1.1.6	Η Αρχή Μεταβολών και Φωτεινές Ακτίνες	11
1.2	Γενική Σχετικότητα	12
1.2.1	Καμπυλωμένος Χωροχρόνος	13
1.2.2	Γεωδαιτικές Εξισώσεις	13
1.2.3	Μια αναφορά στη μετρική Schwarzschild	15
1.2.4	Μελανές Οπές	16
2	Μετρική Kerr	17
2.1	Ορίζοντας Μελανής Οπής Kerr	19
2.1.1	Frame Dragging	22
2.2	Εργόσφαιρα & Εργοπεριοχή	23
2.2.1	Στατικός & Ακίνητος Παρατηρητής	24
2.3	Παραγωγή Ενέργειας	25
2.4	Η μετρική Kerr σε συνταγμένες Kerr-Schild	26
3	Γεωδαιτικές Εξισώσεις της μετρικής Kerr	28
3.1	Γεωδαιτικές στο επίπεδο του Ισημερινού	29
3.1.1	Δυναμικά γεωδαιτικών στο επίπεδο του ισημερινού	31
3.1.2	Φωτοειδείς Γεωδαιτικές	33
3.1.3	Χρονοειδής Γεωδαιτικές	35
3.2	Γενικές Εξισώσεις Κίνησης Γεωδαιτικών	37
4	Μέθοδος αριθμητικής Ολοκλήρωσης Runge-Kutta	39
5	Ανάλυση Αποτελεσμάτων	43
A'	Παράρτημα	60

1 Ειδική & Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Ο Albert Einstein, μεταξύ διαφόρων θεμάτων, ασχολήθηκε εκτενώς με την βαρύτητα -μία από τις τέσσερις θεμελιώδεις δυνάμεις. Οδηγήθηκε στην ανάπτυξη της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, η οποία έκτοτε έχει συμβάλει σημαντικά στην κατανόηση κοσμολογικών και αστρονομικών φαινομένων. Χρονικά, η ειδική θεωρία της σχετικότητας ήρθε πρώτη, το 1905, και σχεδόν κατευθείαν ο Einstein θέλησε να εισάγει τη βαρύτητα στη θεωρία του, και έτσι να καταλήξει το 1915 στη γενική σχετικότητα.

Ξεκινώντας από την ειδική θεωρία της σχετικότητας, βλέπουμε πλέον διαφορετικά τον χώρο, τον χρόνο και την σχέση μεταξύ ύλης και ενέργειας. Καθώς, η θεωρία, παρέχει το πλαίσιο για την περιγραφή της συμπεριφοράς σωμάτων που κινούνται με ταχύτητες κοντά σε αυτήν του φωτός.

Οι βασικές της αρχές είναι:

1. Η Αρχή της Σχετικότητας: Οι νόμοι της φυσικής θα είναι ίδιοι σε όλα τα διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
2. Η Αρχή της Αμετάβλητης Ταχύτητας του φωτός: Το φως θα διαδίδεται στο κενό με σταθερή ταχύτητα c για όλους του παρατηρητές, ανεξαρτήτως από το είδος κίνησης της φωτεινής πηγής.

1.1 Ειδική Σχετικότητα

Ο προγενέστερός του, ο Νεύτωνας, θεωρεί απόλυτο τον χρόνο κάθε παρατηρητή, ενώ ο Einstein βάζει την έννοια του σχετικού χρόνου και ιδιοχρόνου στις εξισώσεις κίνησης των σωμάτων.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, ένα ελεύθερο σώμα (σώμα στο οποίο δεν ενεργούν δυνάμεις) κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα. Η «μεταφορά» αυτής της ευθείας γραμμής στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, είναι το στοιχείο μήκους που καθορίζεται από Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1)$$

και δίνει την απόσταση dS μεταξύ σημείων που απέχουν απειροστά στοιχειώδη διαστήματα dx , dy και dz του επίπεδου (*flat*) χώρου. Για την περιγραφή των κινήσεων ο παρατηρητής επιλέγει ένα σύστημα συντεταγμένων, το οποίο παρέχει ένα σύστημα αναφοράς (*reference frame*). Υπάρχουν πολλά πιθανά συστήματα συντεταγμένων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συστήματα αναφοράς, τα οποία μπορεί να κινούνται ομαλά, επιταχυνόμενα, να έχουν περιστροφή ή και συνδυασμούς των παραπάνω.

Δεν είναι όμως όλα τα συστήματα αναφοράς το ίδιο χρήσιμα. Το σύστημα συντεταγμένων που θα μας απασχολήσει ονομάζεται *αδρανειακό σύστημα αναφοράς (inertial frame)*. Ένας παρατηρητής μέσα σε ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να ανακαλύψει μία παράμετρο t , όπου οι θέσεις των ελεύθερων σωματιδίων θα μεταβάλλονται με σταθερούς ρυθμούς ως προς αυτήν. Η παράμετρος αυτή είναι ο *χρόνος*. Μπορούμε έτσι να αναδιαμορφώσουμε τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα ώστε η κίνηση οποιουδήποτε σωματιδίου να περιγράφεται ως συνάρτηση του χρόνου με την επιτάχυνση να είναι μηδενική.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

Βλέποντας αυτό μπορούμε να πούμε πως συστήματα αναφοράς αυτής της μορφής καθορίζονται και ως Καρτεσιανά συστήματα αναφοράς. Πάραυτα, όλα τα διαφορετικά Καρτεσιανά συστήματα δεν αποτελούν απαραίτητα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Και αντίστοιχα υπάρχουν πολλά αδρανειακά συστήματα αναφοράς, όπου είναι επιθυμητό να βρεθεί ένας τρόπος σύνδεσης μεταξύ τους. Ένας τρόπος είναι ο μετασχηματισμός συντεταγμένων. Έχουμε μετασχηματισμούς ως προς τη μετατόπιση, στροφή κατά γωνία και ομαλές κινήσεις. Οι οποίοι περιγράφουν τους τρόπους για τον προσδιορισμό της θέσης των σημείων.

Όσον αφορά το χρόνο, ειδικά στη Νευτώνεια μηχανική, υπάρχει η έννοια του απόλυτου χρόνου μεταξύ διαφορετικών αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Και μεταξύ δύο συστημάτων που κινούνται με ομαλή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο, έρχεται ο *Μετασχηματισμός του Lorentz*. Να σημειωθεί πως αυτή η θεώρηση εγκαταλείπεται στην ειδική σχετικότητα.

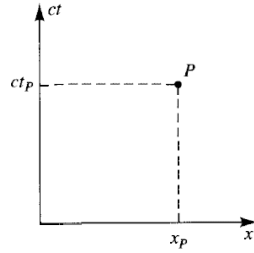
$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t \end{aligned} \quad (3)$$

1.1.1 Χωροχρόνος

Η ιδέα του ήταν να μπορέσει να εξηγήσει την βαρύτητα με γεωμετρικούς όρους ενοποιώντας τον χώρο και τον χρόνο στον τετραδιάστατο *χωροχρόνο*. Ειδικότερα, προτείνει πως η παρουσία μεγάλης μάζας καμπυλώνει τη γεωμετρία γειτονικού χωροχρόνου και ότι, απουσία άλλων δυνάμεων, οι τροχιές των σωμάτων θα διαγράφουν ευθεία μέσα στον καμπυλωμένο χωροχρόνο, δηλαδή ο 1ος Νόμος του Νεύτωνα παραμένει αμετάβλητος.

Για την καλύτερη περιγραφή του χωροχρόνου χρησιμοποιούμε τα *χωροχρονικά διαγράμματα (spacetime diagram)*, που είναι διαγράμματα δύο αξόνων, με τον έναν να αντιπροσωπεύει τον τρισδιάστατο χώρο και τον άλλον τον χρόνο,

αντίστοιχα. Ένα σημείο P -που θα ονομάζεται *γεγονός (event)*, εφόσον αναπαριστά ένα γεγονός που συμβαίνει σε συγκεκριμένο τόπο μία συγκεκριμένη στιγμή- θα έχει συντεταγμένες σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (t_P, x_P, y_P, z_P) και η καμπύλη που θα διαγράφει ένα σωματίδιο ονομάζεται *κοσμική γραμμή (worldline)*.



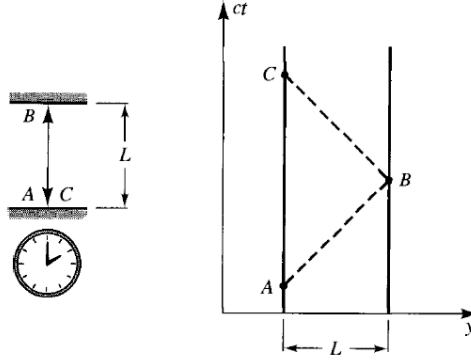
Σχήμα 1: Χωροχρονικό διάγραμμα που απεικονίζει μια δισδιάστατη τομή ενός τετραδιάστατου χωροχρόνου και το γεγονός P . [1]

Το βασικό κομμάτι της ειδικής σχετικότητας, τώρα, είναι η γεωμετρία του χωροχρόνου. Όπως είδαμε παραπάνω, η γεωμετρία καθορίζεται από το στοιχειώδες μήκος δύο γειτονικών σημείων. Μία βοήθεια στη δημιουργία του είναι το παρακάτω νοητικό πείραμα.

Υπάρχουν δύο παράλληλα κάτοπτρα, σε απόσταση L μεταξύ τους, σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Το σύστημα βρίσκεται σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα και περιγράφεται με τις συντεταγμένες (t, x, y, z) . Τα κάτοπτρα είναι τοποθετημένα όπως στο σχήμα 2 και είναι ακίνητα. Ένας φωτεινός παλμός αναπηδά μεταξύ τους και ένα ρολόι μετρά το χρονικό διάστημα Δt , μεταξύ του γεγονότος A και C , της αναχώρησης του παλμού και της επιστροφής του στο ίδιο σημείο του χώρου, αντίστοιχα. Οπότε τα διαστήματα των συντεταγμένων είναι

$$\Delta t = 2L/c, \quad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \quad (4)$$

Το νοητικό πείραμα που περιγράψαμε παραπάνω το βάζουμε σε κίνηση, με ταχύτητα V ως προς το αδρανειακό σύστημα (t, x, y, z) κατά μήκος της αρνητικής διεύθυνσης x , παράλληλα στα κάτοπτρα. Τα γεγονότα σε αυτό το αδρανειακό σύστημα θα είναι (t', x', y', z') , όπου το x' είναι παράλληλο στο x , κοκ. Το φως, μεταξύ της εκπομπής από το A στο C θα διανύσει απόσταση $\Delta x' = V\Delta t'$ στη διεύθυνση x' . Στην διεύθυνση y διανύει απόσταση L , υποθέτουμε εδώ πως οι κάθετες αποστάσεις είναι ίσες και στα δύο συστήματα αναφοράς. Άρα, η συνολική απόσταση που διανύει ο φωτεινός παλμός μεταξύ της εκπομπής και της λήψης του είναι ίση με $2[L^2 + (\Delta x'/2)^2]^{1/2}$. Θεωρούμε



Σχήμα 2: Τα κάτοπτρα απεικονίζονται στο αριστερό μέρος του σχήματος, είναι τοποθετημένα παράλληλα και βρίσκονται σε ηρεμία. Ένας φωτεινός παλμός διαδίδεται μεταξύ τους και ένα ρολόι μετρά το Δt από το σημείο $A \rightarrow B \rightarrow C$. Η κοσμική γραμμή φαίνεται στο δεξί μέρος του σχήματος. [1]

την ταχύτητα να είναι η ταχύτητα του φωτός c , και τότε τα διαστήματα των συντεταγμένων σε αυτό το σύστημα θα είναι

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \sqrt{L^2 + \left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2}, \quad \Delta x' = V \Delta t', \quad \Delta y' = 0, \quad \Delta z' = 0 \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει

$$-(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -4[L^2 + (\Delta x'/2)^2] + (\Delta x')^2 = -4L^2 = -(c\Delta t)^2$$

Αυτή η σχέση θα μας βοηθήσει να βρούμε το στοιχείο του μήκους, εφόσον όλα τα διαστήματα είναι μηδενικά και στα δύο συστήματα αναφοράς, προσθέτουμε και τα δύο μέλη της και καταλήγουμε πως ο παρακάτω συνδυασμός είναι ίδιος και στα δύο συστήματα αναφοράς

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

Το παραπάνω αποδεικνύεται ότι ισχύει και σε γενικότερο πλαίσιο, εφόσον από δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα καταλήγουμε στο ίδιο $(\Delta s)^2$, άρα αυτή η ποσότητα παραμένει *αναλλοίωτη* κάτω από μετασχηματισμούς. Έτσι, θα ορίσουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο χωροχρόνο (στοιχείο του μήκους), που θα είναι ίδια σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων και θα έχουν την ιδιότητα του αναλλοίωτου. Και ορίζουμε έτσι το στοιχείο μήκους του επίπεδου χωροχρόνου:

$$\boxed{ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (6)$$

Αυτό θα περιγράφει τη γεωμετρία του τετραδιάστατου χωροχρόνου και λόγω του αρνητικού πρόσημου δεν θα περιγράφει Ευκλείδεια γεωμετρία, καθώς παραμένει επίπεδη παρόλα αυτά. Αναφέρεται συνήθως ως *επίπεδος χωροχρόνος (flat spacetime)* ή *χώρος Minkowski (Minkowski space)*.

1.1.2 Κώνοι Φωτός

Αναφέραμε πως λόγω του αρνητικού πρόσημου του όρου $(c\Delta t)^2$, η γεωμετρία δεν είναι μία τετραδιάστατη Ευκλείδεια γεωμετρία. Το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ δύο σημείων μας δίνει θετική, αρνητική ή μηδενική λύση. Αντίστοιχα, όταν το $(\Delta s)^2$ είναι θετικό, τότε λέμε πως τα σημεία του χώρου είναι *χωροειδώς χωρισμένα (spacelike separated)*, όταν είναι αρνητικό *χρονοειδώς χωρισμένα (timelike separated)* και όταν είναι ίσο με το μηδέν *φωτοειδώς χωρισμένα (null or lightlike separated)*. Συνοψίζοντας, γράφουμε:

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 > 0 & \text{ χωροειδώς χωρισμένα} \\(\Delta s)^2 = 0 & \text{ φωτοειδώς χωρισμένα} \\(\Delta s)^2 < 0 & \text{ χρονοειδώς χωρισμένα}\end{aligned}$$

Κώνος φωτός (light cone) ενός σημείου P , ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων που είναι φωτοειδώς χωρισμένα από ένα σημείο P , και είναι μια τρισδιάστατη επιφάνεια στον τετραδιάστατο χωροχρόνο. Τα μέρη του είναι ο *μελλοντικός κώνος φωτός (future light cone)* που παράγεται από τις ακτίνες φωτός που εξέρχονται από το σημείο και ο *παρελθοντικός κώνος φωτός (past light cone)*, από ακτίνες που συγκλίνουν στο P . Κάθε σημείο P του χωροχρόνου έχει έναν κώνο φωτός, οι οποίοι αποτελούν σημαντικό κομμάτι της γεωμετρίας του χωροχρόνου. Τα σημεία που είναι χρονοειδώς και χωροειδώς χωρισμένα με το σημείο, βρίσκονται εντός και εκτός του κώνου φωτός, αντιστοίχως.

Οι ακτίνες φωτός κινούνται μέσα στον χωροχρόνο σε διαδρομές με σταθερή κλίση που αναλογεί με την ταχύτητα του φωτός, άρα η διεύθυνσή τους συμπίπτει με αυτή των φωτοειδών κοσμικών γραμμών. Είναι οι ευθείες γραμμές που περνάνε από το σημείο P και εφάπτονται στον κώνο φωτός, για κάθε σημείο P . Σωματίδια με μη μηδενική μάζα ηρεμίας που κινούνται κατά μήκος των χρονοειδών κοσμικών γραμμών σε κάθε σημείο της τροχιάς τους βρίσκονται εξολοκλήρου *εντός* του κώνου φωτός. Έτσι, η ταχύτητά τους, σε κάθε σημείο, είναι μικρότερη από αυτή του φωτός.

Επομένως, οι κώνοι φωτός οριοθετούν τις αιτιακές σχέσεις μεταξύ των σημείων-γεγονότων. Έτσι, το γεγονός P μπορεί να επηρεάσει μόνο σημεία που βρίσκονται εντός του μελλοντικού κώνου φωτός, ή το πολύ, πάνω του και όχι αυτά που είναι εκτός αυτού. Αντίστοιχα, στο γεγονός μπορεί να σταλθεί

πληροφορία μόνο από τα σημεία εντός του παρελθοντικού κώνου φωτός, ή το πολύ, εκείνα που είναι πάνω του.

Για τη μέτρηση της απόστασης δύο γειτονικών σημείων κατά μήκος μίας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής ενός σωματιδίου ($ds^2 < 0$), εισάγουμε το μέγεθος του ιδιοχρόνου (*proper time*) $d\tau$, το οποίο είναι πραγματικός αριθμός με διαστάσεις χρόνου. Θα μπορούσαμε να το φανταστούμε ως ένα ρολόι που κινείται κατά μήκος της καμπύλης και μετρά την απόσταση τ .

$$d\tau^2 \equiv -ds^2/c^2 \quad (7)$$

1.1.3 Ιδιόχρονος & Διαστολή του Χρόνου

Από τη γεωμετρία του χωροχρόνου στην ειδική σχετικότητα προκύπτουν διάφορες συνέπειες, με μία από αυτές να είναι η *διαστολή του χρόνου* (*time dilation*).

Στο τέλος της προηγούμενης ενότητας, αναφέραμε τον ιδιοχρόνο, και θέλουμε τώρα να τον υπολογίσουμε ως τ_{AB} μεταξύ δύο τυχαίων σημείων A και B στη διεύθυνση μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής. Θα γίνει ολοκλήρωση στο στοιχειώδες τμήμα που έχουμε (6) και (7)

$$\begin{aligned} \tau_{AB} &= \int_A^B d\tau = \int_A^B [dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2]^{1/2} \\ &= \int_{t_A}^{t_B} dt \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Πιο συνοπτικά γράφουμε:

$$\boxed{\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt' [1 - \vec{V}^2(t')/c^2]^{1/2}} \quad (8)$$

Το οποίο περιγράφει το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου, καθώς το $\sqrt{1 - \vec{V}^2/c^2}$ είναι μικρότερο της μονάδας (εφόσον η ταχύτητα $\vec{V}$ είναι πάντα μικρότερη της ταχύτητας του φωτός) και άρα ο ιδιοχρόνος είναι μικρότερος από το Δt . Για αρκετά μικρά χρονικά διαστήματα Δt , τόσο μικρά που η ταχύτητα να θεωρείται σταθερή χρησιμοποιούμε την διαφορική έκφραση της (8):

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \vec{V}^2/c^2} \quad (9)$$

1.1.4 Μετασχηματισμός Lorentz

Στην ενότητα 1.1 αναφέραμε πώς στη Νευτώνεια μηχανική χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς και ειδικά τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου (3) για

να καταλάβουμε πως συνδέονται τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς μεταξύ τους. Οι μετατοπίσεις και οι στροφές κατά γωνία εφαρμόζονται και στην ειδική σχετικότητα όπως παραπάνω, όμως υπάρχουν διαφοροποιήσεις για τους μετασχηματισμούς χωροχρονικών συντεταγμένων.

Στην ειδική σχετικότητα, η γεωμετρία του χωροχρόνου, καθορίζεται από το στοιχείο μήκους (6), με συντεταγμένες (t, x, y, z) που ορίζουν ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Από την αρχή της σχετικότητας το στοιχείο μήκους οφείλει να παραμένει ίδιο σε όλα τα διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς με συντεταγμένες (t', x', y', z') . Οι μετασχηματισμοί $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$ λέγονται *μετασχηματισμοί Lorentz (Lorentz transformations)*.

Το στοιχείο μήκους για τον Ευκλείδειο χώρο παραμένει αμετάβλητο κάτω από μετατοπίσεις και περιστροφές των συντεταγμένων, έτσι χρειαζόμαστε μετασχηματισμούς που να μας δείχνουν τον τρόπο μεταβολής μεταξύ του χρόνου και του χώρου σε δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς, που να διατηρώ το ds^2 . Για παράδειγμα, οι *προωθήσεις Lorentz (Lorentz boosts)*, είναι τα ανάλογα στροφών στο επίπεδο του (ct, x) . Είναι μετασχηματισμοί μεταξύ των συντεταγμένων (t, x, y, z) και (t', x', y', z') με τα y και z να παραμένουν αμετάβλητα:

$$ct' = (\cosh \theta)(ct) - (\sinh \theta)x, \quad (10\alpha')$$

$$x' = (-\sinh \theta)(ct) + (\cosh \theta)x, \quad (10\beta')$$

$$y' = y, \quad (10\gamma')$$

$$z' = z, \quad (10\delta')$$

με το $\theta \in (-\infty, +\infty)$. Πολύ εύκολα αποδεικνύεται πως ο μετασχηματισμός αυτός διατηρεί αναλλοίωτο το στοιχείο μήκους (6). Για σωματίδιο σε ηρεμία στο $(x' = 0)$ με $x = vt$ και από την $(10\beta')$ καταλήγουμε στο:

$$v = c \tanh \theta$$

Ακόμα, από τη (9), υπολογίζουμε την ποσότητα γ :

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \equiv \gamma \quad (11)$$

Και με όλα τα παραπάνω και την χρήση της ταυτότητας $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$, θα απαλείψουμε τον όρο θ από τις (10). Οπότε καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$t' = \gamma(t - vx/c^2),$$

$$x' = \gamma(x - vt),$$

$$y' = y,$$

$$z' = z$$

Ο μετασχηματισμός Lorentz αποτελεί ουσιαστικό μέρος της ειδικής σχετικότητας και είναι απαραίτητος για την κατανόηση και περιγραφή των φυσικών φαινομένων σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς.

1.1.5 Μηχανική στην ειδική σχετικότητα

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξηγήσουμε τη μηχανική και τα διάφορα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται ώστε να μπορέσουμε να περιγράψουμε την ειδική σχετικότητα στον τετραδιάστατο χωροχρόνο.

Το *τετράνυσμα* (*four-vector*) ορίζεται σαν ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα στον τετραδιάστατο χωροχρόνο. Κάτι αντίστοιχο, στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, είναι τα διανύσματα. Τα τετρανύσματα αναπαριστώνται με έντονη γραφή, π.χ. $\mathbf{a}$. Τα γράφουμε σαν έναν γραμμικό συνδυασμό από *τετρανύσματα βάσης*:

$$\mathbf{a} = a^t \mathbf{e}_t + a^x \mathbf{e}_x + a^y \mathbf{e}_y + a^z \mathbf{e}_z$$

Αντί να συμβολίζουμε τα τετρανύσματα βάσης με τα $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ και $\mathbf{e}_z$ μπορούμε, ισοδύναμα, να κάνουμε χρήση των $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ και τελικά να τα γράψουμε σαν έναν γραμμικό συνδυασμό, χρησιμοποιώντας τη σύμβαση άθροισης, της οποίας η παρουσία των επαναλαμβανόμενων δεικτών υποδηλώνει την άθροισή τους:

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=0}^3 a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

Τα τετρανύσματα ακολουθούν κανόνες που έχουμε και για τα διανύσματα. Από αυτούς, πολύ σημαντικό είναι το *εσωτερικό γινόμενο* (*scalar product*), που συμβολίζεται $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Ικανοποιούνται όλοι οι μαθηματικοί κανόνες για το εσωτερικό γινόμενο, και εφόσον τα τετρανύσματά μας γράφονται ως $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ και $\mathbf{b} = b^\beta \mathbf{e}_\beta$, τότε

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \cdot (b^\beta \mathbf{e}_\beta) = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) a^\alpha b^\beta = \eta_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$$

Όπου το $\eta_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$ ονομάζεται *μετρική* (*metric*) του επίπεδου χωροχρόνου, και καθορίζεται απαιτώντας το τετράγωνο της απόστασης να ισούται με $(\Delta s)^2 = \Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x} = \eta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta$. Τότε ισχύει $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$ και έχουμε:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Η μετρική αναπαρίσταται, λοιπόν, από έναν συμμετρικό διαγώνιο πίνακα και χρησιμοποιώντας την μπορούμε να γράψουμε το στοιχείο μήκους επίπεδου

χωροχρόνου, ως εξής:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (13)$$

Εφόσον, έχουμε εισάγει την έννοια των τετρανυσμάτων, προχωράμε στην περιγραφή της κίνησης ενός σωματιδίου στον «χωροχρόνο», δηλαδή θα μελετήσουμε την κινηματική στην ειδική σχετικότητα. Σύμφωνα με τα παραπάνω το τετράνυσμα της μετατόπισης ορίζεται ως

$$\mathbf{x} = (ct, x, y, z)$$

Θεωρούμε, τώρα, ένα σωματίδιο που ακολουθεί μία χρονοειδή κοσμική γραμμή στο χωροχρόνο. Για να περιγράψουμε την καμπύλη που διαγράφει το σωματίδιο στις τέσσερις διαστάσεις, μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμος ο ιδιόχρονος τ . Έτσι, η κοσμική γραμμή θα περιγράφεται από τις: $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$.

