

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Ένα σωματίδιο μάζας M είναι αναγκασμένο να κινείται στην επιφάνεια μιάς σφαίρας ακτίνας R . Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας του σωματιδίου.

Άσκηση 2.

Ένα σωματίδιο μάζας M κινείται επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας R . Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας του σωματιδίου.

Άσκηση 3.

Να δείξετε ότι σε μία κατάσταση με καθορισμένη τιμή του L_z οι μέσες τιμές των L_x και L_y είναι ίσες με το μηδέν.

Άσκηση 4.

Ένα σωματίδιο μάζας M κινείται υπό την επίδραση του κεντρικού δυναμικού $V(r)$ όπου:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & , r > \alpha \\ 0 & , r < \alpha \end{cases}$$

Δηλαδή βρίσκεται μέσα σε ένα σφαιρικό πηγάδι δυναμικού.

- Γράψτε την Χαμιλιτονιακή του σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες και ξεχωρίστε τον όρο της στροφορμής.
- Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του σωματιδίου για στροφορμή $l = 0$.

Άσκηση 5.

Εάν \vec{A} και \vec{B} είναι δυο τυχόντα διανύσματα και σ_k οι πίνακες του Pauli, αποδείξτε την σχέση:
 $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

Άσκηση 6.

Εάν J_x , J_y και J_z είναι οι τελεστές που παριστάνουν τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος της στροφορμής.

- Υπολογίστε τον τελεστή $A = e^{i\gamma J_y} J_z e^{-i\gamma J_y}$ όπου γ είναι ένας πραγματικός αριθμός.
Υπόδειξη: υπολογίστε το $\frac{dA}{d\gamma}$ και $\frac{d^2A}{d\gamma^2}$.
- Δείξτε ότι η συνάρτηση $e^{-i(\frac{\pi}{2\hbar})J_y} Y_{jm}$ είναι ιδιοσυνάρτηση των \vec{J}^2 και J_x .

Άσκηση 7.

- α) Βρείτε τον πίνακα που παριστάνει την προβολή του διανύσματος του spin σε μια τυχούσα κατεύθυνση (θ, ϕ) .
- β) Δείξτε ότι έχει ιδιοτιμές $\pm \frac{\hbar}{2}$
- γ) Βρείτε το διάνυσμα \mathcal{X} που περιγράφει μία κατάσταση με καθορισμένη προβολή του spin σε αυτή την διεύθυνση.

Άσκηση 8.

Ένα σωματίδιο έχει καθορισμένη τιμή του spin κατά τον άξονα των z ίση με $\left(\frac{\hbar}{2}\right)$.

- α) Υπολογίστε την μέση τιμή της συνιστώσας του spin στην κατεύθυνση \vec{n} που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των z .
- β) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρούμε σε μία μέτρηση της προβολής του spin κατά τον άξονα \vec{n} την τιμή $\left(\frac{\hbar}{2}\right)$ ή $\left(-\frac{\hbar}{2}\right)$ αντίστοιχα.

Άσκηση 9.

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(r, \theta, \phi)$ η οποία μετατίθεται με τους τρεις τελεστές της στροφορμής, είναι συνάρτηση μόνο του r .
- β) Εάν η συνάρτηση $F(x, y, z)$ μετατίθεται με μόνο έναν από τους τελεστές L_x, L_y ή L_z , τότε αυτή πρέπει να παρουσιάζει αξονική συμμετρία γύρω από τον αντίστοιχο άξονα συντεταγμένων.

Άσκηση 10.

- α) Να δράσετε στην ιδιοσυνάρτηση Y_{22} με τον τελεστή L_- και να προσδιορίσετε τις Y_{21} και Y_{20} . Να κάνετε την κανονικοποίηση.
- β) Προσδιορίστε επίσης τις $Y_{2,-1}$ και Y_{20} δρώντας στην $Y_{2,-2}$ με τον L_+ .

Άσκηση 11.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\Psi(\vec{r}) = cre^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta$ μπορεί να θεωρηθεί κυματοσυνάρτηση μιας στάσιμης κατάστασης ενός φυσικού συστήματος το οποίο έχει δυναμική ενέργεια $V(r) = \frac{\gamma}{r}$, όπου γ σταθερά, και ορισμένη στροφορμή.

Να υπολογίσετε:

- α) Τον κβαντικό αριθμό l της στροφορμής του συστήματος.
- β) Την ενέργεια E του συστήματος.
- γ) Την σταθερά γ .

Άσκηση 12.

Η κυματοσυνάρτηση ενός ατόμου του υδρογόνου την χρονική στιγμή $t = 0$ δίνεται από την σχέση $\Psi(\vec{r}, 0) = 2c\Psi_{211}(r, \theta, \phi) + c\Psi_{32,-1}(r, \theta, \phi)$

όπου οι κυματοσυναρτήσεις $\Psi_{211}(r, \theta, \phi)$ και $\Psi_{32,-1}(r, \theta, \phi)$ είναι κανονικοποιημένες.

Να υπολογίσετε την τυχαία χρονική στιγμή t

- α) Την κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση του ατόμου.
- β) Τις δυνατές τιμές της z συνιστώσας της στροφορμής.
- γ) Την αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου της στροφορμής.