Η *τετραταχύτητα* (*four-velocity*) είναι το τετράνυσμα $\mathbf{u}$, που ορίζεται ως

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (14)$$

και, από τον ορισμό της, η $\mathbf{u}$ θα είναι εφαπτομενική σε κάθε σημείο της κοσμικής γραμμής όπως την ακολουθεί το σωματίδιο. Εισάγοντας το τετράνυσμα της μετατόπισης και χρησιμοποιώντας την (11), η τετραταχύτητα θα πάρει την παρακάτω μορφή:

$$u^\alpha = (c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}) = (c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau}) \Rightarrow \boxed{u^\alpha = (c\gamma, \gamma\vec{V})} \quad (15)$$

Μια άμεση συνέπεια της εξίσωσης της τετραταχύτητας παραπάνω, είναι η κανονικοποίησή της, δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{u}$ με τον εαυτό του

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -c^2\gamma^2 + \gamma^2 V^2 = \gamma^2(V^2 - c^2) = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1} (V^2 - c^2) = -c^2$$

Παίρνοντας από τις φυσικές μονάδες το $c = 1$, γράφουμε την τετραταχύτητα όπως παρακάτω, και βλέπουμε πως είναι πάντα ένα μοναδιαίο χρονοειδές τετράνυσμα.

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1} \quad (16)$$

Το επόμενο βήμα είναι να δούμε την *τετρα-επιτάχυνση* (*four-acceleration*) $\mathbf{a}$, που ορίζεται ως

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \quad (17)$$

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα ισχύει τόσο στην σχετικιστική όσο και στη μη σχετικιστική μηχανική, δηλαδή πώς ένα σώμα που βρίσκεται σε ηρεμία θα παραμένει στην ηρεμία ή θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, εφόσον δεν του ασκούνται δυνάμεις:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = 0$$

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την εξίσωση κίνησης, ώστε να έχει την ίδια μορφή σε όλα τα διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς, θα την γράψουμε ως εξής: $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$, όπου με m συμβολίζουμε τη *μάζα ηρεμίας* (*rest mass*) και το $\mathbf{f}$, αντίστοιχα, είναι η *τετρα-δύναμη* (*four-force*). Από την κανονικοποίηση της τετρα-ταχύτητας προκύπτει το παρακάτω, το οποίο μας δείχνει πως υπάρχουν μόνο τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις κίνησης, όπως και στη νευτώνεια μηχανική,

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = m \frac{d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{d\tau} \Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Έτσι, οδηγούμαστε τώρα να δούμε τι γίνεται στη σχετικιστική μηχανική με την ενέργεια και την ορμή ενός σώματος. Ορίζουμε την *τετρα-ορμή* (*four-momentum*) και μορφοποιούμε την εξίσωση κίνησης.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \quad \& \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{f}$$

Από τον ορισμό της ορμής γράφουμε τις συνιστώσες της σύμφωνα με την (15), και άρα η τετρα-ορμή αναπαριστάται και ως: $p^\alpha = (m\gamma, m\gamma\vec{V})$. Ακόμα προκύπτει, από τον ορισμό και την κανονικοποίηση στην τετρα-ορμή,

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2 \quad (18)$$

Για ταχύτητες $V \ll 1$ οι συνιστώσες της τετρα-ορμής γράφονται

$$\mathbf{p} = (m + \frac{1}{2}m\vec{V}^2 + \dots, m\vec{V} + \dots)$$

Δηλαδή, η p^t θα ανάγεται στην κινητική ενέργεια προσθέτοντας τη μάζα ηρεμίας και το $\vec{p}$, αντίστοιχως στην ορμή της κλασσικής μηχανικής. Συνεπώς, μπορούμε να το ονομάσουμε και *τετράνυσμα ενέργεια-ορμής*, γράφοντας

$$\mathbf{p} = (E, \vec{p}). \quad (19)$$

Χρησιμοποιώντας την κανονικοποίηση, από παραπάνω, θα λύσουμε ως προς την ενέργεια για την σχέση

$$\boxed{E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}.} \quad (20)$$

1.1.6 Η Αρχή Μεταβολών και Φωτεινές Ακτίνες

Όπως στη νευτώνεια μηχανική υπάρχει η αρχή ακρότατης δράσης για την περιγραφή της κίνησης ενός ελεύθερου σωματιδίου, έτσι αντίστοιχα η σχετικιστική μηχανική έχει την αρχή μεταβολών (variational principle), όπου για ένα ελεύθερο σωματίδιο που διαγράφει κοσμική γραμμή ανάμεσα σε δύο χρονοειδώς διαχωρισμένα σημεία, παρουσιάζει ακρότατο στον ιδιοχρόνο μεταξύ τους. Έστω αυτά τα σημεία είναι τα A και B στο χωροχρόνο για μια τυχαία καμπύλη, η τιμή του ιδιοχρόνου είναι:

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B [dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2]^{1/2} \quad (21)$$

Έστω, τώρα, μια παράμετρος σ που θα ορίζεται στο $[0, 1]$, για την κοσμική γραμμή που περνάει από το A και B , η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως

$$\tau_{AB} = \int_0^1 d\sigma \left[\left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (22)$$

Αυτό που θέλουμε, είναι εκείνη η καμπύλη που το τ_{AB} θα παρουσιάζει ακρότατο, δηλαδή αρκεί να αναζητήσουμε την κοσμική γραμμή για την οποία μια απειροστή μεταβολή $\delta x^\alpha(\sigma)$ θα οδηγήσει σε μηδενική μεταβολή του ιδιοχρόνου. Το πρόβλημα αυτό είναι ανάλογο με τη Λαγκραζιανή στην κλασσική μηχανική, μιας και οι εξισώσεις Lagrange δίνουν την αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακρότατου σημείου. Άρα, οι εξισώσεις είναι

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dx^\alpha/d\sigma)} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (23)$$

και η Λαγκραζιανή

$$\mathcal{L} = \left[\left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (24)$$

Επιλύοντας την (23) για τα διάφορα x^α θα πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης για ένα ελεύθερο σωματίδιο στον επίπεδο χωροχρόνο:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (25)$$

Συνοψίζοντας για την ειδική σχετικότητα, θα αναφερθούμε στις *φωτεινές ακτίνες* (*light rays*). Δηλαδή, θα ασχοληθούμε με σωματίδια μηδενικής μάζας που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός, $V = 1$, και κατά μήκος φωτοειδών κοσμικών γραμμών. Υπάρχουν διάφορα τέτοια σωματίδια, μας απασχολούν όμως, τα φωτόνια.

Στην προκειμένη, ο ιδιόχρονος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν παράμετρος, αφού η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων στην κοσμική γραμμή θα είναι μηδενική. Γι αυτό, για την τυχαία καμπύλη, $x = t$ χρησιμοποιούμε την παράμετρο λ και γράφουμε

$$x^\alpha = u^\alpha \lambda,$$

που το $u^\alpha = (1, 1, 0, 0)$, και να ισχύει $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$. Όμως, το $\mathbf{u}$ είναι φωτοειδές διάνυσμα και από την κανονικοποίησή του έχουμε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$. Για την παράμετρο, ακόμα, πρέπει να ισχύει και η εξίσωση της κίνησης, η οποία είναι όμοια με εκείνη των σωματιδίων,

$$p^\mu = \frac{du^\mu}{d\lambda}.$$

Όπως και τα σωματίδια, έτσι και τα φωτόνια έχουν ενέργεια και ορμή, συνδέονται βέβαια με την συχνότητα διάδοσης τους, $E = \hbar\omega$. Ακόμα, για την ορμή $\vec{V} = \vec{p}/E$ και από το $|\vec{V}| = 1$, για ένα φωτόνιο $|\vec{p}| = E$ και τότε η ορμή θα γράφεται

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

όπου το $\vec{k}$ ονομάζεται *κυματάνυσμα* με μέτρο $|\vec{k}| = \omega$. Και τελικά οι συνιστώσες της τετρα-ορμής ενός φωτονίου σε αδρανειακό σύστημα θα εκφραστούν ως

$$p^\alpha = (E, \vec{p}) = (\hbar\omega, \hbar\vec{k}) = \hbar k^\alpha,$$

με το $\mathbf{k}$ θα είναι το *τετρακυματάνυσμα* και προφανώς θα ισχύει, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0$. Συγκρίνοντας με την (18), παρατηρούμε πως τα φωτόνια έχουν μηδενική μάζα ηρεμίας, όπως και συμβαίνει με όλα τα σωματίδια που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός.

1.2 Γενική Σχετικότητα

Η θεωρία της ειδικής σχετικότητας, αποτελεί μία επιτυχημένη θεωρία για την περιγραφή σωμάτων σε καθολικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Εισάγοντας, όμως, μια νέα θεώρηση της βαρύτητας, θα προχωρήσουμε στη γενική θεωρία της σχετικότητας και παρακάτω θα τη μελετήσουμε.

Μια θεμελιώδης αρχή στη θεωρία της γενικής σχετικότητας είναι η *αρχή της ισοδυναμίας* (*equivalence principle*), που σύμφωνα με αυτήν τα αποτελέσματα

πειραμάτων σε μικρά εργαστήρια δεν επηρεάζονται από το εκάστοτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, και άρα η βαρυτική μάζα και η αδρανειακή μάζα είναι ποσότητες ίσες. Δηλαδή, φαινόμενα τα οποία συμβαίνουν σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς, παρατηρούνται και πρέπει να είναι τα ίδια αν αυτό ήταν ακίνητο -μέσα σε ένα ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο.

Η βαρύτητα περιγράφεται σαν το αποτέλεσμα της καμπυλότητας του χωροχρόνου, η οποία προκαλείται επειδή η μάζα και η ενέργεια επηρεάζουν την τοπική γεωμετρία.

1.2.1 Καμπυλωμένος Χωροχρόνος

Για να μπορέσει ο Einstein να περιγράψει τον καμπυλωμένο χωροχρόνο, πρέπει να υπάρξει μία εξίσωση που να συσχετίζει την καμπυλότητα αυτή με την πηγή, δηλαδή η μάζα ή η ενέργεια, η οποία την προκαλεί. Αυτή είναι η εξίσωση *Einstein* (*Einstein equation*) και είναι μία θεμελιώδης εξίσωση της κλασικής φυσικής και βασική εξίσωση της γενικής σχετικότητας, και παίρνει τη μορφή:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi GT_{\alpha\beta} \quad (26)$$

Η παραπάνω εξίσωση δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα διπλωματική, οπότε και δε θα προχωρήσουμε στην ανάλυσή της. Μας ενδιαφέρει η μετρική $g_{\alpha\beta}$ η οποία θα είναι λύση της (26),

$$\boxed{ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta.} \quad (27)$$

Η μετρική $g_{\alpha\beta}(x)$ είναι ένας συμμετρικός και εξαρτημένος από την εκάστοτε θέση τανυστής. Εμείς έχουμε ήδη δει τη μετρική Minkowski από τον επίπεδο χωροχρόνο της ειδικής σχετικότητας, $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στις εξισώσεις που καθορίζουν την κίνηση των σωματιδίων και των φωτεινών ακτίνων στον καμπυλωμένο χωροχρόνο. Στην προκειμένη θα μιλήσουμε για δοκιμαστικά τέτοια σωματίδια, τα οποία στη γενική σχετικότητα αναφέρονται ως ελεύθερα ή που εκτελούν ελεύθερη πτώση.

1.2.2 Γεωδαιτικές Εξισώσεις

Όπως και στην ειδική, έτσι και στην γενική σχετικότητα τα σωματίδια κινούνται σε κοσμικές γραμμές που είναι χρονοειδείς ή φωτοειδείς παντού. Παρόλο που βλέπουμε να μην έχουν ιδιαίτερες διαφορές, η κίνηση του ελεύθερου σωματιδίου στον καμπυλωμένο χωροχρόνο διαφοροποιείται από εκείνης ενός σωματιδίου. Ο ιδιόχρονος καθορίζεται από τη μετρική:

$$\tau_{AB} = \int_A^B [-g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta]^{1/2} \quad (28)$$

Για την περιγραφή της κίνησης παίρνουμε αντίστοιχες εξισώσεις οι οποίες είναι οι γεωδαιτικές εξισώσεις (*geodesic equations*).

Στο κομμάτι που μιλήσαμε για την αρχή των μεταβολών και την παρουσία ακρότατου στον ιδιόχρονο μεταξύ δύο χρονοειδώς χωρισμένων σημείων και καταλήξαμε μέσω της εξίσωσης Lagrange στην (25), πως είναι η εξίσωση κίνησης ελεύθερου σωματιδίου, ελεύθερο στον επίπεδο χωροχρόνο. Μελετάται το ίδιο για, τώρα, δοκιμαστικό σωματίδιο που κινείται μέσα στον χωροχρόνο που περιγράφεται από την μετρική $g_{\alpha\beta}(x)$ και το στοιχείο μήκους (27).

Θα ξεκινήσουμε, θεωρώντας ένα απλό παράδειγμα για γεωδαιτικές του δισδιάστατου χώρου πριν γενικεύσουμε. Για την εύρεση χρονοειδών γεωδαιτικών στον χωροχρόνο, ξεκινάμε από τον ιδιόχρονο (28). Η κοσμική γραμμή περιγράφεται παραμετρικά από τις τέσσερις συντεταγμένες του x^α συναρτήσει της παραμέτρου σ , που έχουμε δει μεταβάλλεται από $[0, 1]$ στα αντίστοιχα άκρα A και B .

$$\tau_{AB} = \int_0^1 d\sigma \left(-g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right)^{1/2}$$

Αντίστοιχα εκείνες οι κοσμικές γραμμές που ο ιδιόχρονος παρουσιάζει ακρότατο ικανοποιούν τις εξισώσεις Lagrange (23) για τη Λαγκραζιανή,

$$\mathcal{L} \left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha \right) = \left(-g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

Και σε κάποιο τυχαίο καμπυλωμένο χωροχρόνο η γενική μορφή των εξισώσεων, που θα ονομάζεται γεωδαιτική εξίσωση, θα είναι,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}. \quad (30)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ουσιαστικά τέσσερις εξισώσεις, μία για κάθε τιμή του δείκτη α . Τα $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ είναι τα σύμβολα *Christoffel* (*Christoffel symbols*), τα οποία προκύπτουν από την μετρική και τις πρώτες παραγώγους της.

$$g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (31)$$

Όταν η μετρική είναι διαγώνια, ο υπολογισμός τους είναι αρκετά απλός καθώς θα υπάρχει μόνο ένας όρος στο άθροισμα στο αριστερό μέλος. Εάν δεν είναι διαγώνια, τότε χρειάζεται και το αντίστροφος πίνακας της μετρικής.

Η γεωδαιτική αποτελείται από τέσσερις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερου βαθμού, όπου μας δίνουν τις συντεταγμένες και τη θέση του δοκιμαστικού σωματιδίου στον τετραδιάστατο χωροχρόνο, συναρτήσει του ιδιόχρονου. Αν είναι γνωστές η αρχική θέση και αρχική τετρα-ταχύτητα, χρησιμοποιώντας τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης, είναι δυνατόν να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

καθώς και η θέση και τετρα-ταχύτητα σε μεταγενέστερες στιγμές του ιδιο-χρόνου. Στην ανάλυση της γεωδαιτικής μας βοηθάνε και οι νόμοι διατήρησης που προκύπτουν μέσα από συμμετρίες στον χωροχρόνο.

Μια απλή αναφορά για να διακρίνουμε κάποια συμμετρία στο χωροχρόνο, είναι η μετρική να παρουσιάζει ανεξαρτησία ως προς μία συντεταγμένη, έστω x^1 , δηλ.

$$\partial_1 g(x) = 0,$$

τότε το διάνυσμα με συνιστώσες $\xi^\alpha = (0, 1, 0, 0)$, ονομάζεται *διάνυσμα Killing* (*Killing vector*) και αποτελεί γεννήτορα της συμμετρίας. Η ύπαρξη συμμετρίας μας οδηγεί σε μια αναλλοίωτη ποσότητα πάνω σε μια γεωδαιτική. Η αναλλοίωτη ποσότητα είναι η,

$$\xi \cdot \mathbf{u} = \text{constant}. \quad (32)$$

1.2.3 Μια αναφορά στη μετρική Schwarzschild

Για να αποκτήσουμε μία εικόνα των όσων έχουν αναφερθεί θα γίνει μια αναφορά σε κάποιον απλούστερο καμπυλωμένο χωροχρόνο, μιας και αυτοί παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη συμμετρία. Ο πιο σημαντικός είναι της γεωμετρίας Schwarzschild, όπου συνιστά των εξωτερικό χώρο σφαιρικής πηγής καμπυλότητας στον κενό χώρο, όπως για παράδειγμα, ένα σφαιρικό άστρο και όχι μόνο. Το όνομά της οφείλεται στον Karl Schwarzschild που το 1916 έλυσε την εξίσωση Einstein, αποτελώντας κιόλας μία γεωμετρία που προσεγγίζει με πολύ καλή ακρίβεια την καμπυλότητα στο εξωτερικό του Ήλιου και χρησιμοποιείται ευρέως.

Το στοιχείο μήκους της γεωμετρίας στο κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και με $c \neq 1$ περιγράφεται ως εξής,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (33)$$

Οι συντεταγμένες (t, r, θ, ϕ) ονομάζονται *συντεταγμένες Schwarzschild* και αντίστοιχα η μετρική $g_{\alpha\beta}(x)$ θα είναι η *μετρική Schwarzschild*. Η μετρική έχει χρονική ανεξαρτησία, δηλαδή του t , και το αντίστοιχο διάνυσμα Killing έχει μορφή $\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0)$.

Εφόσον μιλάμε για σφαίρα, υπάρχει και σφαιρική συμμετρία. Τότε, η μετρική κατά την κατεύθυνση της γωνία ϕ παραμένει αμετάβλητη για στροφές γύρω από τον άξονα z . Και το αντίστοιχο διάνυσμα Killing αυτής της συμμετρίας είναι, $\eta^\alpha = (0, 0, 0, 1)$.

Εάν ο λόγος $GM/c^2 r$ είναι αρκετά μικρός, τότε ο συντελεστής dr^2 στο στοιχείο μήκους μπορεί να αναπτυχθεί ως $(1 + \frac{2GM}{c^2 r})$, και αυτό συνεπάγεται

πως η μετρική του ds^2 έχει ίδια μορφή με εκείνη για στατικό ασθενές βαρυτικό πεδίο.

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi(x^i)}{c^2} \right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi(x^i)}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Και ακόμα, πως για ακτίνα $r = 2GM/c^2$ στη μετρική μηδενίζεται ο όρος dt^2 και απειρίζεται ο dr^2 . Η συγκεκριμένη αποκαλείται και *ακτίνα Schwarzschild* και αποτελεί χαρακτηριστικό μέγεθος στη μελέτη των αστρικών αντικειμένων.

Για τη μελέτη των χρονοειδών γεωδαιτικών των τροχιών δοκιμαστικών σωματιδίων που τις ακολουθούν, μας διευκολύνουν οι νόμοι διατήρησης. Πιο συγκεκριμένα εκείνοι της ενέργειας και της στροφορμής και ισχύουν μιας και η μετρική έχει σφαιρική συμμετρία και είναι ανεξάρτητη ως προς το χρόνο. Όπως έχουμε αναφέρει οι συμμετρίες μας υποδηλώνουν την ύπαρξη αναλλοίωτων ποσοτήτων, οι οποίες σύμφωνα με τη θεωρία είναι οι $\xi \cdot \mathbf{u}$ και $\eta \cdot \mathbf{u}$, όπου το $\mathbf{u}$ είναι η τετρα-ταχύτητα. Αντίστοιχα θα ονομάσουμε τις ποσότητες e και ℓ , και για τη γεωμετρία Schwarzschild έχουμε τις σχέσεις για τη διατήρηση ενέργειας και στροφορμής ανά μονάδα μάζας ηρεμίας.

$$\begin{aligned} e = -\xi \cdot \mathbf{u} &= \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau}, \\ \ell = \eta \cdot \mathbf{u} &= r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned} \tag{34}$$

Η γεωμετρία Schwarzschild έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες και εφαρμογές τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά για την μελέτη τροχιών δοκιμαστικών σωματιδίων και φωτεινών ακτίνων.

1.2.4 Μελανές Οπές

Μία καλή εφαρμογή της γεωμετρίας Schwarzschild είναι η περίπτωση της απλής μελανής οπής, με άλλα λόγια εκείνη που δεν έχει περιστροφή ούτε φορτίο.

Μέσω των συντεταγμένων Eddington-Finkelstein, όπου ο χρόνος ορίζεται εκ νέου ως, $t = v - r - 2M \log \left\| \frac{r}{2M} - 1 \right\|$, με το στοιχείο μήκους να μετασχηματίζεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι κατάλληλο να περιγράψει την φυσική στο εσωτερικό, κατά μήκος και στο εξωτερικό της ακτίνας Schwarzschild.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Χρήσιμο για την κατανόηση της γεωμετρίας είναι αν δούμε την συμπεριφορά ακτίνων φωτός σε σχέση με τη μελανή οπή. Όταν είναι μακριά από αυτήν, δηλαδή $r > 2M$, οι φωτεινές ακτίνες κινούνται ακτινικά και προς τα έξω. Αν

το $r < 2M$ τότε κινούνται ακτινικά προς το κέντρο της μελανής οπής. Ενώ, η καμπύλη $r = 2M$, δεν περιγράφει καμπύλες που κινούνται προς τα μέσα ή προς τα έξω, αλλά στατικές καμπύλες. Η επιφάνεια που δημιουργεί η τελευταία, ονομάζεται και *ορίζοντας γεγονότων*.

Ο ορίζοντας στο χωροχρόνο, σαν γεωμετρική επιφάνεια, έχει την ιδιότητα της μονής διέλευσης. Ο ορίζοντας είναι στατικός. Δηλαδή, δεν έχει σημασία με ποιον τρόπο κινείται ένα δοκιμαστικό σωματίδιο όταν βρίσκεται στον ορίζοντα γεγονότων, δε θα μπορέσει ποτέ να διαφύγει τη βαρυτική έλξη της μελανής οπής, ακόμα και το φως.

Αυτά αποτελούν την περιγραφή μιας απλής περίπτωσης μελανής οπής. Η γεωμετρία Schwarzschild αποτελεί ένα βασικό μοντέλο και μια εξαιρετική προσέγγιση της γεωμετρίας που υφίσταται στο εξωτερικό ενός μη περιστρεφόμενου άστρου ή μια μη περιστρεφόμενης μελανής οπής. Οι πραγματικές μελανές οπές, όπου εισάγονται περιστροφές και ηλεκτρικό φορτίο, είναι πιο σύνθετες στην περιγραφή τους. Μια καλύτερη περιγραφή της γεωμετρίας του καμπυλωμένου χωροχρόνου από ένα περιστρεφόμενο σώμα είναι εκείνη της οικογένειας γεωμετριών από τον Kerr.

2 Μετρική Kerr

Ο Roy Kerr ανακαλύπτει αυτές τις «οικογένειες» το 1963, με τα μέλη να εξαρτώνται όχι μόνο από τη μάζα M , όπως προηγουμένως στη μετρική Schwarzschild, αλλά και από τη στροφορμή J . Οι μελανές οπές Kerr αποτελούν μία γενίκευση των μελανών οπών Schwarzschild.

Η μετρική Kerr για περιστρεφόμενη μελανή οπή μάζας M και στροφορμής J , με $c = G = 1$, περιγράφεται από το στοιχείο μήκους,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (35)$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) & 0 & 0 & - \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ - \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & 0 & \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (36)$$

Όπου τα a, ρ^2 και Δ ορίζονται ως

$$a \equiv J/M, \quad \rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2.$$

Η αντίστροφη μορφή της μετρικής,

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mar^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right) & 0 & 0 & -\frac{2Mar}{\rho^2 \Delta} \\ 0 & \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{2Mar}{\rho^2 \Delta} & 0 & 0 & \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Οι συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται, καλούνται *συντεταγμένες Boyer-Lindquist* και είναι της μορφής (t, r, θ, ϕ) . Την παράμετρο a την αποκαλούμε *παράμετρο Kerr* και έχει γεωμετροποιημένες μονάδες σε διαστάσεις μήκους, όπως αντίστοιχα και η μάζα. Όταν το $a = 0 (M \neq 0)$ η μετρική ανάγεται στη μετρική Schwarzschild, άρα η μελανή οπή Schwarzschild αποτελεί μία ειδική περίπτωση μελανής οπής με στροφορμή μηδέν, που περιλαμβάνεται στην οικογένεια Kerr. Και για $M \rightarrow 0 (a \neq 0)$, η μετρική αποκτά τη μορφή ενός τοπικά επίπεδου χωροχρόνου.

Άλλες ιδιότητες της μετρικής, που προκύπτουν από το στοιχείο μήκους (35), είναι ότι η μετρική είναι ασυμπτωτικά επίπεδη. Αν έχουμε δηλαδή ακτίνα αρκετά μεγαλύτερη της μάζας ή της παραμέτρου Kerr, δηλαδή $r \rightarrow \infty$, όπου από την μορφή που παίρνει η μετρική καταλήγουμε πως η Kerr τείνει στη γεωμετρία του επίπεδου χωροχρόνου μακριά από τη μελανή οπή. Το στοιχείο μήκους για κάθε συντελεστή κρατάει μόνο τους πρωτεύοντες όρους για τα μεγάλα r , και σε αυτή την περίπτωση γίνεται,

$$ds^2 \approx - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 \\ + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \frac{4Ma}{r^2} \sin^2 \theta (rd\phi)dt + \dots$$

Η μετρική Kerr έχει δύο συμμετρίες, την στατική συμμετρία, δηλαδή είναι ανεξάρτητη του χρόνου t και την ιδιότητα πως είναι αξονικά συμμετρική, δηλαδή είναι ανεξάρτητη του ϕ . Από αυτές παίρνουμε δύο διανύσματα Killing ως εξής,

$$\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0), \quad (38\alpha')$$

$$\eta^\alpha = (0, 0, 0, 1). \quad (38\beta')$$

Η μετρική Kerr δεν έχει σφαιρική συμμετρία, αλλά κατοπτρική. Η μετρική παραμένει αναλλοίωτη κάτω από κατοπτρισμούς για $\theta = \pi/2$, το οποίο είναι το επίπεδο του ισημερινού.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό της γεωμετρίας Kerr είναι οι ιδιομορφίες που υπάρχουν. Μία από αυτές συμβαίνει για το $\rho^2 = 0$, που ισχύει μόνο

όταν το $r = 0$ και το $\theta = \pi/2$, ενώ η άλλη, όταν έχουμε $\Delta = 0$. Στην πρώτη περίπτωση ο χωροχρόνος θα έχει άπειρη καμπυλότητα, οπότε είναι χρήσιμο να την αντιληφθούμε ως μια πραγματική ιδιομορφία του χωροχρόνου Kerr, που ονομάζεται *ιδιομορφία δακτυλίου (ring singularity)*, καθώς αποτελεί τον δακτύλιο $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, φαίνεται και στο Σχήμα 4. Το εσωτερικό αυτού του δίσκου, για $r = 0$ και $\theta \neq \pi/2$, είναι μια ιδιομορφία συντεταγμένων που αν κάποιος παρατηρητής βρεθεί εκεί, το θ αποκτά μία ασυνέχεια. Η δεύτερη σημαντική ιδιομορφία εμφανίζεται στο Δ , και αποτελεί ιδιομορφία συντεταγμένων, οπότε και μπορούμε να την μελετήσουμε.

$$\Delta = 0 \Rightarrow r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{για } a^2 \leq M^2, \quad r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

Μπορούμε να πούμε πως η ακτίνα r_+ αντιστοιχεί σε ορίζοντα γεγονότων, κάνοντας έτσι τη μετρική Kerr να είναι μελανή οπή. Αυτό αποδεικνύεται ακόμα, αν αναλογιστούμε πως καθώς $a \rightarrow 0$ τότε $r_+ \rightarrow 2M$, $r_- \rightarrow 0$, δηλαδή πλησιάζει τον ορίζοντα γεγονότων για μελανή οπή Schwarzschild. Θεωρώντας πάντα ότι $a \leq M$. Άρα, η στροφορμή J περιορίζεται από το τετράγωνο της μάζας της μελανής οπής. Οι μελανές οπές Kerr που έχουν την οριακή τιμή για την παράμετρο $a = M$ ($J = M^2$) ονομάζονται *οριακές μελανές οπές Kerr*. Φαίνεται ότι καθώς εισέρχεται ύλη στη μελανή οπή, θα συσσωρεύεται σε μορφή δίσκου γύρω από το σώμα, ο οποίος αποκαλείται δίσκος συσώρευσης. Μέσω διάφορων μηχανισμών διάχυσης προκαλείται μείωση της ενέργειας και της στροφορμής, με τελικό αποτέλεσμα την κατάληξη, με αργό ρυθμό και σπειροειδή τροχιά, στη μελανή οπή. Η εισερχόμενη ύλη διαθέτει στροφορμή, άρα προκαλείται αύξηση της ολικής στροφορμής J , προσεγγίζοντας έτσι την οριακή τιμή. Από ανάλυση των δίσκων συσώρευσης φαίνεται η τιμή να είναι περίπου $a = 0.998M$, μια τιμή αρκετά κοντά στο όριο. Το οποίο μας δείχνει, πως πολλές μελανές οπές τείνουν να γίνουν οριακές. Οι οριακές μελανές οπές φαίνεται να είναι σημαντικές για την αστροφυσική.

Για $a > M$, η εξίσωση του Δ δεν έχει πραγματικές λύσεις, οπότε η μετρική Kerr δεν περιγράφει μελανή οπή, ο ορίζοντας γεγονότων εξαφανίζεται και υπάρχει πλέον μια «naked» singularity σαν αποτέλεσμα αυτού.

2.1 Ορίζοντας Μελανής Οπής Kerr

Ο ορίζοντας της μελανής οπής Kerr είναι εκείνη η επιφάνεια, η οποία χωρίζει το χωροχρόνο σε δύο τμήματα. Υπάρχουν φωτοειδείς καμπύλες που διαφεύγουν στο άπειρο στο ένα τμήμα, ενώ στο άλλο καθίσταται αδύνατη η διαφυγή τους, με αποτέλεσμα ένας εξωτερικός παρατηρητής να μην λαμβάνει πληροφορία. Στη μελανή οπή Kerr υπάρχουν δύο ορίζοντες, ο ένας στο $r = r_+$ που ονομάζεται *εξωτερικός ορίζοντας (outer horizon)*, και στο $r = r_-$ αντίστοιχα είναι ο

εσωτερικός ορίζοντας (*inner horizon*). Ένα δοκιμαστικό σωματίδιο ή φωτεινή ακτίνα που «πέφτει μέσα» στον εξωτερικό ορίζοντα γεγονότων συνεχίζει την πορεία του προς το εσωτερικό της μελανής οπής, άρα δεν μπορεί να διαφύγει. Οι ορίζοντες χωρίζουν τον χωροχρόνο σε τρεις περιοχές:

- I . $r > r_+$, εδώ η επιφάνεια είναι χρονοειδής, δηλαδή μπορεί και να εισέλθει και να διαφύγει ένα δοκιμαστικό σωματίδιο.
- II . $r_- < r < r_+$, εδώ η επιφάνεια είναι χωροειδής, δηλαδή το σωματίδιο κινείται προς μια κατεύθυνση και δεν μπορεί να διαφύγει.
- III . $r < r_-$, κι εδώ η επιφάνεια είναι χρονοειδής όπως για την I. Στη συγκεκριμένη επιφάνεια εμπεριέχεται και η μοναδικότητα για το $\rho^2 = 0$ που αναφέρουμε παραπάνω πως είναι μία πραγματική μοναδικότητα και δε θα μας απασχολήσει περαιτέρω στην παρούσα εργασία.

Στην περίπτωση της οριακής μελανής οπής Kerr οι δύο ορίζοντες γίνονται ένας και η περιοχή II εξαφανίζεται.

Η επιφάνεια που δημιουργείται στο $r = r_+$ είναι μια τρισδιάστατη φωτοειδής, στατική και αξονικά συμμετρική επιφάνεια της γεωμετρίας Kerr . Για να δείξουμε το παραπάνω, θεωρούμε εφαπτομενικά διανύσματα του $\mathbf{t}$ με τις αντίστοιχες διευθύνσεις για τα t, θ, ϕ να είναι εφαπτομενικές σε επιφάνεια σταθερού r , οπότε έχουμε τις συνιστώσες: $t^\alpha = (t^t, 0, t^\theta, t^\phi)$.

Η επιφάνεια είναι φωτοειδής, αν βρεθεί ένα φωτοειδές διάνυσμα ℓ , εφαπτομενικό. Η συνθήκη $\ell \cdot \ell = 0$ σε συνδυασμό με τις συνιστώσες t^α .

$$\ell \cdot \ell = g_{tt}(\ell^t)^2 + 2g_{t\phi}\ell^t\ell^\phi + g_{\phi\phi}(\ell^\phi)^2 + g_{\theta\theta}(\ell^\theta)^2 = 0 \quad (39)$$

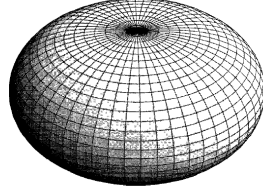
Για $r = r_+$, βάζοντας τις τιμές των $g_{\alpha\beta}$ και κάνοντας πράξεις, έχουμε

$$\left(\frac{2Mr_+ \sin \theta}{\rho_+}\right)^2 \left(\ell^\phi - \frac{a}{2Mr_+}\ell^t\right)^2 + \rho_+^2(\ell^\theta)^2 = 0$$

Η εξίσωση έχει λύσεις μόνο για $\ell^\theta = 0$ και $\ell^\phi = (a/2Mr_+)\ell^t$. Δηλαδή, το μοναδικό φωτοειδές διάνυσμα στην επιφάνεια $r = r_+$ είναι το $\ell^\alpha = (1, 0, 0, \Omega_H)$. Με το Ω_H να ορίζεται ως τη *γωνιακή ταχύτητα* περιστρεφόμενης μελανής οπής.

$$\Omega_H = \frac{a}{2Mr_+}$$

Μπορούμε να λέμε την γωνιακή ταχύτητα Ω_H σαν τη γωνιακή ταχύτητα της μελανής οπής, διότι οι φωτεινές ακτίνες που τον σχηματίζουν περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα Ω_H .



Σχήμα 3: Στο σχήμα παριστάνεται ο ορίζοντας γεγονότων, σαν μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο επίπεδο χώρο που έχει την ίδια εσωτερική γεωμετρία με την τομή $t = \text{constant}$ του ορίζοντα μελανής οπής Kerr. [1]

Εύκολα αποδεικνύεται και ότι η επιφάνεια $r = r_+$ είναι φωτοειδής, αν βρεθούν δύο χωροειδείς, εφαπτομενικές κατευθύνσεις που να είναι ορθογώνιες στο ℓ , αλλά και μεταξύ τους. Και είναι εύκολο καθώς για να είναι μία φωτοειδής επιφάνεια πρέπει το ℓ να είναι κάθετο διάνυσμα στην φωτοειδή επιφάνεια και να είναι ορθογώνιο σε όποιο άλλο εφαπτομενικό της διάνυσμα.

Ενώ, ο ορίζοντας είναι στη σταθερή ακτίνα r_+ σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist, η γεωμετρία, όπως προαναφέρθηκε, δεν είναι σφαιρικά συμμετρική. Αν στο (35) αντικαταστήσουμε $r = r_+$ και πάρουμε μία τομή επιφάνειας στο $t = \text{constant}$, θα έχουμε μία δισδιάστατη επιφάνεια που θα περιγράφεται από το

$$d\Sigma^2 = \rho_+^2(\theta)d\theta^2 + \left(\frac{2Mr_+}{\rho_+(\theta)}\right)^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (40)$$

Άρα, φαίνεται και στο στοιχείο μήκους ότι δεν πρόκειται για σφαίρα. Αυτό μπορούμε να το δούμε και από τις διαφορετικές αποστάσεις που έχουν ο ισημερινός με τους δύο πόλους. Υπολογίζεται η επιφάνεια του ορίζοντα είναι ίση με

$$A = 8\pi Mr_+ = 8\pi M(M + \sqrt{M^2 - a^2}). \quad (41)$$

Ο εσωτερικός ορίζοντας, $r = r_-$, είναι ένας ορίζοντας Cauchy (Cauchy horizon) και ο οποίος είναι ασταθής. Οτιδήποτε που περνάει μέσα από τον εσωτερικό ορίζοντα έχει ως αποτέλεσμα την εκθετική αύξηση αυτού στο σημείο που συναντάει τον εξωτερικό. Κάτι το οποίο να μην είναι υπαρκτό στις αστροφυσικές μελανές οπές.

Καθώς διέρχεται ένα σωματίδιο-ακτινοβολία στον ορίζοντα Cauchy φαίνεται να υπάρχουν closed timelike curves (κλειστές χρονοειδείς καμπύλες). Πιθανότατα, περισσότερες πληροφορίες για την φύση του εσωτερικού ορίζοντα $r = r_-$ να βρίσκεται στις μελέτες των βαρυτικών κυμάτων.

2.1.1 Frame Dragging

Καθώς η μελανή οπή Kerr περιγράφει περιστρεφόμενες μελανές οπές, συμβαίνει ένα φαινόμενο. Για την καλύτερη κατανόηση του φαινομένου, έστω ένας παρατηρητής ZAMO (zero angular momentum observer), δηλαδή ένας παρατηρητής με μηδενική στροφορμή που κινείται προς τη μελανή οπή. Η ταχύτητα του κατά την κατεύθυνση ϕ θα είναι μηδενική, οπότε $l = u^\alpha \cdot (\partial\phi)_\alpha = 0$. Για τον παρατηρητή αυτόν, ορίζεται η γωνιακή ταχύτητα,

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{u^\phi}{u^t}.$$

Για έναν ZAMO, η γωνιακή ταχύτητα του εξαφανίζεται για $r \rightarrow \infty$, όπου ο χωροχρόνος για τη μετρική Kerr γίνεται επίπεδος. Για πεπερασμένες τιμές του r , αντίθετα έχουμε,

$$u^\phi \neq 0 \quad \rightarrow \quad \Omega \neq 0.$$

Πράγματι, παρατηρούμε πως καθώς ο παρατηρητής κατευθύνεται προς τη μελανή οπή από το άπειρο, θα αποκτά και εκείνος γωνιακή ταχύτητα, σαν να τον παρασέρνει η μελανή οπή,

$$l = g_{\phi\phi}u^\phi + g_{\phi t}u^t = 0 \Rightarrow u^\phi = -\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}}u^t.$$

Τότε,

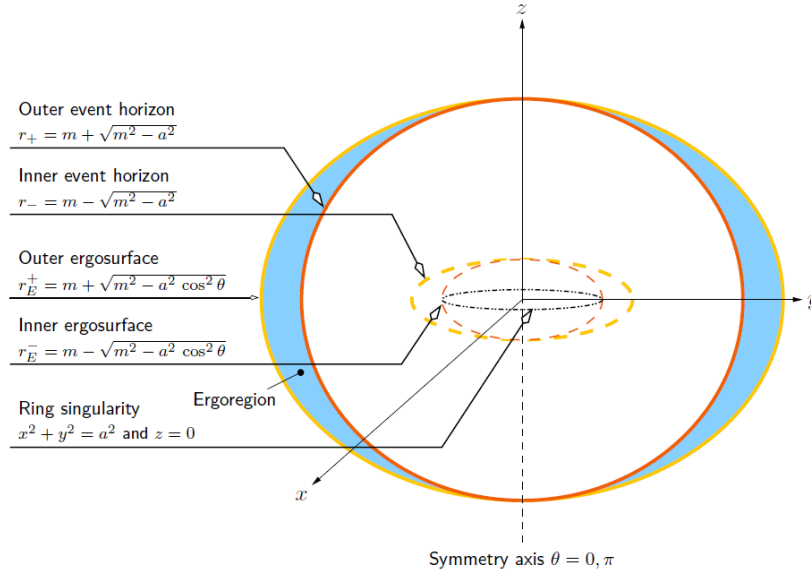
$$\Omega = -\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}}.$$

Θα εισάγουμε τα αντίστοιχα $g_{\alpha\beta}$ από την (36), πρώτα όμως θα κάνουμε μία αλλαγή στη μορφή που εκφράζουμε το $g_{\phi\phi}$, η οποία θα αποδειχθεί και χρήσιμη μετέπειτα,

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= (r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2a^2 Mr \sin^4 \theta}{\rho^2} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [\rho^2(r^2 + a^2) + 2Ma^2r \sin^2 \theta] \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2(1 - \sin^2 \theta))(r^2 + a^2) + 2a^2 Mr \sin^2 \theta] \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta (r^2 - 2Mr + a^2)] \Rightarrow \\ g_{\phi\phi} &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta]. \end{aligned} \tag{42}$$

$$\Omega = \frac{2aMr}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta} \tag{43}$$

Επειδή $(r^2 + a^2)^2 > a^2 \sin^2 \theta \Delta$, ο παρονομαστής είναι θετικός και αντίστοιχα $\Omega/aM > 0$ για όλες τις τιμές των M και a , το οποίο μας δείχνει πως το Ω θα έχει το ίδιο πρόσημο με τη στροφορμή της μελανής οπής J , άρα ο παρατηρητής κινείται συμπεριστροφικά με εκείνη. Προφανώς, όταν είμαστε στο $r = r_+$ τότε η $\Omega = \Omega_H$ όπως αναφέρεται παραπάνω. Το φαινόμενο αυτό, λοιπόν, ονομάζεται *frame dragging* ή στα ελληνικά μπορούμε να το αναφέρουμε ως *παράσυρση του συστήματος αναφοράς του παρατηρητή*.



Σχήμα 4: Σχηματική τοποθέτηση των οριζόντων, εργόσφαιρας, εργοπεριοχών και τη μοναδικότητα καμπύλωσης στο χωροχρόνο για τη γεωμετρία Kerr. [2]

2.2 Εργόσφαιρα & Εργοπεριοχή

Η γεωμετρία μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής δεν σταματάει στους ορίζοντες. Βλέποντας πως για τη Schwarzschild στον ορίζοντα γεγονότων συμπίπτει και η εναλλαγή του πρόσημου για το g_{tt} , οφείλουμε να δούμε την συμπεριφορά του και για την Kerr. Αν προχωρήσουμε στη λύση του $g_{tt} = 0$ από την (36), παίρνουμε δύο λύσεις για το r ,

$$r_{E\pm} = M^2 \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}.$$

Παρατηρούμε πως το $\sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \geq \sqrt{M^2 - a^2}$, άρα ο εξωτερικός και ο εσωτερικός ορίζοντας βρίσκονται ανάμεσα στα $r_{E\pm}$.

$$r_{E-} \leq r_- \leq r_+ \leq r_{E+}$$

Η αναπαράσταση αυτού φαίνεται στο Σχήμα 4. Ακόμα, εκτός των ορίων $r_{E\pm}$ το g_{tt} έχει αρνητικό πρόσημο, ενώ ανάμεσα θετικό. Όταν βρισκόμαστε στο επίπεδο του ισημερινού οι τιμές είναι

$$r_{E+} = 2M \quad \text{και} \quad r_{E-} = 0.$$

Επομένως, υπάρχει περιοχή μεταξύ των r_+ και r_{E+} , όπου το $g_{tt} > 0$, και ονομάζεται *εργοπεριοχή* (*ergoregion*) και το όριο $r = r_{E+}$ *εργόσφαιρα* (*ergosphere*). Και εφόσον υπάρχουν αυτές οι περιοχές πριν από τον ορίζοντα, υπάρχει και η πιθανότητα ένας παρατηρητής να μπει από την εργόσφαιρα, να εισέλθει στην εργοπεριοχή και μετά να βγει πάλι από την εργόσφαιρα, έχοντας έτσι αποφύγει τον ορίζοντα της μελανής οπής, διαφεύγοντας προς το άπειρο.

2.2.1 Στατικός & Ακίνητος Παρατηρητής

Προχωρώντας στη μελέτη του χωροχρόνου γύρω από τη μελανή οπή, ας δούμε την κίνηση κάποιου παρατηρητή. Γενικά στη γενική σχετικότητα ένας παρατηρητής κινείται πάνω σε μία χρονοειδή γραμμή.

Ένας στατικός παρατηρητής (static observer) έχει μόνο τη χρονική συνιστώσα στο διάνυσμα της τετρα-ταχύτητας, $u^\alpha = (u^t, 0, 0, 0)$. Άρα, οι συνιστώσες για τα r, θ και ϕ είναι σταθερές και ισχύει ότι $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$. Η εργόσφαιρα περιγράφεται από χωροειδές διάνυσμα και στη συγκεκριμένη περιοχή ένας στατικός παρατηρητής είναι αδύνατο να υπάρξει και αναγκάζεται να μπει σε κίνηση.

Ο σταθερός παρατηρητής (stationary observer) είναι εκείνος που δεν βλέπει τη μετρική να αλλάζει καθώς κινείται. Παραμένει σταθερός ως προς τα r και θ αλλά δέχεται περιστροφή σύμφωνα με τη φορά της μελανής οπής προς τη τετρα-ταχύτητά του έχει τη μορφή $u^\alpha = u^t(1, 0, 0, \omega)$. Το ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του παρατηρητή και ορίζεται,

$$\omega \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{u^\phi}{u^t}.$$

Ο παρατηρητής αυτός μπορεί να υπάρξει εάν,

$$\begin{aligned} u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} &= (u^t)^2 [g_{tt} + 2\omega g_{t\phi} + \omega^2 g_{\phi\phi}] = -1 \\ &\rightarrow \omega^2 g_{\phi\phi} + 2\omega g_{t\phi} + g_{tt} < 0. \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω έχουμε,

$$\omega_{\pm} = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}} = \frac{-g_{t\phi} \pm \sin\theta\sqrt{\Delta}}{g_{\phi\phi}}.$$

Εκείνο που παρατηρούμε είναι πως ένας τέτοιος σταθερός παρατηρητής δεν μπορεί να υπάρξει όταν το $\Delta \leq 0$, αυτή η περιοχή ορίζεται μεταξύ των οριζόντων. Επίσης, η γωνιακή του ταχύτητα δε μπορεί να παίρνει οποιεσδήποτε τυχαίες τιμές, πρέπει να βρίσκεται μέσα στο εύρος $\omega_- < \omega < \omega_+$. Είναι ακόμα προφανές πως όταν βρισκόμαστε στον ορίζοντα, $r = r_+$, τα $\omega_- = \omega_+$ και αντιστοιχούν στη γωνιακή ταχύτητα του παρατηρητή ZAMO, $\omega_{\pm} = \omega = \Omega_H$.

Στην εργόσφαιρα, το $g_{tt} = 0$ και τότε το $\omega_- = 0$. Εκτός της εργόσφαιρας, για $r \geq r_{E+}$, το $g_{tt} < 0$ και το $g_{\phi\phi} > 0$ τότε τα πρόσημα των ορίων των γωνιακών ταχυτήτων είναι $\omega_- < 0$, $\omega_+ > 0$, το οποίο σημαίνει πως ο σταθερός παρατηρητής κινείται ή κατά την περιστροφή της μελανής οπής (συμπεριστροφικά - corotating) ή αντίστροφα (αντιπεριστροφικά - counterrotating). Και όταν βρίσκεται στην εργοπεριοχή, για $r_+ < r < r_{E+}$, έχουμε $g_{tt} > 0$ και $g_{\phi\phi} > 0$, και αντίστοιχα $\omega_- > 0$, $\omega_+ > 0$, άρα ο παρατηρητής αναγκαστικά κινείται συμπεριστροφικά με τη μελανή οπή.

2.3 Παραγωγή Ενέργειας

Από μία μελανή οπή Kerr είναι δυνατόν να πάρουμε ενέργεια περιστροφής. Για να γίνει αυτό κατανοητό θα αναζητήσουμε την υποθετική περίπτωση της διαδικασίας Penrose (Penrose process) για ένα σωματίδιο (in) που εισέρχεται από την εργόσφαιρα στην εργοπεριοχή και διασπάται σε δύο σωματίδια. Το ένα σωματίδιο διαφεύγει και κινείται προς το άπειρο (out) και το άλλο πέφτει μέσα στον ορίζοντα (bh).

Διεξάγουμε την διαδικασία με τέτοιον τρόπο ώστε το σωματίδιο που διαφεύγει να διαθέτει ενέργεια περισσότερη από το αρχικό που εισήλθε στη μελανή οπή. Υπάρχει διατήρηση της ορμής και της ενέργειας.

$$\mathbf{p}_{in} = \mathbf{p}_{out} + \mathbf{p}_{bh} \rightarrow E_{out} = E_{in} + E_{bh}.$$

Από την ενέργεια του σωματιδίου που φτάνει στο άπειρο $E_{out} = -\mathbf{p}_{out} \cdot \boldsymbol{\xi}$, που το $\boldsymbol{\xi}$ είναι το διάνυσμα Killing.

Αν το σωματίδιο (bh) διέφευγε στο άπειρο, η ενέργεια του θα έπρεπε να είναι θετική και τότε ισχύει το παραπάνω $E_{out} < E_{in}$. Δηλαδή λιγότερη ενέργεια στο εξωτερικό της μελανής οπής σε σχέση με το εσωτερικό. Το (bh), όμως, δε φτάνει ποτέ το εξωτερικό της εργόσφαιρας και επομένως η ποσότητα $-E_{bh}$ αντί για ενέργεια, είναι συνιστώσας χωρικής ορμής επειδή το ξ είναι χωρικό, που μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Εάν τώρα, $E_{bh} < 0$ τότε $E_{out} > E_{in}$ και αυτό δείχνει πως η ενέργεια παράγεται από τη μελανή οπή και προκαλείται ελάττωση της ολικής μάζας της, καθώς και μείωση της στροφορμής. Και με αυτό τον τρόπο εκλύεται ενέργεια από τη μελανή οπή μέσω της διαδικασίας Penrose.

Για την ελάττωση της στροφορμής, θεωρούμε έναν παρατηρητή που κινείται συμπεριστροφικά εκτός της εργόσφαιρας με τετρα-ταχύτητα τον συνδυασμό των διανυσμάτων Killing με την ταχύτητα ενός σταθερού παρατηρητή.

$$\mathbf{u} = u^t(\boldsymbol{\xi} + \omega\boldsymbol{\eta})$$

Καθώς εισέρχεται στην εργόσφαιρα η ενέργειά του πρέπει να είναι θετική,

$$-(\boldsymbol{\xi} + \omega\boldsymbol{\eta}) \cdot \mathbf{p}_{bh} \geq 0 \rightarrow E_{bh} \geq \omega L_{bh}$$

με το L_{bh} να είναι η στροφορμή του εισερχόμενου σωματιδίου στη μελανή οπή. Οι επιτρεπτές τιμές για το ω είναι θετικές μόνο, άρα οι παρατηρητές κινούνται κατά την ίδια φορά με τη μελανή οπή. Για να παραχθεί ενέργεια πρέπει η $E_{bh} < 0 \rightarrow L_{bh} < 0$. Αφού η στροφορμή είναι αρνητική, όταν το σωματίδιο εισέρχεται μειώνει την ολική στροφορμή της μελανής οπής και άρα εξάγεται ενέργεια. Η λήψη της ενέργειας γίνεται μέχρι να μηδενιστεί η στροφορμή.

2.4 Η μετρική Kerr σε συνταγμένες Kerr-Schild

Μέχρι στιγμής περιγράφουμε τον χωροχρόνο Kerr σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist, που όπως παρατηρούμε, δημιουργούνται διάφορες μοναδικότητες και έτσι γίνεται πιο περίπλοκη η λύση της μετρικής. Η ιδιομορφία δακτυλίου είναι singularity που δυσκολεύει την κατανόηση της καθώς η συμπεριφορά γύρω από το $r = 0$, είναι πολύ διαφορετική από αυτή στον επίπεδο χωροχρόνο. Ο Kerr στην αναζήτηση λύσεων της εξίσωσης Einstein για μορφές της μετρικής αλγεβρικά κατάλληλες για ειδικούς χωροχρόνους, επιλέγει η μετρική του να έχει τη μορφή,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + f l_{\alpha} l_{\beta}, \quad (44)$$

όπου, το $\eta_{\alpha\beta}$ είναι ένας επίπεδος χωροχρόνος και το $\mathbf{l}$ ένα μηδενικό διάνυσμα, $g_{\alpha\beta} l_{\alpha} l_{\beta} = 0$.

Αυτή η μορφή της οικογένειας των εξισώσεων είναι η μορφή της μετρικής σε συντεταγμένες Kerr-Schild. Ξεκινώντας από την μορφή της μετρικής σε συντεταγμένες Kerr $(\bar{t}, r, \theta, \bar{\phi})$,

$$\begin{aligned} ds^2 = & -d\bar{t}^2 + dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\phi}^2 - 2a \sin^2 \theta dr d\bar{\phi} + \\ & + \frac{2Mr}{\rho^2} (d\bar{t} + dr - a \sin^2 \theta d\bar{\phi})^2. \end{aligned} \quad (45)$$

Τώρα, οι συντεταγμένες Kerr-Schild $(\bar{t}, x, y, z)$ καθορίζονται από,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos(\bar{\phi} + \arctan \frac{a}{r}) \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin(\bar{\phi} + \arctan \frac{a}{r}) \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Για ευκολία θα ορίσουμε την ποσότητα $\arctan \frac{a}{r} = \alpha$, και έτσι θα εκφράσουμε τα r, a ως,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{r^2 + a^2} \cos \alpha \\ a &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Και τώρα έχουμε,

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta (r \cos \bar{\phi} - a \sin \bar{\phi}) \\ y &= \sin \theta (r \sin \bar{\phi} + a \cos \bar{\phi}) \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας,

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta (r \cos \bar{\phi} - a \sin \bar{\phi}) d\theta + \sin \theta \cos \bar{\phi} dr - \sin \theta (r \sin \bar{\phi} + a \cos \bar{\phi}) d\bar{\phi} \\ dy &= \cos \theta (r \sin \bar{\phi} + a \cos \bar{\phi}) d\theta + \sin \theta \sin \bar{\phi} dr + \sin \theta (r \cos \bar{\phi} - a \sin \bar{\phi}) d\bar{\phi} \\ dz &= -r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr. \end{aligned}$$

Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις για $dx^2 + dy^2 + dz^2$ βλέπουμε πως τελικά η μετρική (45) μπορεί να γραφτεί παρόμοια με την μετρική Minkowski συν μία σταθερή ποσότητα, το οποίο αντικατοπτρίζει την (44). Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} &\equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \\ f &= \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \\ l_\alpha &= \left(1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r} \right). \end{aligned}$$

Με το r να καθορίζεται από,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right).$$

Τελικά, γράφουμε το στοιχείο του μήκους για τη μετρική Kerr σε Kerr-Schild συντεταγμένες,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d\bar{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \\ &+ \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left[d\bar{t} + \frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} \right]^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Η παραπάνω μορφή της μετρικής, όπως αναφέρθηκε, μπορεί να περιγράψει την απεικόνιση της γεωμετρίας για τη μοναδικότητα του δακτυλίου. Θεωρούμε

τα (x, y, z) να περιγράφουν Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στον τρισδιάστατο χώρο με τα (r, θ) να είναι εξισώσεις των συντεταγμένων.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \\ z^2 &= r^2 \cos^2 \theta \\ \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} &= 1, \quad \text{θεωρώντας το } r \text{ σταθερό,} \end{aligned}$$

και

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \sin^2 \theta} - \frac{z^2}{r^2 \cos^2 \theta} = 1, \quad \text{θεωρώντας το } \theta \text{ σταθερό.}$$

Οι επιφάνειες για $r = \text{constant}$ και $\theta = \text{constant}$ φαίνεται να είναι ελλειψοειδής και υπερβολοειδής, αντίστοιχα. Ειδικά, για τη μοναδικότητα $r = 0$ και $\theta = \pi/2$, έχουμε τον δίσκο,

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$$

3 Γεωδαιτικές Εξισώσεις της μετρικής Kerr

Στο παρόν μέρος της εργασίας θα αναλύσουμε τις γεωδαιτικές εξισώσεις της μετρικής Kerr, με σκοπό στη συνέχεια να διαμορφώσουμε τον κατάλληλο κώδικα ώστε να φτάσουμε στην αριθμητική τους ανάλυση, μέσω της μεθόδου Runge-Kutta.

Η ανάλυση των τροχιών δοκιμαστικών σωματιδίων και ακτίνων φωτός στη γεωμετρία Kerr είναι μία διαδικασία πιο περίπλοκη, σε σύγκριση με εκείνες στη γεωμετρία Schwarzschild, εφόσον η συμμετρία δεν είναι σφαιρική αλλά αξονικά συμμετρική, αφού δεν υπάρχει διατήρηση της στροφορμής. Ακόμα, θα επικεντρωθούμε σε τροχιές εκτός του οριζοντα ($r \geq r_+$), καθώς η περιοχή αυτή συσχετίζεται και με αστροφυσικές παρατηρήσεις. Σε αντίθεση με τη Schwarzschild, που λόγω της σφαιρικότητας, εμφανίζεται και τέταρτη εξίσωση που βοηθάει στην επίλυση των γεωδαιτικών και μπορεί να γενικευτεί, η μετρική Kerr δεν είναι τόσο «τυχερή».

Η περίπτωση εκείνη που θα εξετάσουμε πρώτα, βρίσκεται για $\theta = \pi/2$, που είναι το επίπεδο του ισημερινού (equatorial plane), και βέβαια οι τροχιές αυτές δεν αποτελούν γενικό κανόνα καθώς περιορίζονται σε αυτόν.

3.1 Γεωδαιτικές στο επίπεδο του Ισημερινού

Ξεκινάμε, λοιπόν, με το στοιχείο μήκους στο επίπεδο του ισημερινού,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{4aM}{r} dt d\phi + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) d\phi^2. \quad (47)$$

Ύστερα θα υπολογίσουμε τη Λαγκραζιανή.

$$\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha; t) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις συνιστώσες της τετρα-ορμής, όπως ορίζονται,

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta.$$

Και για τη μετρική Kerr (35), γράφουμε τη Λαγκραζιανή ως,

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L} = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{\rho^2}{\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \\ & + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \left(r^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2, \end{aligned}$$

για $\theta = \pi/2$, τότε $d\theta/d\tau = \dot{\theta} = 0$ και προφανώς τα $\sin^2 \theta = 1$ & $\cos \theta^2 = 0$,

$$2\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{4aM}{r} \dot{t} \dot{\phi} + \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M}{r}\right) \dot{\phi}^2. \quad (48)$$

Από την αλλαγή μορφής που κάναμε στο (42), τώρα για $\theta = \pi/2$, έχουμε,

$$g_{\phi\phi} = \frac{1}{r^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta].$$

Τις τροχιές των σωματιδίων μπορούμε να τις περιγράψουμε μέσω των L και E που είναι αντίστοιχα οι ποσότητες της διατηρούμενης στροφορμής και ενέργειας ανά μονάδα μάζας για δοκιμαστικό σωματίδιο ή αν πρόκειται για φωτόνιο, η στροφορμή και η ενέργεια. Χρησιμοποιώντας τα διανύσματα Killing (38α') και (38β') που συνδέονται με τις συμμετρίες.

$$\begin{aligned} E &= -\xi \cdot \mathbf{u}, \\ L &= \eta \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Παίρνοντας τις συνιστώσες της τετρα-ορμής

$$\begin{aligned}
p_t = -E = u_t &\Rightarrow g_{tt}u^t + g_{t\phi}u^\phi = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\dot{t} - \frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2}\dot{\phi}, \\
\text{για } \theta = \pi/2, \\
&= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} - \frac{2aM}{r}\dot{\phi} = -E = \text{constant} \tag{49\alpha'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_\phi = L = u_\phi &\Rightarrow g_{\phi\phi}v^\phi + g_{t\phi}v^t \\
&= \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2}\right)\sin^2 \theta \dot{\phi} - \frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2}\dot{t}, \\
\text{για } \theta = \pi/2, \\
&= \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right)\dot{\phi} - \frac{2aM}{r}\dot{t} = L = \text{constant} \tag{49\beta'}
\end{aligned}$$

$$p_r = g_{rr}u^r = \frac{\rho^2}{\Delta}\dot{r}, \quad \text{για } \theta = \pi/2, \quad \Rightarrow p_r = \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}. \tag{49\gamma'}$$

Λύνοντας το σύστημα για τις (49\alpha'), (49\beta') παίρνουμε,

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} \right) E - \frac{2aM}{r} L \right] = \frac{1}{\Delta} [g_{\phi\phi}E + g_{t\phi}L] \tag{50\alpha'}$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) L + \frac{2aM}{r} E \right] = -\frac{1}{\Delta} [g_{tt}L + g_{t\phi}E]. \tag{50\beta'}$$

Συνεχίζοντας, θα πάρουμε την Χαμιλτονιανή

$$H(x^\alpha, p_\alpha) = p_\alpha \dot{x}^\alpha - \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta,$$

που σύμφωνα με τα παραπάνω η Χαμιλτονιανή ισούται με τη Λαγκραζιανή, το οποίο δείχνει πως δεν εμπλέκεται δυναμική ενέργεια, κάτι το οποίο έπρεπε να περιμένουμε, αφού το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στις μαύρες τρύπες Schwarzschild.

Η Χαμιλτονιανή είναι, ακόμα, ανεξάρτητη του χρόνου,

$$\begin{aligned}
2H &= [g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi}]\dot{t} + [g_{\phi\phi}\dot{\phi} + g_{t\phi}\dot{t}]\dot{\phi} + g_{rr}\dot{r}^2 \\
&= -E\dot{t} + L\dot{\phi} + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 = \delta_1 = \text{constant}. \tag{51}
\end{aligned}$$

Θεωρούμε για τη σταθερά δ_1 , πως θα παίρνει την τιμή $\delta_1 = -1$ όταν πρόκειται για χρονοειδής γεωδαιτικές και $\delta_1 = 0$ όταν είναι φωτοειδής. Οι υπολογισμοί με χρήση της Euler-Lagrange για τις συντεταγμένες είναι αρκετά περίπλοκοι

και δημιουργούν όρους που δυσκολεύουν την χρήση της σε περαιτέρω υπολογισμούς, εφόσον η μετρική δεν είναι διαγώνια, όπως εκείνη για Schwarzschild. Στην (51) θα αντικαταστήσουμε τα $\dot{t}$ και $\dot{\phi}$ από τις (50α') και (50β'). Λύνουμε, ξανά, για $\dot{r}^2$, για να μελετήσουμε την κίνηση των σωματιδίων,

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -E \frac{1}{\Delta} (g_{\phi\phi} E + g_{t\phi} L) - L \frac{1}{\Delta} (g_{tt} L + g_{t\phi} E) + \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 \\ \Rightarrow \dot{r}^2 &= \frac{1}{r^2} (g_{\phi\phi} E^2 + 2g_{t\phi} L E + g_{tt} L^2) + \frac{\Delta}{r^2} \delta_1\end{aligned}\quad (52)$$

Βρίσκουμε τις ρίζες $V_{\pm}$ για το πολυώνυμο $g_{\phi\phi} E^2 + 2g_{t\phi} L E + g_{tt} L^2$ για το E .

$$D = 4L^2 (g_{t\phi}^2 - g_{\phi\phi} g_{tt})$$

και οι ρίζες είναι,

$$V_{\pm} = L \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{\phi\phi} g_{tt}}}{g_{\phi\phi}} = \frac{L}{g_{\phi\phi}} (-g_{t\phi} \pm \sqrt{\Delta}). \quad (53)$$

Επομένως, η εξίσωση για το $\dot{r}^2$ γράφεται και ως,

$$\dot{r}^2 = \frac{g_{\phi\phi}}{r^2} (E - V_+)(E - V_-) + \frac{\Delta}{r^2} \delta_1. \quad (54)$$

Χρησιμοποιώντας την (42), μπορούμε να ορίσουμε

$$\begin{aligned}V_r(r) &= \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta}{r^4} (E - V_+)(E - V_-) + \frac{\Delta}{r^2} \delta_1 \\ \Rightarrow \dot{r}^2 &= V_r(r), \quad V_{\pm} = \frac{2Mar \pm r^2 \sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta} L.\end{aligned}$$

3.1.1 Δυναμικά γεωδαιτικών στο επίπεδο του ισημερινού

Για τη μελέτη του δυναμικού της ακτινικής εξίσωσης, σε όποια μορφή, υπάρχουν τέσσερις πιθανότητες, που αντιστοιχούν στα πρόσημα των L και a . Για ταυτόχρονη αλλαγή προσήμων, $a \rightarrow -a$, $L \rightarrow -L$, οι περιπτώσεις είναι ισοδύναμες. Οι περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν είναι για $La > 0$, όπου το σωματίδιο κινείται συμπεριστροφικά και για $La < 0$, που αντίστοιχα είναι αντιπεριστροφικά από την κίνηση της μελανής οπής. Προσοχή, αλλάζοντας τα πρόσημα των παραπάνω, θα επηρεάζονται και οι (53), οπότε για την αποφυγή του συγκεκριμένου προβλήματος θα βάλουμε $|L|$ και τότε το $V_+ \geq V_-$ θα είναι αληθές.

Εξετάζουμε την περίπτωση $a > 0$. Γενικά, ισχύουν:

- $V_{\pm}$ θα εξαφανίζεται όταν το $r \rightarrow \infty$.
- Τα V_+ και V_- ταυτίζονται για $\Delta = 0$, δηλαδή στον ορίζοντα και

$$V_+(r_+) = V_-(r_+) = \frac{2Mr_+La}{(r_+^2 + a^2)^2} = \Omega_H L, \quad (55)$$

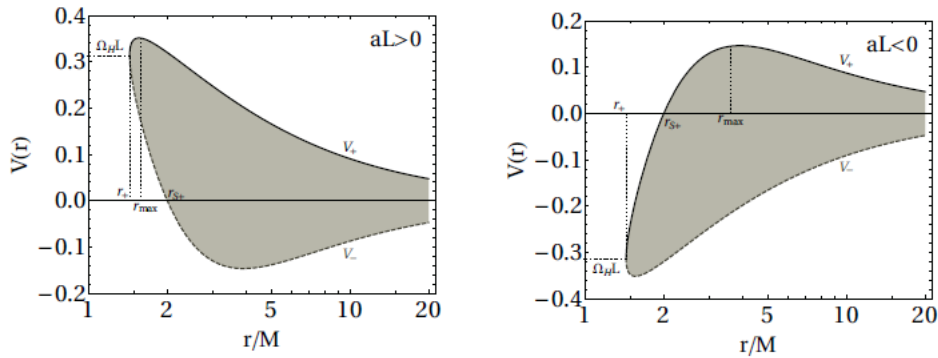
το οποίο είναι θετικό για $La > 0$ και αρνητικό για $La < 0$.

- Αν το $La > 0$, τότε τα $V_+ > 0$ και V_- είναι θετικό στο r_+ και εξαφανίζεται όταν

$$\begin{aligned} r\sqrt{\Delta} = 2Ma &\Rightarrow r^2(r^2 - 2Mr + a^2) = 4M^2a^2 \\ &\Rightarrow r^4 - 2Mr^3 + a^2r^2 - 4M^2a^2 = (r - 2M)(r^3 + a^2r + 2Ma^2) = 0 \\ &\rightarrow r = 2M. \end{aligned}$$

Το οποίο είναι η περιοχή της εργόσφαιρας στο επίπεδο του ισημερινού.

- Αν το $La < 0$, τότε τα $V_- < 0$ και V_+ , αντίστοιχα, είναι αρνητικό για r_+ και εξαφανίζεται για $r = 2M$.
- Από τη μελέτη των $V_{\pm}$ και τα δύο δυναμικά παρουσιάζουν ένα σταθερό σημείο, το οποίο είναι τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο, αντίστοιχα για το V_+ και V_- .



Σχήμα 5: Τα δυναμικά $V_+(r)$ και $V_-(r)$ για τροχιές στο επίπεδο του ισημερινού που κινούνται είτε συμπεριστροφικά ($La > 0$, αριστερό μέρος), είτε αντιπεριστροφικά ($La < 0$, δεξί μέρος) σε σχέση με τη μελανή οπή. Η σκιαγραφημένη περιοχή είναι απρόσιτη για σωματίδια χωρίς μάζα. [5]

3.1.2 Φωτοειδείς Γεωδαιτικές

Στα παρακάτω, ακολουθούμε την ανάλυση που παρουσιάζεται στην [5]. Για τις φωτοειδείς γεωδαιτικές, το $\delta_1 = 0$ και η (54) γράφεται,

$$\dot{r}^2 = V_r = \frac{g_{\phi\phi}}{r^2}(E - V_+)(E - V_-) = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}{r^4}(E - V_+)(E - V_-).$$

Εφόσον το $\dot{r}^2$ πρέπει να είναι θετικό, και ο αριθμητής είναι αυστηρά θετικός, τότε το σωματίδιο κινείται σε εκείνες τις γεωδαιτικές για τις οποίες ισχύει,

$$E < V_- \quad \text{ή} \quad E > V_+$$

Άρα, η περιοχή μεταξύ $V_- < E < V_+$ θα θεωρείται απαγορευμένη. Για την καλύτερη μελέτη των γεωδαιτικών στο επίπεδο του ισημερινού είναι χρήσιμη και η ακτινική επιτάχυνση, η οποία μπορεί να υπολογιστεί μέσω της παραγωγίσιμης της (54) ως προς την παράμετρο λ .

$$\begin{aligned} 2\dot{r}\ddot{r} &= V_r' \dot{r} \Rightarrow \ddot{r} = \frac{1}{2}V_r' \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{g_{\phi\phi}}{r^2}\right)'(E - V_+)(E - V_-) - \frac{g_{\phi\phi}}{r^2}[V_+'(E - V_-) + V_-'(E - V_+)] \end{aligned}$$

Όταν το $\dot{r} = 0$, το οποίο συμβαίνει για $E = V_+$ ή $E = V_-$, τότε η ακτινική επιτάχυνση παίρνει τις τιμές,

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{g_{\phi\phi}}{r^2}V_+'(V_+ - V_-), \quad \text{αν το } E = V_+, \\ \ddot{r} &= -\frac{g_{\phi\phi}}{r^2}V_-'(V_- - V_-) \quad \text{αν το } E = V_-, \\ \Rightarrow \ddot{r} &= -\frac{|L|\sqrt{\Delta}}{r^2}V_\pm', \quad \text{αν το } E = V_\pm. \end{aligned}$$

Ακόμα μπορούμε να υπολογίσουμε την ακτινική εξίσωση για τις φωτεινές ακτίνες, χρησιμοποιώντας $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ και τις (50α'), (50β') έχοντας την παράμετρο επίδρασης $b \equiv |L/E|$, όπως και για τις τροχιές σε Schwarzschild. Χρησιμοποιούμε το $\pm$ αναλόγως με το πρόσημο του L , όπως αναφέραμε ότι δείχνει αν η τροχιά κινείται συμπεριστροφικά ή αντιπεριστροφικά της μελανής οπής, οπότε η εξίσωση γράφεται ως

$$\frac{1}{L^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - W_{\text{eff}}(r, b, \sigma).$$

Το ενεργό δυναμικό για τροχιές φωτεινών ακτίνων στον ισημερινό είναι

$$W_{\text{eff}}(r, b, \sigma) = \frac{1}{r^2} \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \frac{2M}{r} \left(1 - \sigma \frac{a}{b} \right)^2 \right]. \quad (56)$$

Και αντίστοιχα αν παραγωγίσουμε το παραπάνω και αντικαταστήσουμε με L και E ,

$$\ddot{r} = \frac{L^2 - a^2 E^2}{r^3} - \frac{3M(L \pm aE)^2}{r^4}.$$

Μέχρι στιγμής υποθέτουμε πως η σταθερά E θα είναι θετική. Οπότε θα δούμε και τι γίνεται όταν αποκτά αρνητικές τιμές, που χρησιμεύει για τις περιπτώσεις $E < V_-$. Για να καθορίσουμε αν το E μπορεί να έχει αρνητικές τιμές, πρέπει πρώτα να δούμε τη συσχέτιση με την ενέργεια του δοκιμαστικού σωματιδίου ή φωτονίου. Η ενέργεια υπολογίζεται μέσω του παρατηρητή και στη γενική σχετικότητα ορίζεται από την,

$$\mathcal{E} = -g_{\alpha\beta} U^\alpha p^\beta = -U^\alpha p_\alpha, \quad (57)$$

όπου με p^α είναι η τετρα-ορμή του σωματιδίου και U^α η τετρα-ταχύτητα του παρατηρητή.

Η ενέργεια $\mathcal{E}$ που μετράει ο παρατηρητής με U^α πρέπει να είναι θετική. Από την άλλη, έχουμε πως η $E = -u_t$ (49α'), το οποίο είναι η τετρα-ταχύτητα του σωματιδίου.

Οπότε, ας θεωρήσουμε έναν στατικό παρατηρητή, με $U_{st}^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, που βρίσκεται εκτός της εργόσφαιρας. Έχουμε, από την (49α'), ότι η ενέργεια του παρατηρητή είναι $\mathcal{E}_{st} = -p_t$ και $p_t \equiv u_t$, άρα τελικά $\mathcal{E}_{st} = E$. Καταλήγουμε, πως για σωματίδιο εκτός από την εργοπεριοχή, η σταθερά E αντιστοιχεί στην ενέργεια του, όπως μετρείται από έναν στατικό παρατηρητή εκτός της εργόσφαιρας. Για αυτά τα σωματίδια οι αρνητικές τιμές του E δεν είναι επιτρεπτές.

Συνεχίζοντας, ας δούμε τι γίνεται για ένα σωματίδιο μέσα στην εργοπεριοχή που ποτέ δε θα ξεφύγει από την εργόσφαιρα, $r_+ < r < r_{E+}$. Στην περιοχή αυτή ο στατικός παρατηρητής έχουμε αναφέρει πως δεν μπορεί να υπάρξει και άρα διαλέγουμε έναν άλλο, έστω έναν ZAMO σταθερό παρατηρητή, με $L = u_\phi = 0$ και την (43) για $\theta = \pi/2$. Η τετρα-ταχύτητα του παρατηρητή είναι $U_{ZAMO}^\alpha = \text{const} (1, 0, 0, \Omega)$. Η σταθερά υπολογίζεται με τη χρήση του $g_{\alpha\beta} U_{ZAMO}^\alpha U_{ZAMO}^\beta = -1$ και είναι πάντα θετική.

Η ενέργεια, τώρα, είναι ίση με,

$$\mathcal{E}_{ZAMO} = -p_\alpha U_{ZAMO}^\alpha = \text{const} (E - \Omega L),$$

από την τετρα-ορμή είναι $p_\alpha = (-E, p_r, 0, L)$, ισχύει η $\mathcal{E}_{ZAMO} > 0$ και τότε αντιστοιχεί για $E > \Omega L$. Το οποίο βρίσκεται μεταξύ των ριζών $V_\pm$ ($V_- \leq \Omega L \leq V_+$), που το ίσον ισχύει στον ορίζοντα. Από αυτό οι φωτοειδής γεωδαιτικές με $E < V_-$ και θετική ενέργεια θεωρούνται απαγορευτικές.

Τελικά, αν το σωματίδιο κινείται συμπεριστροφικά ($La > 0$), υπάρχει στην εργοπεριοχή για θετικά E στο εύρος $V_+(r_+) < E < V_+(r_{max})$. Αν η τιμή ξεπεράσει το εύρος, τότε περνάει την εργόσφαιρα και διαφεύγει στο άπειρο.

Αλλιώς, για αντιπεριστροφική κίνηση ($La < 0$), επειδή το $V_+ < 0 \rightarrow E > V_+$, το E θα μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές αν και μόνο αν $V_+(r_+) = V_-(r_+) < E < 0$.

Το γεγονός ότι η σταθερά E μπορεί να είναι αρνητική δεν έρχεται σε αντιπαράθεση δεδομένου ότι η ενέργεια πρέπει να είναι θετική. Οι δύο ποσότητες ταυτίζονται όταν υπάρχει στατικός παρατηρητής, ο οποίος μέσα στην εργόσφαιρα δεν υπάρχει και έτσι οι γεωδαιτικές με τις αρνητικές τιμές της σταθεράς απλά δεν μπορούν να ξεφύγουν από την εργοπεριοχή.

3.1.3 Χρονοειδής Γεωδαιτικές

Συνεχίζοντας για τις χρονοειδής γεωδαιτικές, το $\delta_1 = -1$ και η (52) παίρνει τη μορφή,

$$\dot{r}^2 = V_r = \frac{1}{2}(g_{\phi\phi}E^2 + 2g_{t\phi}LE + g_{tt}L^2) + \frac{\Delta}{r^2}$$

Ακόμα από την κανονικοποίηση της τετρα-ταχύτητας, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$, και χρήσης των (50α'), (50β') καταλήγουμε σε μία εξίσωση ως προς το $dr/d\tau$ όμοια με την παραπάνω αλλά και διαφορετική,

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{E^2 - 1 + \frac{M}{r} - \frac{L^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} + M \frac{(L - aE)^2}{r^2}},$$

το οποίο μπορεί να γραφεί με αναδιάταξη των όρων, στην ίδια μορφή όπως και στη μετρική Schwarzschild

$$\frac{E^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r, E, L), \quad (58)$$

με το ενεργό δυναμικό για τροχιές σωματιδίων στον ισημερινό να ισούται με

$$V_{\text{eff}}(r, E, L) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(L - aE)^2}{r^3}. \quad (59)$$

Η μελέτη των χρονοειδών γεωδαιτικών δεν παρουσιάζει την ίδια ευκολία με τις φωτοειδής, και γι αυτό θα εξετάσουμε την παρακάτω περίπτωση.

Έστω μια υπόθεση, για δοκιμαστικό σωματίδιο που εισέρχεται σε μία οριακή μελανή οπή Kerr, ($a = M$), με ασταθή τροχιά έχοντας φορά περιστροφής ίδια με της μελανής οπής, για $r = M$ και μια όμοια τροχιά με την προαναφερθείσα, αλλά με αντίθετη φορά για $r = 4M$. Για χάριν απλότητας μελετάμε μία εξ αυτών, εκείνη που έχει περισσότερη σημασία για την αστροφυσική. Για δέσμια ενέργεια εσωτάτης ευσταθούς κυκλικής τροχιάς ενός σωματιδίου σε

$r = R$. Μηδενίζοντας την αρχική ταχύτητα κατά την ακτινική συνιστώσα, η (58) γράφεται

$$\frac{E^2 - 1}{2} = V_{\text{eff}}(R, E, L).$$

Και για την παραμονή του σωματιδίου σε κυκλική τροχιά θα πρέπει να μηδενίζεται και η συνιστώσα της επιτάχυνσης, άρα η (58) παραγωγίζεται για r και έχουμε

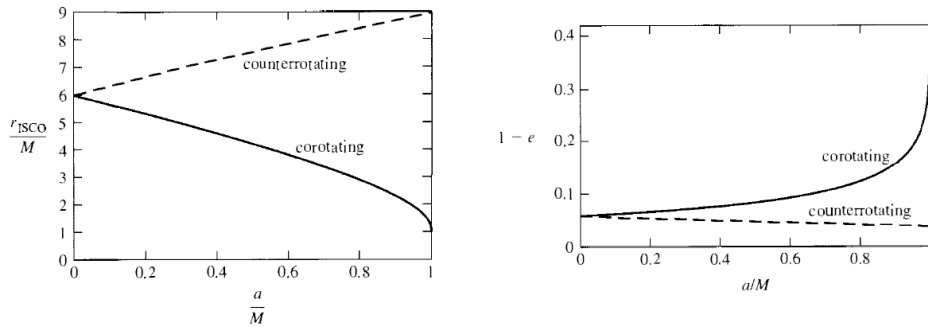
$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}(r, E, L)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Για τις ευσταθείς τροχιές, πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το ενεργό δυναμικό, δηλαδή

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(r, E, L)}{\partial r^2} \right|_{r=R} > 0.$$

Και έτσι καθορίζεται το εύρος επιτρεπτών τιμών για τα E, L και R . Ειδικά για την εσωτάτη ευσταθή κυκλική τροχιά (ISCO), η τελευταία μετατρέπεται σε ισότητα και μπορούμε να τις λύσουμε για να βρούμε τις τιμές τους. Είναι προτιμότερη η γραφική αναπαράσταση της ακτίνας και ενέργειας συναρτήσει του λόγου a/M . Για παράδειγμα θα δείξουμε τις παραμέτρους για την οριακή ευσταθής συμπεριστροφική κυκλική τροχιά σωματιδίου.

$$E = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad L = \frac{2M}{\sqrt{3}}, \quad r_{\text{ISCO}} = M$$



Σχήμα 6: Το αριστερό μέρος της εικόνας έχει την γραφική παράσταση της ακτίνας r_{ISCO} σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist της εσωτάτης ευσταθούς κυκλικής τροχιάς στο επίπεδο του ισημερινού μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής συναρτήσει του λόγου a/M . Το δεξιό μέρος έχει την γραφική αναπαράσταση της ενέργειας σύνδεσης ανά μονάδα μάζας ηρεμίας $1 - e$ της εσωτάτης ευσταθούς κυκλικής τροχιάς στο επίπεδο του ισημερινού μιας μελανής οπής. [1]

Η δέσμια ενέργεια ανά μονάδα μάζας ηρεμίας θα είναι $1 - E$, μιας και το E δίνει την ενέργεια του σωματιδίου όπως μετράται από το άπειρο και η εύρεση

της δέσμιας ενέργειας για όποια τροχιά, είναι η διαφορά από την ενέργεια που έχει το ίδιο καθώς κινείται σε αυτή την τροχιά.

3.2 Γενικές Εξισώσεις Κίνησης Γεωδαιτικών

Για να ολοκληρώσουμε την ανάλυσή μας, θα δούμε και τις αλγεβρικές εκφράσεις για τα $\dot{r}$ και $\dot{\theta}$ για ένα σωματίδιο με τετρα-ταχύτητα. Για να το καταφέρουμε αυτό, είναι χρήσιμη η προσέγγιση των Hamilton-Jacobi .

Από την σύνδεση της τετρα-ταχύτητας με τη τετρα-ορμή $u^\alpha = g^{\alpha\beta} p_\beta$, η Χαμιλτονιανή γράφεται και

$$H(x^\alpha, p_\beta) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta.$$

Με την προσέγγιση Hamilton-Jacobi εμφανίζεται και ακόμα μία σταθερά κίνησης. Ψάχνουμε την εξίσωση,

$$S = S(x^\alpha, \lambda),$$

η οποία είναι λύση της εξίσωσης hamilton-Jacobi ,

$$H\left(x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\right) + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0.$$

Αν η λύση εξαρτάται από τις τέσσερις σταθερές της κίνησης αποτελεί ένα ολοκλήρωμα, και τότε,

$$\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} = p_\alpha.$$

Έχουμε ήδη τρεις σταθερές,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \frac{1}{2} \delta_1 = \text{constant} \\ p_t &= -E = \text{constant} \\ p_\phi &= L = \text{constant} . \end{aligned} \tag{60}$$

Και η S παίρνει μορφή,

$$S = -\frac{1}{2} \delta_1 \lambda - Et + L\phi + S^{r\theta}(r, \theta),$$

όπου η $S^{r\theta}$ είναι η εξίσωση των r και θ που ψάχνουμε. Οι λύσεις πρέπει να είναι διαχωρίσιμες, δηλαδή,

$$S = -\frac{1}{2} \delta_1 \lambda - Et + L\phi + S^r(r) + S^\theta(\theta).$$

Και αντικαθιστώντας στη Hamilton-Jacobi , κάνοντας χρήση και των όρων από την (37),

$$\begin{aligned}
& -\delta_1 + g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = \\
& -\delta_1 + \frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{dS^r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{dS^\theta}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} \left[r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r}{\rho^2} \sin^2 \theta \right] E^2 + \\
& + \frac{4Mra}{\rho^2 \Delta} LE + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} L^2 = 0,
\end{aligned}$$

πολλαπλασιάζοντας με $\rho^2 \rightarrow$

$$\begin{aligned}
& -\delta_1(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + \Delta \left(\frac{dS^r}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dS^\theta}{d\theta} \right)^2 - \\
& - \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] E^2 + \frac{4Mar}{\Delta} LE + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right) L^2 = 0,
\end{aligned}$$

διαχωρίζουμε μεταξύ των r και $\theta \rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \Delta \left(\frac{dS^r}{dr} \right)^2 - \delta_1 r^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} E^2 + \frac{4Mar}{\Delta} LE - \frac{a^2}{\Delta} L^2 = \\
& = - \left(\frac{dS^\theta}{d\theta} \right)^2 + \delta_1 a^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta E^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} L^2,
\end{aligned}$$

προσθέτουμε στις δύο πλευρές τη σταθερή ποσότητα $a^2 E^2 + L^2 \rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \Delta \left(\frac{dS^r}{dr} \right)^2 - \delta_1 r^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} E^2 + \frac{4Mar}{\Delta} LE - \frac{a^2}{\Delta} L^2 + a^2 E^2 + L^2 = \\
& = - \left(\frac{dS^\theta}{d\theta} \right)^2 + \delta_1 a^2 \cos^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta E^2 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} L^2.
\end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση ικανοποιείται όταν και οι δύο πλευρές ισούνται με την ίδια σταθερά $\mathcal{C}$, η οποία ονομάζεται Carter . Τότε αν ορίσουμε τις εξισώσεις $R(r) = \Delta^2 (dS^r/dr)^2$ και $\Theta(\theta) = (dS^\theta/d\theta)^2$, έχουμε τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned}
\Theta(\theta) & \equiv \mathcal{C} + \cos^2 \theta \left[(\delta_1 + E^2) a^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} L^2 \right] \\
R(r) & \equiv \Delta [\delta_1 r^2 - (L - aE)^2 - \mathcal{C}] + [E(r^2 + a^2) - La]^2.
\end{aligned}$$

Και η λύση της Hamilton-Jacobi αποκτάει την μορφή,

$$S = a_{\frac{1}{2}} \delta_1 \lambda - Et + L\phi + \int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr + \int \sqrt{\Theta} d\theta.$$

Άρα, η σταθερά Carter φαίνεται να είναι μία σταθερά διαχωρισμού και μαζί με τις υπόλοιπες σταθερές δίνεται η δυνατότητα να λυθούν προβλήματα στη γεωμετρία του χωροχρόνου Kerr .

Μέσω των εξισώσεων για τα $R(r)$ και $\Theta(\theta)$ μπορούμε να βρούμε αντίστοιχες αλγεβρικές εκφράσεις για τα $\dot{r}, \dot{\theta}$ της τετρα-ταχύτητας,

$$p_\theta^2 = (g_{\theta\theta}\dot{\theta})^2 = (\rho^2\dot{\theta})^2 = \Theta(\theta) \Rightarrow \dot{\theta} = \pm \frac{1}{\rho^2}\sqrt{\Theta} \quad (61\alpha')$$

$$p_r^2 = (g_{rr}\dot{r})^2 = \left(\frac{\rho^2}{\Delta}\dot{r}\right)^2 = \frac{R(r)}{\Delta} \Rightarrow \dot{r} = \pm \frac{1}{\rho^2}\sqrt{R}. \quad (61\beta')$$

Το $\pm$ εξαρτάται από το πρόσημο που θα έχουν η ταχύτητα στην γωνιακή και ακτινική κατεύθυνση αντίστοιχα. Οι (61α'), (61β') μαζί με τις γενικές εκφράσεις των (50α'), (50β'),

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) E - \frac{2Mar}{\rho^2} L \right], \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) \frac{L}{\sin^2 \theta} + \frac{2Mar}{\rho^2} E \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

Παρόλα αυτά, να αναφέρουμε πως οι περιγραφή των τροχιών παραμένει αρκετά περίπλοκη.

4 Μέθοδος αριθμητικής Ολοκλήρωσης Runge-Kutta

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η μέθοδος ολοκλήρωσης διαφορικών εξισώσεων και ειδικότερα η Runge-Kutta, που θα χρησιμοποιηθεί και στην παρούσα εργασία για την ολοκλήρωση των γεωδαιτικών εξισώσεων στη γεωμετρία Kerr. Η μέθοδος της αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι μια διαδικασία υπολογισμού για την προσέγγιση της ολοκληρωτικής τιμής μιας συνάρτησης ή μαθηματικών ολοκληρωμάτων. Αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται όταν καταστείτε αδύνατο να λυθεί αναλυτικά κάποιο ολοκληρωτικό πρόβλημα.

Αυτές οι μέθοδοι επιτρέπουν την προσομοίωση, τον υπολογισμό και έλεγχο των φυσικών συστημάτων και διαδικασιών, ακόμη και όταν δεν έχουμε διαθέσιμες απλές αναλυτικές λύσεις. Στην πράξη, οι αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης είναι κρίσιμες για την επίλυση φυσικών προβλημάτων και για την πρόβλεψη συμπεριφορών φυσικών συστημάτων.

Η μέθοδος Runge-Kutta χρησιμοποιείται για τον αριθμητικό υπολογισμό συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ). Είναι μία επαγωγική μέθοδος δηλαδή

λόγω της προηγούμενης θέσης προκύπτει η επόμενη. Η μέθοδος Runge-Kutta τάξης p προσεγγίζει την ολοκλήρωση σε N διακριτά βήματα από χρόνο t_i σε t_f , το βήμα δηλαδή είναι $\Delta t \equiv h = (t_f - t_i)/N$, και σε κάθε βήμα εισάγει σφάλμα διακριτοποίησης $\sim \mathcal{O}(h^{p+1})$. Το ολικό σφάλμα τότε είναι $\sim \mathcal{O}(h^p)$.

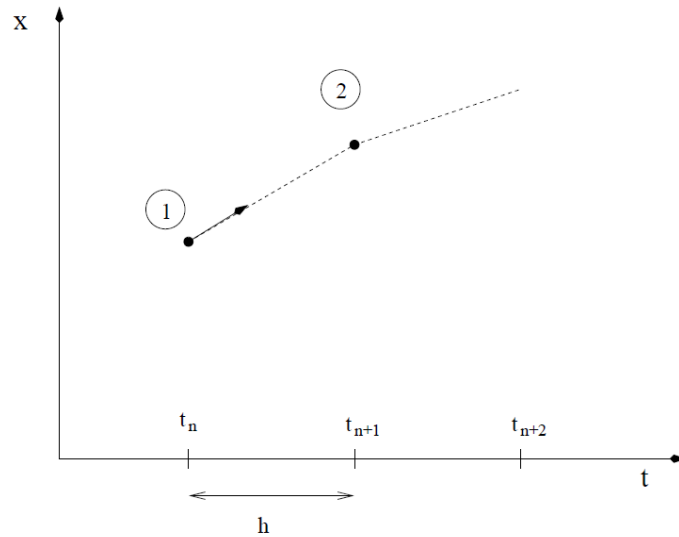
Για την κατανόηση της μεθόδου παρουσιάζεται ένα απλό πρόβλημα σε μέθοδο πρώτης τάξης, άγνωστης συνάρτησης $x(t)$. Η διαφορική της εξίσωση είναι της μορφής,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Προσεγγίζουμε την παράγωγο σύμφωνα με την πεπερασμένη διαφορά,

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f(t_n, x_n) \Rightarrow x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n).$$

Αναπτύσσουμε σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor που μας δίνει το σφάλμα για



Σχήμα 7: Η γεωμετρία του βήματος για μέθοδο Runge-Kutta 1ης τάξης. [11]

κάθε βήμα να είναι $\mathcal{O}(h^2)$.

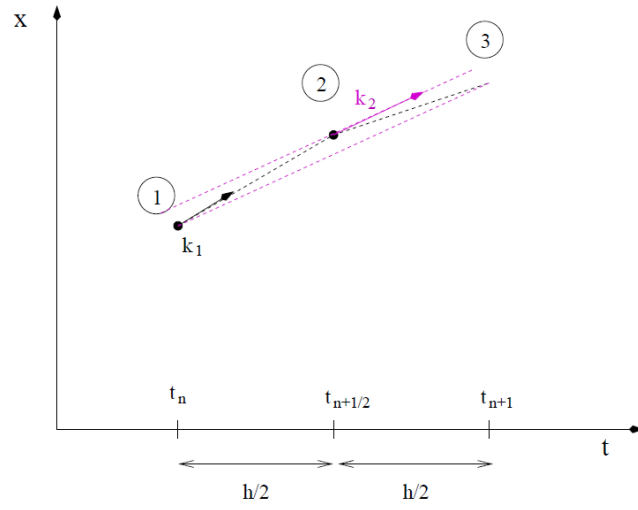
$$x_{n+1} = x(t_n + h) = x_n + h \frac{dx}{dt}(x_n) + \mathcal{O}(h^2) = x_n + hf(t_n, x_n) + \mathcal{O}(h^2)$$

Ξεκινάμε από το σημείο 1 ώστε να προσδιοριστεί το σημείο x_{n+1} από την γραμμική επέκταση του πρώτου στην κατεύθυνση της παραγώγου που ορίζουμε ως, $k_1 \equiv f(t_n, x_n)$.

Η μέθοδος βελτιώνεται όταν πάρουμε και ένα ενδιαμέσο σημείο, το 2, όπου θα είναι δεύτερης τάξης η μέθοδος με σφάλμα βήματος $\mathcal{O}(h^3)$. Το σημείο είναι

στο μέσον του διαστήματος (t_n, t_{n+1}) , με γραμμική επέκταση αυτή τη φορά από το x_n . Χρησιμοποιώντας την κλίση για την εκτίμηση της παραγώγου, έχουμε τελικά για το x_{n+1} ,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ x_{n+1} &= x_n + hk_2. \end{aligned}$$



Σχήμα 8: Η γεωμετρία του βήματος για μέθοδο Runge-Kutta 2ης τάξης. [11]

Προφανώς, χρησιμοποιώντας περισσότερα σημεία η μέθοδος θα βελτιώνεται περισσότερο. Αυτό φαίνεται με τη Runge-Kutta τέταρτης τάξης, δηλαδή υπολογίζεται τέσσερις φορές η συνάρτηση f και το σφάλμα είναι $\mathcal{O}(h^4)$. Χρησιμοποιούνται 3 ενδιάμεσα σημεία για την προώθηση από x_n στο x_{n+1} , με παρόμοιο τρόπο όπως για τα δυο ενδιάμεσα σημεία. Είναι, λοιπόν, τέσσερις παράγωγοι ως εκτιμητές της συνάρτησης με σφάλμα βήματος της συνάρτησης $\mathcal{O}(h^5)$.

$$k_1 = f(t_n, x_n) \tag{63}$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right) \tag{64}$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2\right) \tag{65}$$

$$k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3) \tag{66}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{67}$$

Στην τελευταία εξίσωση, ο δεύτερος όρος είναι ο μέσος όρος των τεσσάρων παραγώγων, υπολογισμένος με τέτοιο τρόπο ώστε να εξαφανίζονται τα σφάλματα μέχρις πέμπτης τάξης, h^5 .

Για τον προγραμματισμό του παραπάνω, ας θεωρήσουμε το πρόβλημα ενός σωματιδίου υπό την επίδραση δυνάμεων, οι οποίες δίνονται από τον νόμο του Νεύτωνα. Και θα αναζητηθεί η λύση των εξισώσεων κίνησής του που μπορούν να γραφτούν,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} &= \vec{a}(t, \vec{x}, \vec{v}), \\ \vec{a}(t, \vec{x}, \vec{v}) &\equiv \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{και} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}. \end{aligned} \quad (68)$$

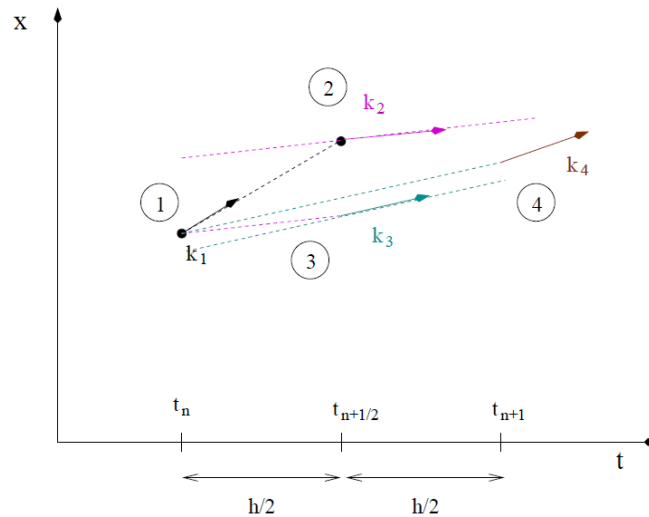
Θα δούμε την κίνηση του σωματιδίου πάνω στην ευθεία με αρχικές συνθήκες,

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \frac{dv}{dt} = a(t, x, v) \quad (69)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad v(t_0) = v_0. \quad (70)$$

Αυτό το σύστημα το ολοκληρώνουμε για τις δύο συναρτήσεις $x_1(t) \equiv x(t)$ και $x_2(t) \equiv v(t)$.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2)$$



Σχήμα 9: Η γεωμετρία του βήματος για μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης. [11]

Και τότε η μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης γενικεύεται,

$$\begin{aligned}
k_{11} &= f_1(t_n, x_{1,n}, x_{2,n}) \\
k_{21} &= f_2(t_n, x_{1,n}, x_{2,n}) \\
k_{12} &= f_1(t_n + \frac{h}{2}, x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{11}, x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{21}) \\
k_{22} &= f_2(t_n + \frac{h}{2}, x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{11}, x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{21}) \\
k_{13} &= f_1(t_n + \frac{h}{2}, x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{12}, x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{22}) \\
k_{23} &= f_2(t_n + \frac{h}{2}, x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{12}, x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{22}) \\
k_{14} &= f_1(t_n + h, x_{1,n} + hk_{13}, x_{2,n} + hk_{23}) \\
k_{24} &= f_2(t_n + h, x_{1,n} + hk_{13}, x_{2,n} + hk_{23}) \\
x_{1,n+1} &= x_{1,n} + \frac{h}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}) \\
x_{2,n+1} &= x_{2,n} + \frac{h}{6}(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24}).
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα μπορούμε να επεκτείνουμε και σε περισσότερες διαστάσεις.

5 Ανάλυση Αποτελεσμάτων

Στο παρόν κομμάτι της εργασίας θα αναλυθούν τα αποτελέσματα που δίνει το πρόγραμμα που συντάχθηκε σε γλώσσα Fortran με τη χρήση της υπολογιστικής μεθόδου Runge-Kutta 4ης τάξης.

Ο κώδικας βρίσκεται στο Α' Παράρτημα και έχει επιλεχθεί η ανάλυση των γεωδαιτικών εξισώσεων σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist στο επίπεδο του ισημερινού $\theta = \pi/2$ για τη μετρική Kerr. Οι γεωδαιτικές εξισώσεις έχουν υπολογιστεί από notebook στο Mathematica, με χρήση του βοηθητικού λογισμικού xAct και xCoba. Οι γεωδαιτικές είναι χρονοειδείς.

$$\begin{aligned}
\ddot{t} = \frac{1}{4(r^4(a^2 + r(-2M + r)))} & (Mr(4a^4\dot{t} - a^5\dot{\phi} - 4a^2\dot{t}r^2 + 5a^3\dot{\phi}r^2 - 8\dot{t}r^4 + \\
& 12a\dot{\phi}r^4 + a^3\dot{\phi}(a^2 - r^2) - 4a(a^3\dot{t} + a\dot{t}r^2 - a^2\dot{\phi}r^2 - 3\dot{\phi}r^4)))
\end{aligned}$$

$$\ddot{r} = -\frac{1}{r^5(a^2 + r(-2M + r))}(a^2 M \dot{\phi}^2 r(a^2 + r(-2M + r))^2 - \dot{\phi} r(2aM\dot{t} + \dot{\phi} r^3) \cdot$$

$$(a^2 + r(-2M + r))^2 + r(a^4 M \dot{t}^2 + a^2 r(-4M^2 \dot{t}^2 + 2M \dot{t}^2 r + \dot{r}^2 r^2) + Mr^2(4M^2 \dot{t}^2 - 4M \dot{t}^2 r + (\dot{t}^2 - \dot{r}^2)r^2)))$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\dot{r}(aM\dot{t} - a^2 M \dot{\phi} + \dot{\phi} r^2(-2M + r))}{r^2(a^2 + r(-2M + r))}$$

Οι σταθερές ποσότητες L και E υπολογίζονται ως εξής,

$$L = -\frac{2Ma}{r}\dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)\dot{\phi}$$

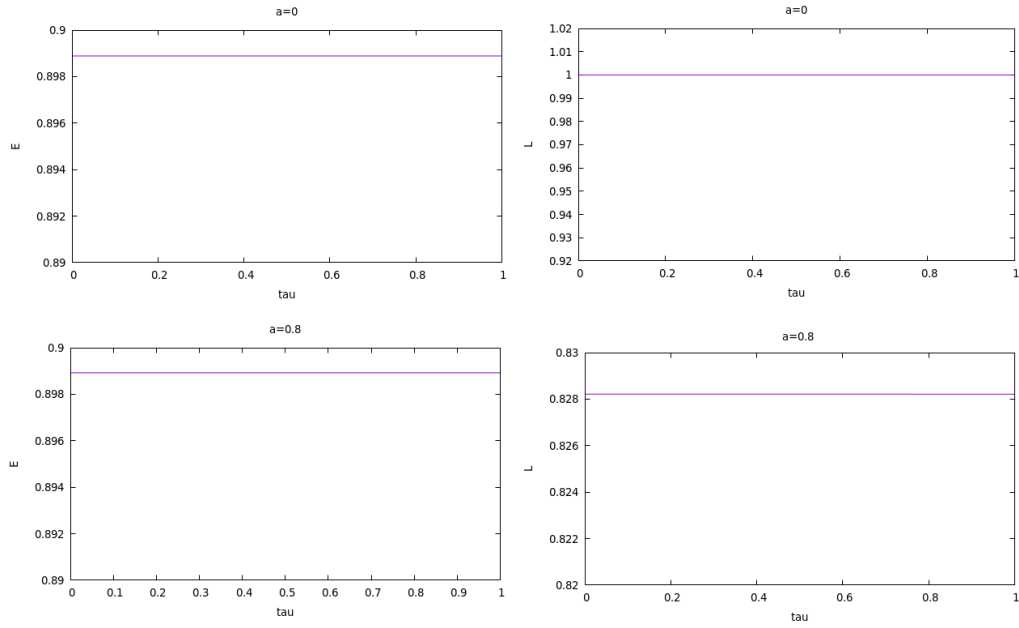
$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} + \frac{2Ma}{r}\dot{\phi}$$

Η αρχική ταχύτητα $\dot{t}$ υπολογίζεται μέσω διακρίνουσας λύνοντας το στοιχείο μήκους για $ds^2/d\tau^2 = -1$. Η αρνητική τιμή της θα απορρίπτεται καθώς δίνει μιγαδικές λύσεις, και όταν είναι θετική επιλέγουμε την θετική τιμή για το $\dot{t}_0$.

Η εργόσφαιρα, εφόσον μελετάται η περίπτωση του ισημερινού, είναι μεταξύ $0 \leq r_E \leq 2M$. Οι ορίζοντες υπολογίζονται από τις γνωστές εξισώσεις για $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$.

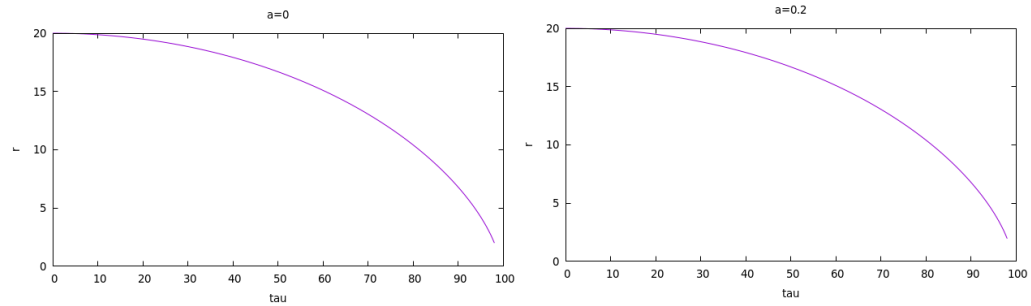
Το πρώτο πράγμα που εξετάζεται ως προς την εγκυρότητα του κώδικα είναι εάν οι σταθερές ποσότητες E και L παραμένουν σταθερές. Αυτό εξετάζεται μέσα από το αρχείο δεδομένων el.dat. Τρέχοντας για διάφορες αρχικές τιμές και για τιμές της σταθεράς Kerr $a \neq 0$, $a = 0.2$, $a = 0.6$ και $a = 0.8$, παρατηρείται ότι οι τιμές παραμένουν σταθερές για συγκεκριμένους χρόνους που τρέχει το πρόγραμμα. Συγκεκριμένα, οι σταθερές δεν αλλάζουν για πολύ μικρούς χρόνους στις τάξεις των μονάδων, π.χ. $t_f = 1$, συμπεριλαμβανομένων πάντα και των υπολοίπων τιμών του κώδικα. Σημειώνεται ακόμα πως η αλλαγή του N_t δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα.

Μεγαλύτερο πρόβλημα παρατηρείται στη σταθερά L , καθώς ειδικά μετά το πέρας του χρόνου $t_f = 1$ υπάρχει απότομη μείωση. Επίσης, όταν η σταθερά Kerr έχει τιμές μακριά από το όριο $a \rightarrow 0$ οι σταθερές συμπεριφέρονται πιο «όμορφα», αλλά και πάλι υπάρχει απόκλιση μετά από κάποιο όριο στον χρόνο. Στο σχήμα 10 φαίνεται η σχέση αυτή των σταθερών ποσοτήτων συναρτήσει του χρόνου. Οι αποκλίσεις είναι τις τάξεις 10^{-6} οπότε προς το παρόν δεν μας απασχολούν.



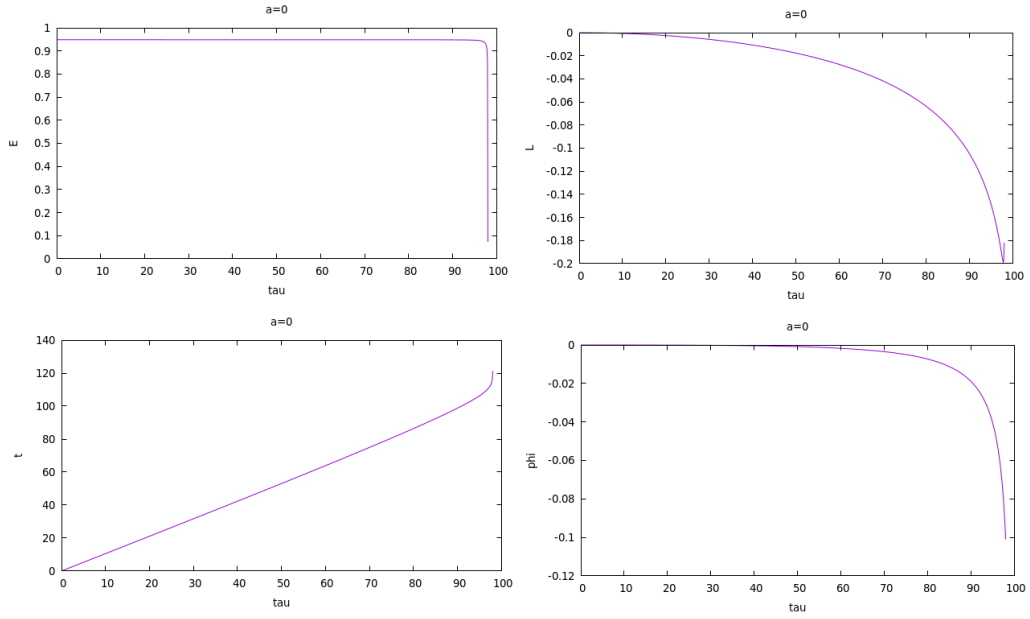
Σχήμα 10: Σταθερές E και L για διάφορες τιμές της σταθεράς Kerr. Αρχικές συνθήκες και για τα δύο a , $M = 1$, $\dot{r} = 0$ και $\dot{\phi} = 0.01$. Με $r_+ = 2$ για $a = 0$ με $E = 0.8895$ και $L = 1$ και $0.4 \leq r \leq 1.6$ με $E = 0.8989$ και $L = 0.8282$ για $a = 0.8$.

Ξεκινώντας τη διερεύνηση στη συμπεριφορά σωματιδίου με τη μελανή οπή, μελετάται η περίπτωση $a = 0$, δηλαδή στο όριο της μελανής οπής Schwarzschild, καθώς και αρκετά κοντά στο όριο, $a = 0.2$. Επιλέγεται η μελέτη της ακτινικής πτώσης, ένα σωματίδιο από κάποια απόσταση r εκτός της μελανής οπής πέφτει ελεύθερο προς εκείνη.

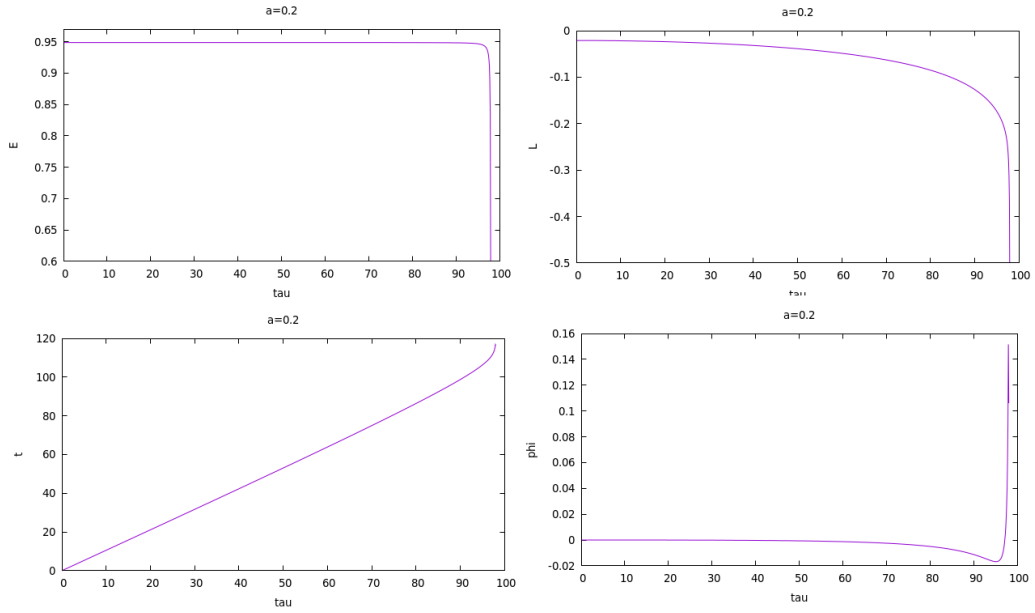


Σχήμα 11: Συνάρτηση r ως προς τον ιδιόχρονο τ . Αρχικές συνθήκες και για τις δύο περιπτώσεις $M = 1$, $r = 20$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = 0$.

Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, φαίνεται πως οι ποσότητές μας απειρίζονται.



Σχήμα 12: Αρχικές συνθήκες $M = 1$, $r = 20$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = 0$, $E = 0.9487$, $L = 0$. Με ορίζοντα $r_+ = 2$.



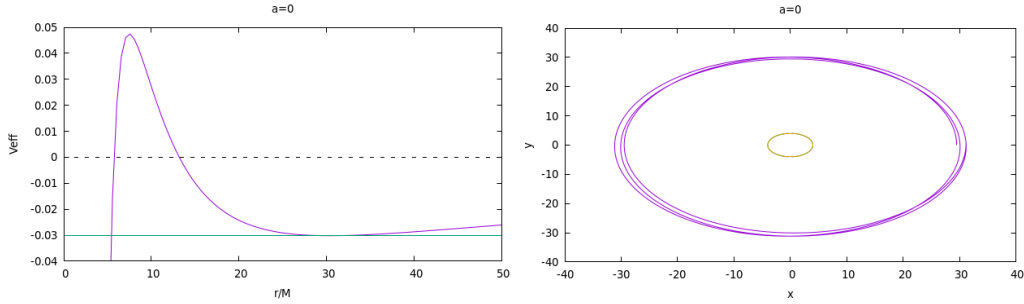
Σχήμα 13: Αρχικές συνθήκες $M = 1$, $r = 20$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = 0$, $E = 0.9487$, $L = -2.1082$. Με ορίζοντα $0.02 \leq r \leq 1.98$.

Αυτό έχει κάποια λογική εφόσον συμβαίνει κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής, και για τις δύο περιπτώσεις, καθώς ύστερα από εκείνο το όριο το σωματίδιο πέφτει στο εσωτερικό της μελανής οπής και καθίσταται αδύνατη η μελέτη της συμπεριφοράς του. Αντίστοιχα και η L που έχει μια γενική αστάθεια, κοντά στον ορίζοντα μεγαλώνει και εκείνη με έντονο ρυθμό. Αυτές οι συμπεριφορές φαίνονται εντονότερα για $a = 0.2$, δηλαδή έχοντας κάποια περιστροφή αλλά παραμένοντας κοντά στο όριο για μελανή οπή Schwarzschild.

Από τις αναπαραστάσεις σε διαγράμματα των σταθερών καθώς και της χρονικής εξέλιξης των t, r και ϕ , (σχήματα 11, 12, 13) παρατηρείται αυτή η αστάθεια κοντά στον ορίζοντα.

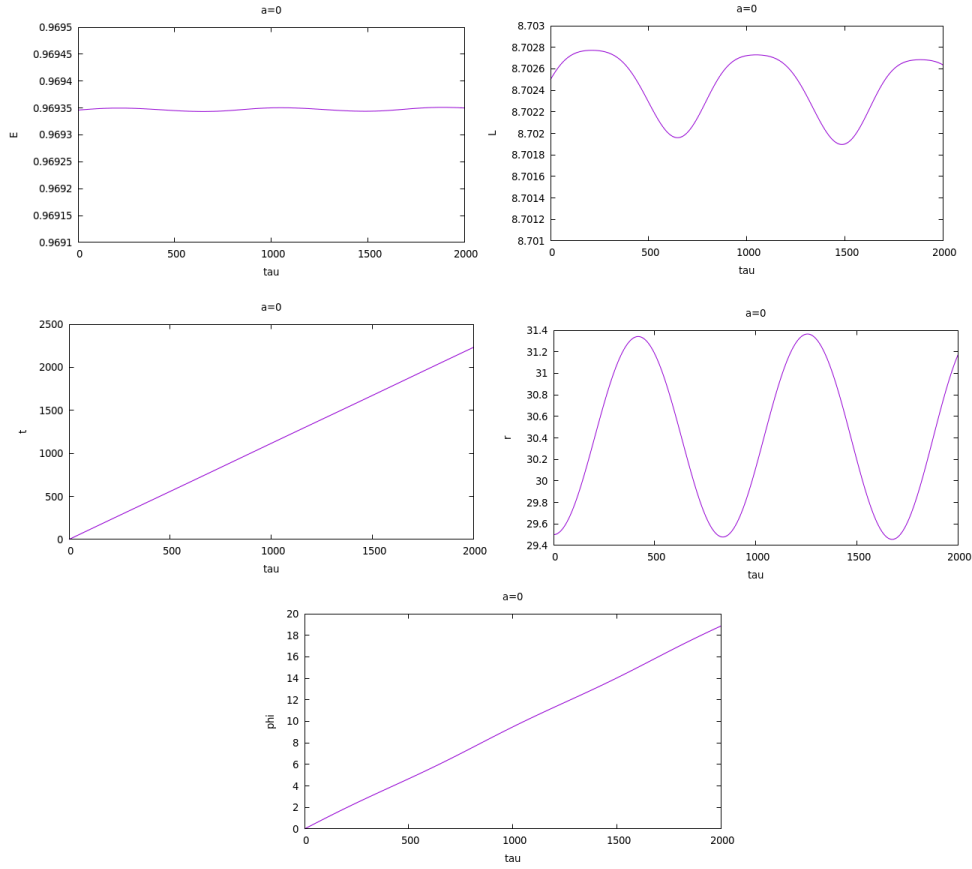
Στη συνέχεια, παραμένοντας σε μελανή οπή Schwarzschild αναζητείται μία δέσμια τροχιά γύρω από τον ορίζοντα. Και αυτό φαίνεται στο σχήμα 14 πως το σωματίδιο εκτελεί δέσμια ελλειπτική τροχιά γύρω από τη μελανή οπή.

Από τις παρακάτω γραφικές αναζητήθηκαν τα σημεία στα ενεργειακά διαγράμματα όπου ταυτίζεται η γραφική αναπαράσταση του V_{eff} με το $(E^2 - 1)/2$ και από τα διαγράμματα των τροχιών αναζητήθηκαν οι τιμές στο πιο κοντινό σημείο και αντίστοιχα στο πιο μακρινό από τον ορίζοντα της μελανής οπής. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα έχουμε μία σταθερή τροχιά γύρω από τον ορίζοντα και βλέπουμε η τροχιά να γίνεται μεταξύ των τιμών $[29.457, 31.1905]$ από τον άξονα x το οποίο μπορεί να παρατηρηθεί από το ενεργειακό διάγραμμα μεταξύ των τιμών $[28.7696, 32.1822]$ στον άξονα r/M . Τα σφάλματα είναι σε αποδεκτά επίπεδα.



Σχήμα 14: Αναπαράσταση V_{eff} (αριστερά) και τροχιάς (δεξιά). Αρχικές συνθήκες $M = 2$, $r = 29.5$, $E = 0.9298$, $L = 8.7025$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = 0.01$ και με ορίζοντα $r_+ = 4$, ο οποίος ταυτίζεται με την εργόσφαιρα και αναπαρίσταται με το πράσινο χρώμα. Στο διάγραμμα του δυναμικού η πράσινη γραμμή αναπαριστά την ενέργεια $\frac{E^2 - 1}{2}$.

Παρουσιάζονται και διαγράμματα των σταθερών και συντεταγμένων, σχήμα 15.



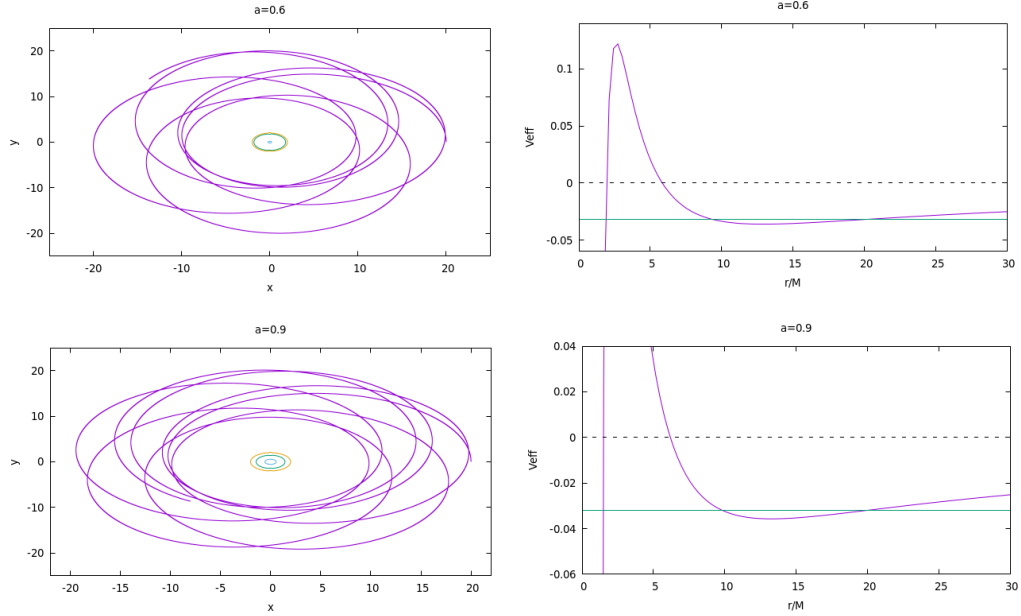
Σχήμα 15: Αρχικές συνθήκες $M = 2$, $r = 29.5$, $E = 0.9298$, $L = 8.7025$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = 0.01$ και με ορίζοντα $r_+ = 4$.

Συνεχίζοντας τη μελέτη για την τιμή της σταθεράς Kerr, η οποία μεγαλώνει μέχρι να πλησιάσει κοντά σε οριακή μελανή οπή, παρατηρείται καλύτερη ευστάθεια στις σταθερές, ειδικά την E .

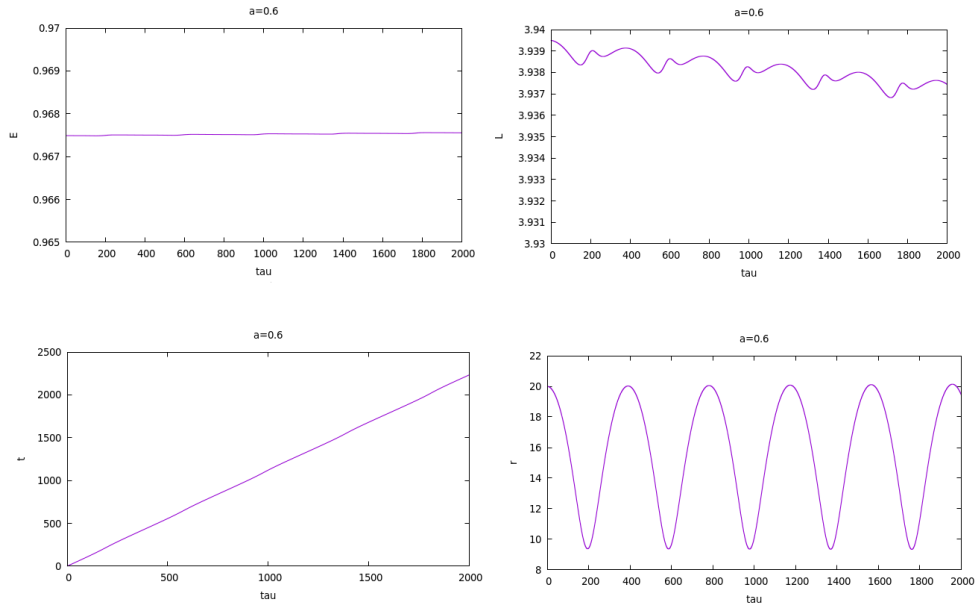
Εξετάζοντας για $a = 0.6$ και $a = 0.9$ σε κάποια απόσταση μακριά από τη μελανή οπή παρατηρείται δέσμια τροχιά γύρω της.

Στα σχήματα 16, 17 και 18 οι τροχιές των σωματιδίων από κάποια απόσταση μακριά από τη μελανή οπή, φαίνεται να καταλήγουν σε δέσμια τροχιά γύρω από εκείνη. Για μεγαλύτερη περιστροφή φαίνεται πιο έντονη και η τροχιά.

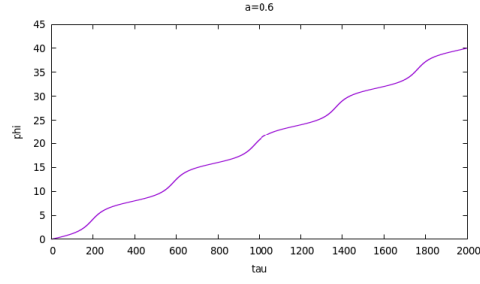
Στο σχήμα 16 υπάρχει τροχιά γύρω από τη μελανή οπή με το κοντινότερο σημείο να είναι το $x = 9.5635$ και για το ενεργειακό διάγραμμα $r = 9.3854$ και πιο απομακρυσμένο σημείο να είναι το $x = 19.9811$ και $r = 20.0133$, όταν είναι $a = 0.6$. Για $a = 0.9$, τότε οι αντίστοιχες τιμές είναι $x = 9.8143$ και $r = 9.8188$ για το κοντινότερο σημείο και $x = 19.6474$ και $r = 20.0133$ για το πιο απομακρυσμένο. Τα σφάλματα είναι σε αποδεκτά επίπεδα.



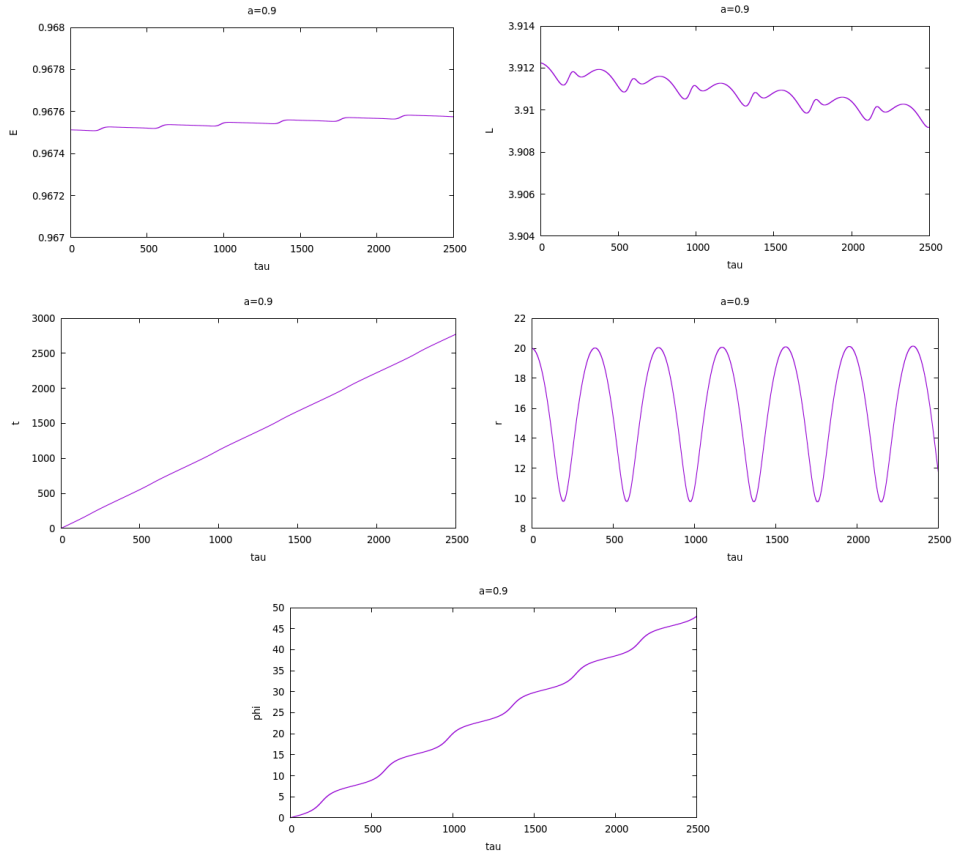
Σχήμα 16: Αναπαράσταση δέσμιας τροχιάς. Αρχικές συνθήκες και για τις δύο περιπτώσεις $a = 0.6$ και $a = 0.9$, $M = 1$, $r = 20$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = 0.01$ με ορίζοντες $r_+ = 1.8, r_- = 0.2$ και $r_+ = 1.44, r_- = 0.56$, αναπαρίστανται με το πράσινο και μπλε χρώμα, αντίστοιχα. Η εργόσφαιρα με κίτρινο. Στο διάγραμμα του δυναμικού η πράσινη γραμμή αναπαριστά την ενέργεια $\frac{E^2 - 1}{2}$



Σχήμα 17: Αρχικές συνθήκες $M = 1$, $r = 20$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = 0.01...$



Σχήμα 17: ...συνέχεια, με ορίζοντες $r_+ = 1.8, r_- = 0.2$. $E = 0.9675$ και $L = 3.9395$.

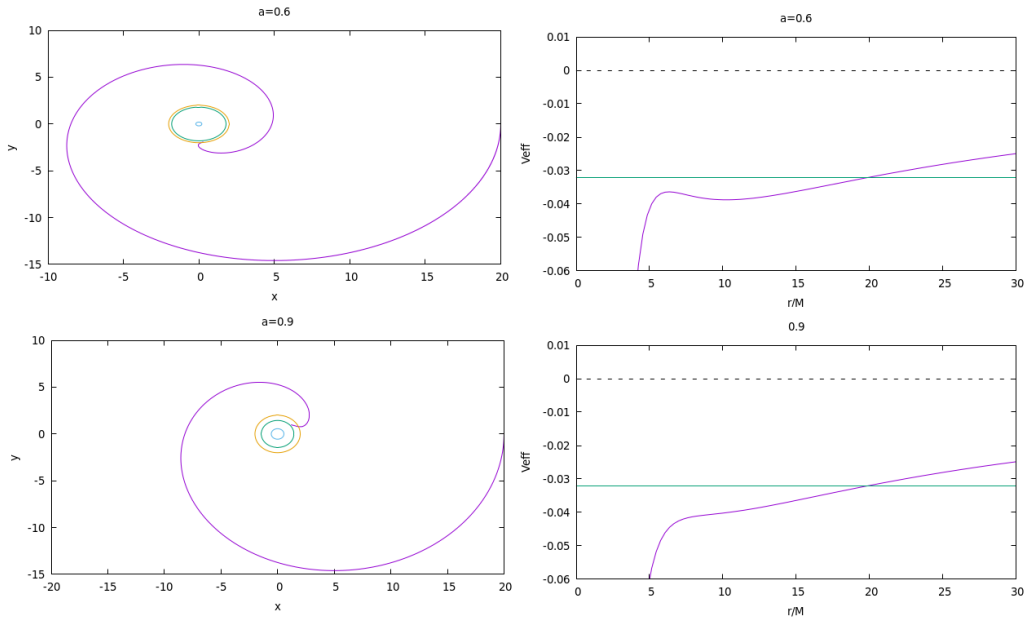


Σχήμα 18: Αρχικές συνθήκες $M = 1, r = 20, \dot{r} = 0, \dot{\phi} = 0.01$ με ορίζοντες $r_+ = 1.44, r_- = 0.56$. $E = 0.9675$ και $L = 3.9122$.

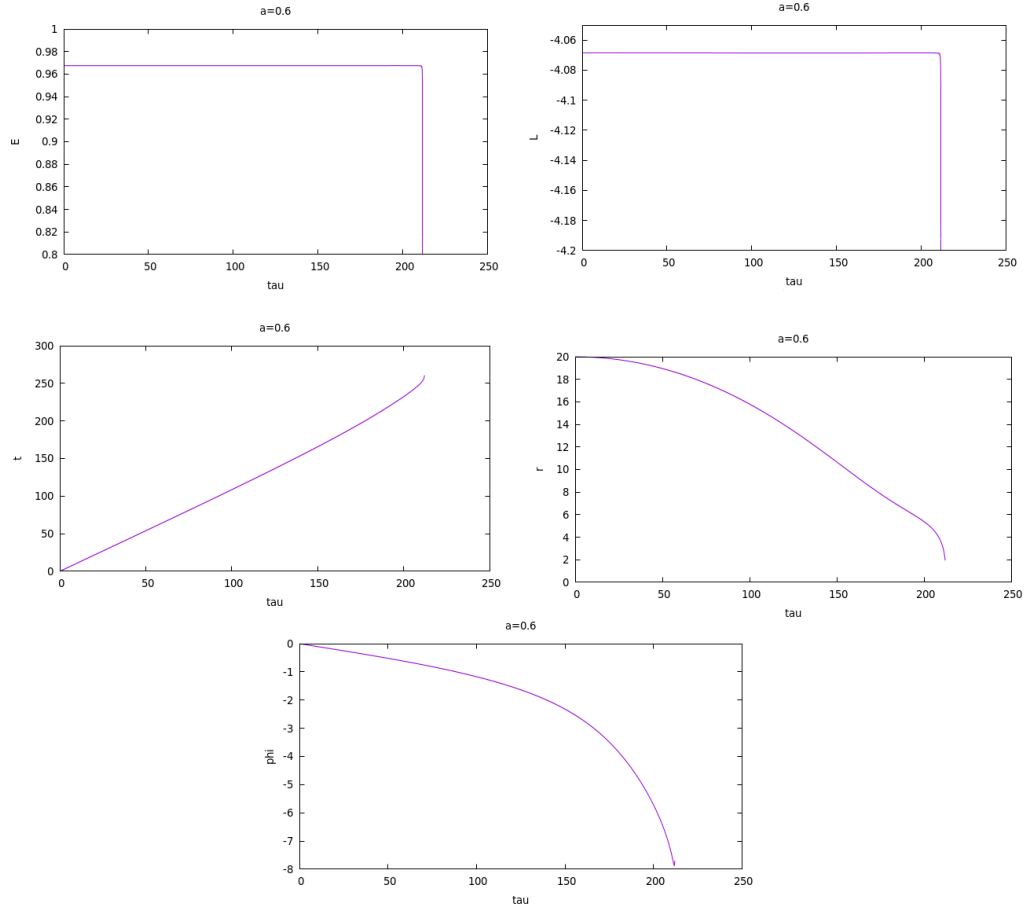
Σε όλες τις γραφικές των δεδομένων παρατηρείται μία περιοδικότητα στις εναλλαγές των τιμών, που θεωρητικά έχει βάση καθώς πλησιάζει και απομακρύνεται από το κέντρο της μελανής οπής.

Στις παραπάνω αρχικές συνθήκες εξετάζεται και η περίπτωση για αρνητική τιμή στη στροφορμή, δηλαδή το σωματίδιο να κινείται αντιπεριστροφικά με τη μελανή οπή.

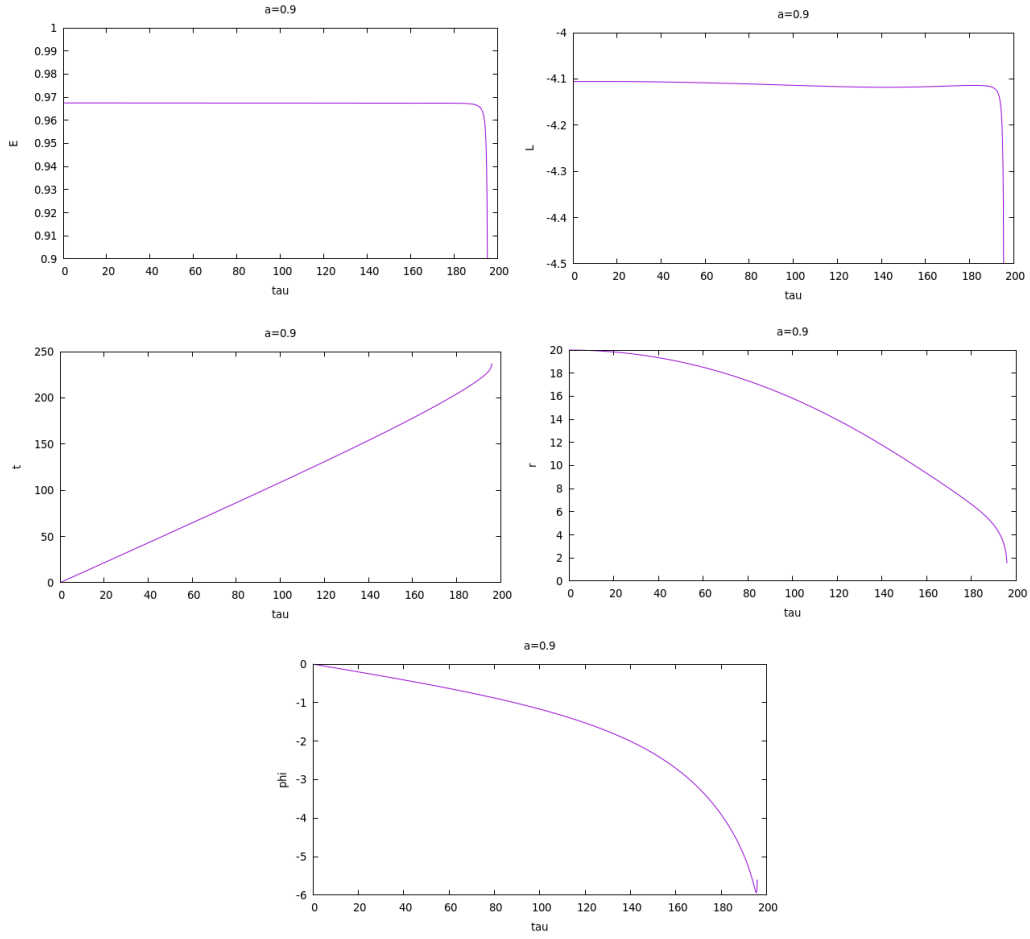
Εκείνο που παρατηρείται είναι πως τώρα δεν υπάρχει δέσμια τροχιά αλλά τροχιά πτώσης προς τη μελανή οπή. Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή του κεφαλαίου εμφανίζεται σφάλμα μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, έτσι υποθέτουμε πως αντικατοπτρίζει την πτώση στο κέντρο της μελανής οπής όπου απειρίζονται τα δεδομένα. Πιο έντονη διακρίνεται η πτώση στο μεγαλύτερο a , σχήμα 19.



Σχήμα 19: Διάγραμμα τροχιών. Αρχικές συνθήκες και για τις δύο περιπτώσεις $M = 1$, $r = 20$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = -0.01$ με ορίζοντες $r_+ = 1.8$, $r_- = 0.2$ και $r_+ = 1.4358$, $r_- = 0.5641$, αναπαρίστανται με το πράσινο και μπλε χρώμα, αντίστοιχα. Η εργόσφαιρα με κίτρινο. Στο διάγραμμα του δυναμικού η πράσινη γραμμή αναπαριστά την ενέργεια $\frac{E^2 - 1}{2}$. Τα $E = 0.9675$, $L = -4.0685$ και $E = 0.9675$, $L = -4.1058$.



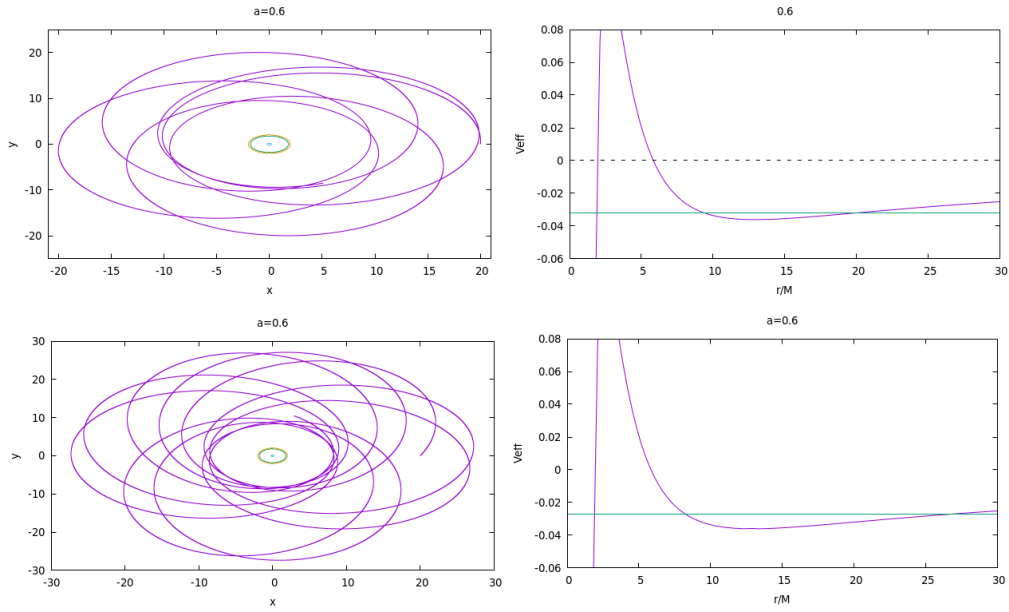
Σχήμα 20: Αρχικές συνθήκες $M = 1$, $r = 20$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = -0.01$ με ορίζοντες $r_+ = 1.8$, $r_- = 0.2$. $E = 0.9675$ και $L = -4.0685$.



Σχήμα 21: Αρχικές συνθήκες $M = 1$, $r = 20$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = -0.01$ με ορίζοντες $r_+ = 1.4358$, $r_- = 0.5641$. $E = 0.9675$ και $L = -4.1058$. Στο διάγραμμα V_{eff} το V_+ έχει χρώμα μωβ και το V_- χρώμα πράσινο.

Αυτή η συμπεριφορά πτώσης φαίνεται και από τα διαγράμματα των σταθερών τιμών (σχήματα 20 και 21).

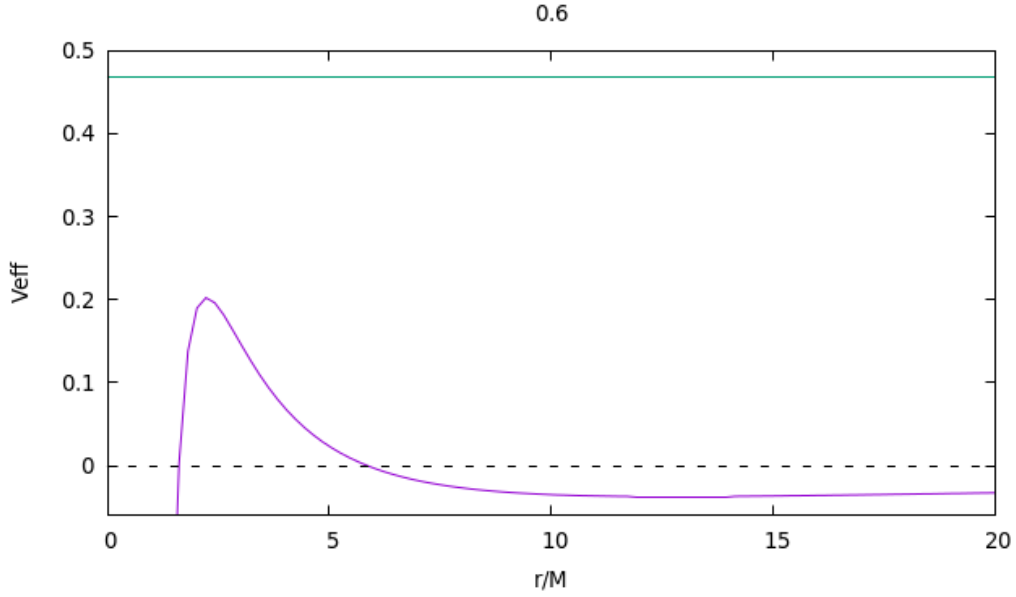
Μπορεί ακόμα να μελετηθεί τι συμβαίνει στις παραπάνω αρχικές συνθήκες αλλά τώρα να αυξάνεται το $\dot{r}$. Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούνται δέσμιες τροχιές γύρω από τη μελανή οπή. Η περίπτωση του $\dot{r} = 1$ δεν εμφανίζεται καθώς αποκτά $E^2 > 1$ και διαφεύγει από τη μελανή οπή.



Σχήμα 22: Αρχικές συνθήκες $M = 1$, $r = 20$, $\dot{\phi} = 0.01$ με ορίζοντες $r_+ = 1.8$, $r_- = 0.2$, η πάνω εικόνα το $\dot{r} = 0.01$ με $E = 0.9675$ και $L = 3.9395$ και στην κάτω το $\dot{r} = 0.1$ με $E = 0.9726$ και $L = 3.9392$. Στο διάγραμμα του δυναμικού η πράσινη γραμμή αναπαριστά την ενέργεια $\frac{E^2 - 1}{2}$

Όσον αφορά το σχήμα 22, όπου παρουσιάζεται δέσμια τροχιά γύρω από τη μελανή οπή για το πάνω με $\dot{r} = 0.01$, τα σημεία είναι $x = 9.4341$ και $r = 9.3854$ για το πιο κοντινό και αντίστοιχα για εκείνο πιο μακριά να είναι το $x = 19.9297$ και $r = 20.0133$. Για την τροχιά με $\dot{r} = 0.1$ οι τιμές είναι $x = 8.2375$ με $r = 8.2316$ και $x = 27.0327$ με $r = 26.8893$. Τα σφάλματα είναι σε αποδεκτά επίπεδα.

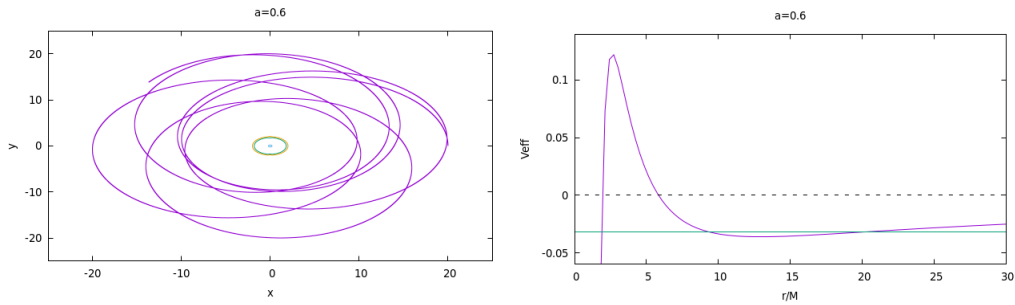
Για μεγαλύτερες τιμές στο $\dot{r}$ η ενέργεια ξεπερνάει και δυναμικό και το σωματίδιο διαφεύγει στο άπειρο χωρίς να πλησιάσει τη μελανή οπή.



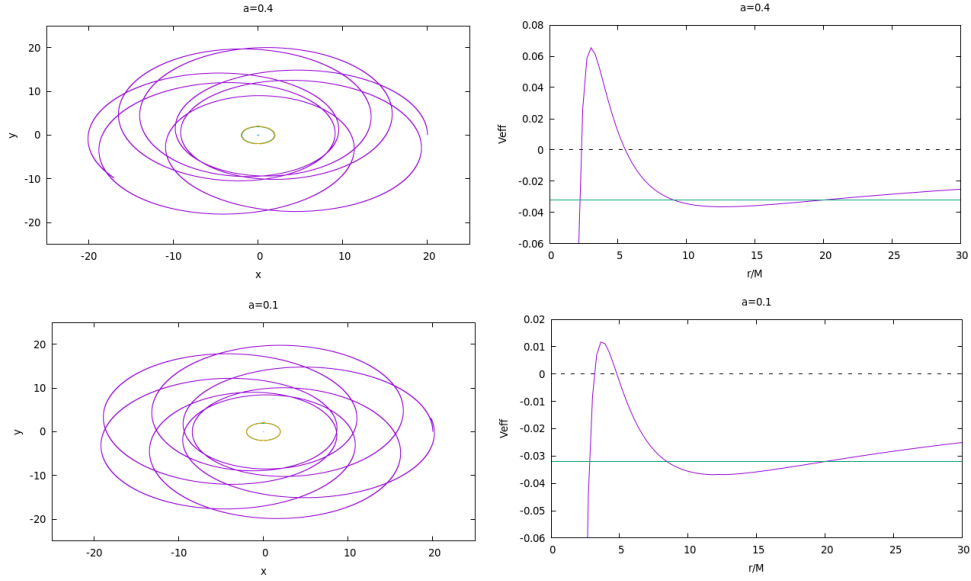
Σχήμα 23: Αρχικές συνθήκες $M = 1$, $r = 20$, $\dot{r} = 1$ και $\dot{\phi} = 0.01$ με ορίζοντες $r_+ = 1.8$, $r_- = 0.2$, με $E = 1.3911$ και $L = 3.9113$. Στο διάγραμμα του δυναμικού η πράσινη γραμμή αναπαριστά την ενέργεια $\frac{E^2-1}{2}$

Για το $a = 0.9$ τα αποτελέσματα είναι σχεδόν πανομοιότυπα, οπότε επιλέγεται να μη παρουσιαστούν.

Ακόμα, στις αρχικές συνθήκες που μελετούνται παραπάνω, δοκιμάζεται από κάποια απόσταση μακριά από τη μελανή οπή, με τους ίδιους χρόνους να μικραίνει η σταθερά Kerr, για να μελετηθεί η συμπεριφορά της τροχιάς. Φαίνονται όλες να είναι δέσμιες τροχιές χωρίς ιδιαίτερες διαφορές.



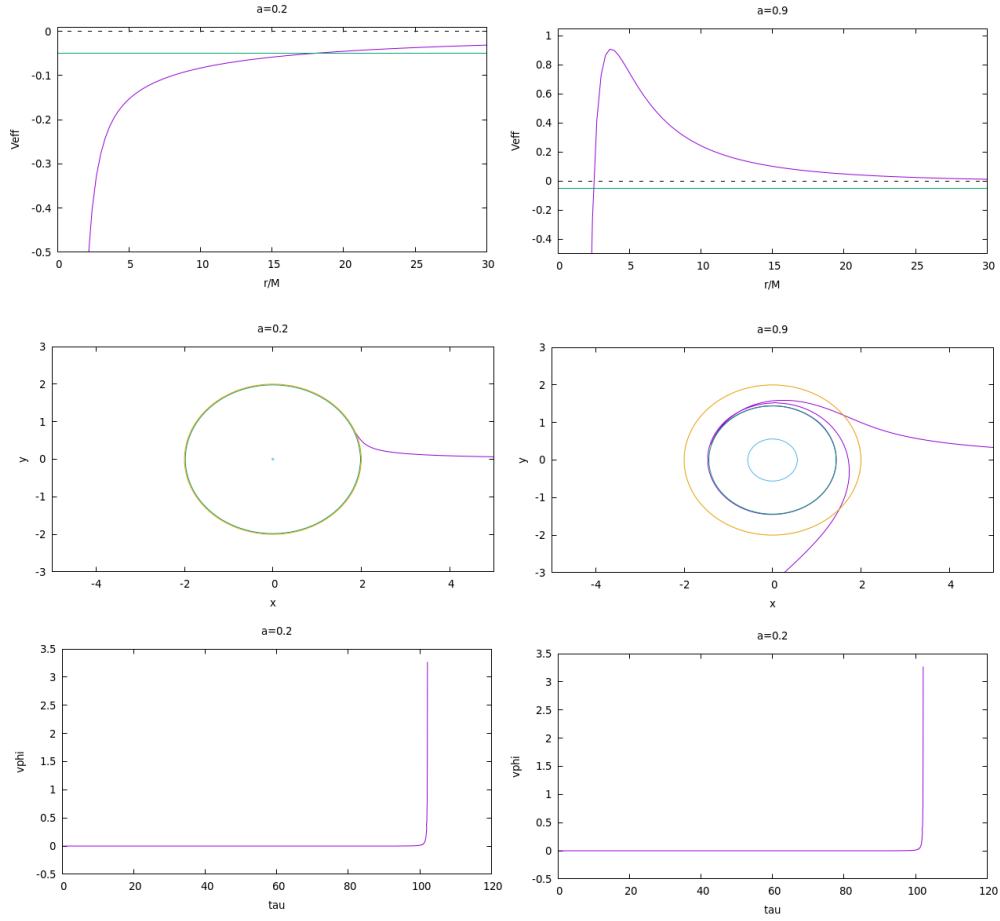
Σχήμα 24: Αρχικές συνθήκες $M = 1$, $r = 20$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = 0.01$. Για $a = 0.6$ είναι $r_+ = 1.8$, $r_- = 0.2$ και $E = 0.949$, $L = 3.9141...$



Σχήμα 24: ...συνέχεια. Για $a = 0.4$ είναι $r_+ = 1.9165$, $r_- = 0.0835$ και $E = 0.9489$, $L = 3.9596$. Για $a = 0.1$ είναι $r_+ = 1.9949$, $r_- = 0.005$ και $E = 0.9488$, $L = 3.9896$. Οι ορίζοντες αναπαρίστανται με μπλε και πράσινο, αντίστοιχα, και η εργόσφαιρα με κίτρινο χρώμα. Στο διάγραμμα του δυναμικού η πράσινη γραμμή αναπαριστά την ενέργεια $\frac{E^2-1}{2}$

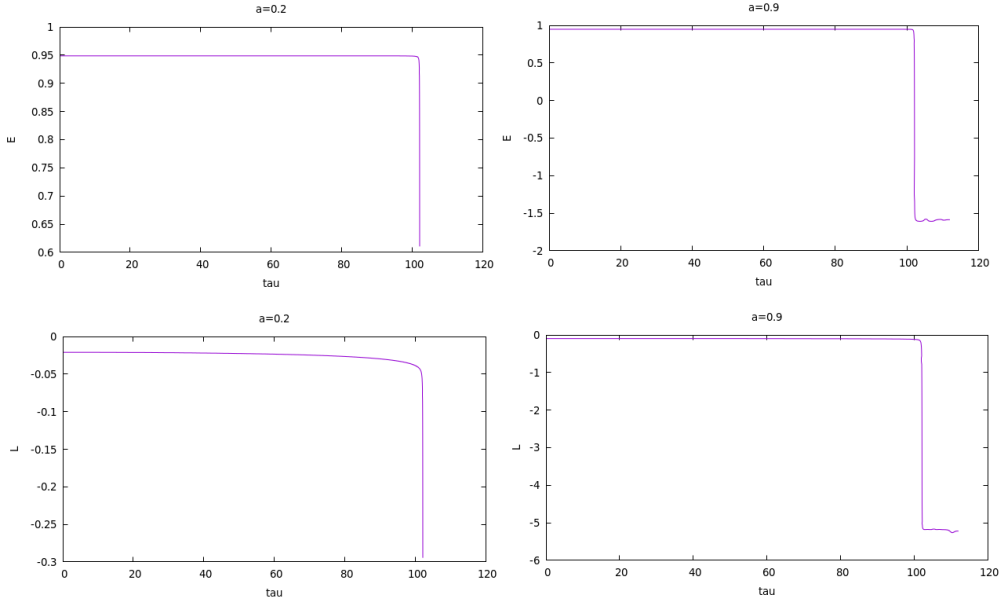
Στο σχήμα 24, όπως και στα παραπάνω που αναφέρθηκαν, είναι για το $a = 0.6$ το σημείο πιο κοντά στον ορίζοντα είναι $x = 9.5635$ με $r = 9.3854$ και το σημείο πιο μακριά από αυτόν $x = 19.9811$ με $r = 20.0133$, ομοίως και για τις υπόλοιπες σταθερές Kerr του σχήματος. Για το $a = 0.4$ θα είναι $x = 9.0841$ με $r = 9.0502$ και $x = 20.0643$ με $r = 20.0257$. Το τελευταίο για $a = 0.1$ είναι $x = 8.4105$ με $r = 8.4404$ και $x = 20.1797$ με $r = 20.0344$. Τα σφάλματα είναι σε αποδεκτά επίπεδα.

Τέλος θα διερευνήσουμε το frame dragging στη μελανή οπή. Δηλαδή ένα σωματίδιο με μηδενική αρχική στροφορμή το οποίο, καθώς πέφτει προς τη μελανή οπή ερχόμενο από το άπειρο, τελικά θα αποκτήσει στροφορμή. Στο σχήμα 25, εξετάζονται οι τιμές του $a = 0.2$, $a = 0.9$. Το σωματίδιο ξεκινάει από απόσταση $r = 20$ έξω από τη μελανή οπή με $\dot{\phi} = 0$. Όπως φαίνεται από τις αρνητικές τιμές του L δεν καταφέρνουμε να έχουμε μηδενική στροφορμή για έναν παρατηρητή ZAMO, αλλά θα προσπαθήσουμε να δούμε αν η μελανή οπή θα αλλάξει την κατεύθυνση του σωματιδίου από αντιπεριστροφικά $aL < 0$ σε περιστροφή σύμφωνη με εκείνη της μελανής οπής.



Σχήμα 25: Αρχικές συνθήκες για τα διάφορα a είναι $M = 1$, $r = 20$ (για καλύτερη ευκρίνεια του διαγράμματος βλέπουμε μόνο την περιοχή μεταξύ $-5 < r < 5$), $\phi = 0$ με ορίζοντες για $a = 0.2$ να είναι $r_+ = 1.9797$, $r_- = 0.0202$ και για $a = 0.9$ να είναι $r_+ = 1.4358$, $r_- = 0.5641$, αναπαρίστανται με το πράσινο και μπλε χρώμα, αντίστοιχα. Η εργόσφαιρα με κίτρινο. Είναι $E_{0.2} = 0.9487$, $L_{0.2} = -2,1083$ και $E_{0.9} = 0.9487$, $L_{0.9} = -9,4874$. Στο διάγραμμα του δυναμικού η πράσινη γραμμή αναπαριστά την ενέργεια $\frac{E^2-1}{2}$. Τέλος τα διαγράμματα του $\dot{\phi}$ και για τα δύο a .

Παρατίθενται τα διαγράμματα των σταθερών ποσοτήτων και των μεταβλητών για το παραπάνω.



Σχήμα 26: Αρχικές συνθήκες $a = 0.2$, $M = 1$, $r = 20$, $E = 0.9487$, $L = -2.1083$, $\dot{r} = 0.01$, $\dot{\phi} = 0$ και $a = 0.9$, $M = 1$, $r = 20$, $E = 0.9487$, $L = -9.4874$, $\dot{r} = 0.01$, $\dot{\phi} = 0$.

Και για τις δύο περιπτώσεις ξεκινώντας με μηδενική $\dot{\phi}$ βλέπουμε πως αποκτά ταχύτητα καθώς εισέρχεται στην εργόσφαιρα της μελανής οπής.

Για την περίπτωση $a = 0.2$ από το ενεργειακό διάγραμμα διακρίνουμε πως θα γίνει πτώση στη μελανή οπή, όπως και φαίνεται από τα υπόλοιπα και τις απότομες μειώσεις των τιμών των σταθερών. Η πτώση αυτή πιθανότατα να οφείλεται στη μικρή ποσότητα της σταθεράς Ker .

Στην περίπτωση $a = 0.9$ θα μπορούσαμε να πούμε πως έχουμε frame dragging καθώς αφού το σωματίδιο εισέρχεται στην εργόσφαιρα, μπαίνει σε κίνηση γύρω από τον ορίζοντα και στο τέλος αλλάζει κατεύθυνση και κινείται συμπεριστροφικά και εν τέλει διαφεύγει από τη μελανή οπή. Το τελευταίο θα μπορούσε να οφείλεται στη διαδικασία Penrose, όπου το σωματίδιο καθώς εισέρχεται στην εργοπεριοχή και η ενέργεια του γίνεται αρνητική, σχήμα 26, διασπάται σε δύο σωματίδια με το ένα να διαφεύγει και το άλλο να πέφτει στη μελανή οπή. Αλλά αυτό είναι κάτι που μόνο θα μπορούσαμε να το υποθέσουμε. Το ενεργειακό διάγραμμα θα μπορούσε να ερμηνευτεί είτε σαν τροχιά που καταλήγει στη μελανή οπή είτε σαν τροχιά, ερχόμενη από το άπειρο, διαφυγής.

Από όλη τη διαδικασία της ανάλυσης, φαίνεται να υπάρχουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα ακόμα και κάποια τα οποία δείχνουν πως ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε παράγει λογικά αποτελέσματα. Στην περίπτωση διασταυρώσεων,

αν υπήρχαν περισσότερα ερευνητικά άρθρα στις χρονοειδείς γεωδαιτικές της μετρικής Kerr, θα δινόταν μια πιο εμπειστατωμένη ανάλυση. Παραμένει, όμως, ένα θέμα που χρίζει περισσότερη εμπειρία και πιο πολύπλοκες διαδικασίες αριθμητικής ανάλυσης και απεικόνισης.

Α' Παράρτημα

Παρακάτω παρατίθεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τον αριθμητικό υπολογισμό. Οι εκφράσεις των γεωδαιτικών εξισώσεων έχουν χρησιμοποιηθεί από το notebook του xAct και xCoba, που μελετάει τις συντεταγμένες Boyer-Lindquist για την μετρική Kerr.

```
program kerrgeodesic
!This program will try and calculate the geodesic motion of a Kerr black hole
!in Boyer-Lindquist coordinates at the equatorial plane, theta=pi/2
implicit none
real(8) :: vt, vph, vr
real(8) :: ti, tf, dt, time
real(8) :: M, a, J, t, r, ph, r0, vt0, vr0, vph0, D, L, E, rp, rm, rep, rem
real(8) :: geot, geor, geoph, Vminus, Vplus, Veff
real(8) :: ddt, ddr, ddph
integer :: nt, i
real(8), parameter :: pi = 3.14159265, radian = pi/180.0

!Input:
print *, 'We are stationed around the equatorial plane, theta=pi/2.'
print *, 'Input black hole mass M and Kerr parameter a:'
read *, M, a
!—————Kerr parameter—————
if (a .eq. M) then
print *, 'This is a massive Kerr black hole and it is unstable.&
Please try with different values for either M and a.'
read *, M, a
else if (a .gt. M) then
print *, 'This metric does not describe a Kerr black hole,&
there is no horizon. It is a naked singularity ', &
'and we do not have a real solution, please enter different value for a.'
read *, a
else
end if

J = a*M
print *, 'M = ', M, ', a = ', a, 'and J = ', J
print *, 'Input initial position (r) and velocity (vr, vphi) of the particle:'
read *, r0, vr0, vph0
```

```

do while (r0 .lt. M + sqrt(M**2 - a**2))
if (r0 .lt. M + sqrt(M**2 - a**2)) then
print *, 'Please enter a value outside of the black hole horizon.'
read *, r0
endif
end do
print *, 'Enter Tf, Nt:'
read *, tf, nt

ti=0.0D0
time=0.0D0
dt = (tf - ti)/(nt - 1)
t=ti
ph=0.0D0
!—Horizon & Ergosphere of Black Hole—
rp = M + sqrt(M**2 - a**2)
rm = M - sqrt(M**2 - a**2)

if (D(M,a,r0,vr0,vph0) .lt. 0) then
print *, 'Please run program again.'
stop
else if (D(M,a,r0,vr0,vph0) .gt. 0) then
vt0 = ((2*M*a*vph0)/r0 - sqrt(D(M,a,r0,vr0,vph0)))/(-2*(1 - 2*M/r0))
else if (D(M,a,r0,vr0,vph0) .eq. 0) then
vt0 = - (2*M*a*vph0)/(r0 - 2*M)
end if

print*, 'L= ', L(M,a,r0,vt0,vph0),',E= ', E(M,a,r0,vt0,vph0)

      open(unit=11, file='vel.dat')
      open(unit=12, file='pot.dat')
      open(unit=13, file='check.dat')
      write(11,*) t,r0,ph,vt0,vr0,vph0,E(M,a,r0,vt0,vph0),L(M,a,r0,vt0,vph0)
      write(12,*) time, t,r0,Veff(M,a,E(M,a,r0,vt0,vph0),L(M,a,r0,vt0,vph0),r0), &
          Vplus(L(M,a,r0,vt0,vph0),a,M,r0), Vminus(L(M,a,r0,vt0,vph0),a,M,r0), &
          E(M,a,r0,vt0,vph0)
      write(13,*) time,t,vt0,((r0**2 +a**2 +(2*a**2*M)/r0)*E(M,a,r0,vt0,vph0)-&
          ((2*a*M)/r0)*L(M,a,r0,vt0,vph0))/(r0**2 -2*M*r0 + a**2) ,&
          vph0,((1 -2*M/r0)*L(M,a,r0,vt0,vph0)+(2*a*M/r0)*E(M,a,r0,vt0,vph0))/&
          (r0**2 -2*M*r0 +a**2)

```

```

r=r0
vt=vt0
vr=vr0
vph=vph0

do i=2,nt
call RK(t,ddt,ddr,ddph,vt,vr,vph,ti,tf,dt,nt,a,M,r,ph,time)
write(11,*) time,t,r,ph,vt,vr,vph,E(M,a,r,vt,vph),L(M,a,r,vt,vph)
write(12,*) time,t,r,Veff(M,a,E(M,a,r,vt,vph),L(M,a,r,vt,vph),r), &
      Vplus(L(M,a,r,vt,vph),a,M,r),Vminus(L(M,a,r,vt,vph),a,M,r),&
      E(M,a,r,vt,vph)
write(13,*) time, t, vt,((r**2 +a**2 + (2*a**2*M)/r)*E(M,a,r,vt,vph) -&
      ((2*a*M)/r)*L(M,a,r,vt,vph))/(r**2 -2*M*r + a**2) ,&
      vph,((1 -2*M/r)*L(M,a,r,vt,vph)+(2*a*M/r)*E(M,a,r,vt,vph))/&
      (r**2 -2*M*r +a**2)
enddo
close(11)
close(12)
close(13)

end program kerrgeodesic
!=====

      !Functions=====
real(8) function D(M,a,r,vr,vph)
implicit none
real(8) :: M,a,r,vr,vph

D = 4.0D0*((r*vr**2*(r-2.0D0*M))/(r**2 -2.0D0*M*r + a**2) &
      + vph**2*(r**2 -2.0D0*M*r +a**2) + (1.0D0 - 2.0D0*M/r))
end function D
!=====

!Geodesics functions
!=====
real(8) function geot(M, a, vt, vph, vr, r)
implicit none
real(8) :: M, a, vt, vph, vr, r

geot = 0.25*(M*vr*(4*a**4*vt - a**5*vph - 4*a**2*vt*r**2 &
      + 5*a**3*vph*r**2 - 8*vt*r**4 +12*a*vph*r**4 &
      + a**3*vph*(a**2 - r**2) &

```

```

- 4*a*(a**3*vt + a*vt*r**2 - a**2*vph*r**2 - 3*vph*r**4))/&
(r**4*(a**2 + r*(-2*M + r)))

end function geot
!-----
real(8) function geoph(M, a, vt, vph, vr, r)
implicit none
real(8) :: M, a, vt, vph, vr, r

geoph = -((2*vr*(a*M*vt - a**2*M*vph + vph*r**2*(-2*M + r)))/&
(r**2*(a**2 + r*(-2*M + r))))

end function geoph
!-----
real(8) function geor(M, a, vt, vph, vr, r)
implicit none
real(8) :: M, a, vt, vph, vr, r

geor = -((a**2*M*vph**2*r*(a**2 + r*(-2*M + r))**2 - &
vph*r*(2*a*M*vt + vph*r**3)*(a**2 + r*(-2*M + r))**2 + &
r*(a**4*M*vt**2 + a**2*r*(-4*M**2*vt**2 &
+ 2*M*vt**2*r + vr**2*r**2) + &
M*r**2*(4*M**2*vt**2 - 4*M*vt**2*r + (vt**2 - vr**2)*r**2)))/&
(r**5*(a**2 + r*(-2*M + r))))

end function geor
!-----
!=====
!-----Constants Functions-----
real(8) function L(M,a,r,vt,vph)
implicit none
real(8) ::M,a,r,vt,vph

L = -((2*M*a)/r)*vt + ((r**2 + a**2 +(2*M*a**2)/r))*vph
end function L
!-----
real(8) function E(M,a,r,vt,vph)
implicit none
real(8) ::M,a,r,vt,vph

```

```

E = (1-(2*M)/(r))*vt + ((2*M*a)/r)*vph
end function E
!_____
!=====
!-----Potentials-----
real(8) function Vplus(L,a,M,r)
implicit none
real(8) :: L,a,M,r

Vplus = (L*(-2*M*a/r + sqrt(r**2 - 2*M + a**2)))/(r**2 + a**2 + 2*M*a**2/r)

end function Vplus
!_____
real(8) function Vminus(L,a,M,r)
implicit none
real(8) :: L,a,M,r

Vminus = (L*(-2*M*a/r - sqrt(r**2 - 2*M + a**2)))/(r**2 + a**2 + 2*M*a**2/r)

end function Vminus
!_____
real(8) function Veff(M,a,E,L,r)
implicit none
real(8) :: M,a,E,L,r

Veff = -M/r + (L**2 - a**2*(E**2-1))/(2*r**2) - (M*(L-a*E)**2)/(r**3)

!Subroutines-----
subroutine RK(t,ddt,ddr,ddph,vt,vr,vph,ti,tf,dt,nt,a,M,r,ph,time)
implicit none
real(8) :: t, dt,ti,tf,vt,vr,vph,time
real(8) :: L,E,a,M,r,ph
real(8) :: gtt, gtph, gphph, ddt, ddph, ddr, geot, geor, geoph
real(8) :: k11,k12,k13,k14,k21,k22,k23,k24,k31,k32,k33,k34,k41,k42,k43,k44
real(8) :: kvt1,kvt2,kvt3,kvt4,kvr1,kvr2,kvr3,kvr4,kvph1,kvph2,kvph3,kvph4
real(8) :: h,h2,h6
integer :: nt

h = dt
h2 = 0.5D0*h
h6 = h/6.0D0

```

!First group:

kvt1 = vt

kvr1 = vr

kvph1 = vph

!_____

k11 = geot(M, a, vt, vph, vr, r)

k21 = geor(M, a, vt, vph, vr, r)

k31 = geoph(M, a, vt, vph, vr, r)

!Second group:

kvt2 = vt + h2*k11

kvr2 = vr + h2*k21

kvph2 = vph + h2*k31

!_____

k12 = geot(M, a, vt+h2*k11, vph+h2*k21, vr+h2*k31, r+h2*kvr1)

k22 = geor(M, a, vt+h2*k11, vph+h2*k21, vr+h2*k31, r+h2*kvr1)

k32 = geoph(M, a, vt+h2*k11, vph+h2*k21, vr+h2*k31, r+h2*kvr1)

!Thirrd group:

kvt3 = vt + h2*k12

kvr3 = vr + h2*k22

kvph3 = vph + h2*k32

!_____

k13 = geot(M, a, vt+h2*k12, vph+h2*k22, vr+h2*k32, r+h2*kvr2)

k23 = geor(M, a, vt+h2*k12, vph+h2*k22, vr+h2*k32, r+h2*kvr2)

k33 = geoph(M, a, vt+h2*k12, vph+h2*k22, vr+h2*k32, r+h2*kvr2)

!Fourth Group:

kvt4 = vt + h*k13

kvr4 = vr + h*k23

kvph4 = vph + h*k33

!_____

k14 = geot(M, a, vt+h*k13, vph+h*k23, vr+h*k33, r+h2*kvr3)

k24 = geor(M, a, vt+h*k13, vph+h*k23, vr+h*k33, r+h2*kvr3)

k34 = geoph(M, a, vt+h*k13, vph+h*k23, vr+h*k33, r+h2*kvr3)

!_____

time = time + h

```
t = t + h6*(kvt1 + 2.0D0*(kvt2 + kvt3) + kvt4)
r = r + h6*(kvr1 + 2.0D0*(kvr2 + kvr3) + kvr4)
ph= ph + h6*(kvph1 + 2.0D0*(kvph2 + kvph3) + kvph4)
```

```
vt = vt + h6*(k11 + 2.0D0*(k12 + k13) + k14)
vr = vr + h6*(k21 + 2.0D0*(k22 + k23) + k24)
vph = vph + h6*(k31 + 2.0D0*(k32 + k33) + k34)
```

```
end subroutine RK
```

```
!_____
```

Αναφορές

- [1] James B. Hartle (2003), Βαρύτητα: Μια Εισαγωγή στη Γενική Σχετικότητα του Einstein
- [2] Matt Visser (2008), The Kerr spacetime: A brief introduction
- [3] S. Chandrasekhar (1998), The Mathematical Theory of Black Holes
- [4] Barret O'Neill (2014), The Geometry of Kerr Black Holes
- [5] Valeria Ferrari, Leonardo Gualtieri, Paolo Pani (2020), General Relativity and its Applications
- [6] Roy P. Kerr (1963), Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics
- [7] Roy P. Kerr, Alfred Schild (2009), Republication of: A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations
- [8] Chi-kwan Chan, Lia Medeiros, Feryal Özel, Dimitrios Psaltis (2018), GRay2: A General Purpose Geodesic Integrator for Kerr Spacetimes
- [9] Schutz B. F. (1999), Geometrical Methods of Mathematical Physics
- [10] Eva Hackmann (2010), Geodesic equations in black hole space-times with cosmological constant
- [11] Κωνσταντίνος Ν. Αναγνωστόπουλος (2015), Υπολογιστική Φυσική: Μία Πρακτική Εισαγωγή στην Υπολογιστική Φυσική και τον Επιστημονικό Προγραμματισμό