

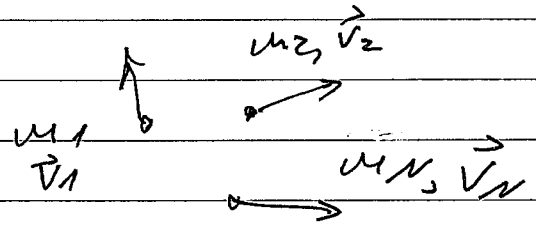
Συστήματα Σωματιδίων

Διατήρηση της Ορμής και της Στροφορμής

I ΟΡΜΗ

A Ορμή συστήματος σωματιδίων - εσωτερικές δυνάμεις

Έχουμε ένα σύστημα Ν σωματιδίων με μάζες m_k και ταχύτητες \vec{v}_k και ορμή $\vec{p}_k = m_k \vec{v}_k$



Ορμή ορμή του συστήματος

$$\vec{P}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k$$

Τα σωματίδια δέχονται εσωτερικές δυνάμεις από τα υπόλοιπα σωματίδια του συστήματος

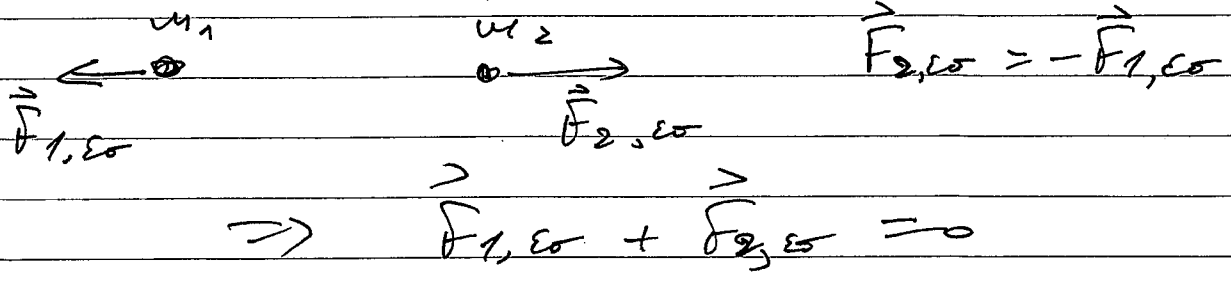
και εσωτερικές δυνάμεις εκτός του συστήματος.

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_{k,ext} + \vec{F}_{k,int}$$

$$\frac{d\vec{P}_0}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \dots + \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{k,int} + \sum_{k=1}^N \vec{F}_{k,ext}$$

Οι εσωτερικές δυνάμεις συνολικά αλληλοακυρώνονται νόμος δράσης - Αντίδρασης άμεσα σε δύο οποιαδήποτε σωματίδια.

Απόδειξη παίρνουμε δύο σώματα:



$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{P}_{\epsilon\sigma}}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{k,\epsilon\sigma} = \vec{F}_{\epsilon\sigma}}$$

Η αλληλεπίδραση των συστημάτων αλληλεπιδρώντων επιδράει μόνο των συστημάτων προς το σύστημα συνολικά.

B

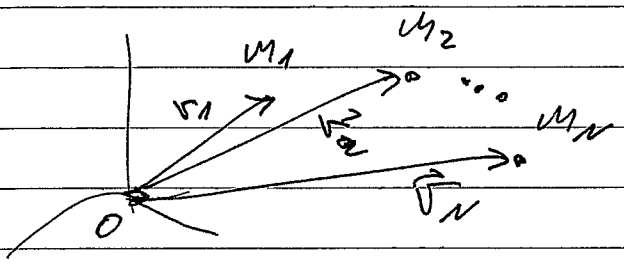
Κέντρο Μάζας

Ορισμός του Κέντρου Μάζας:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

$$M = \sum_{k=1}^N m_k \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k$$

Ταχύτητα Κέντρου Μάζας:



$$\frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N \vec{P}_k \Rightarrow \vec{P}_{\epsilon\sigma} = M \vec{V}_{CM}$$

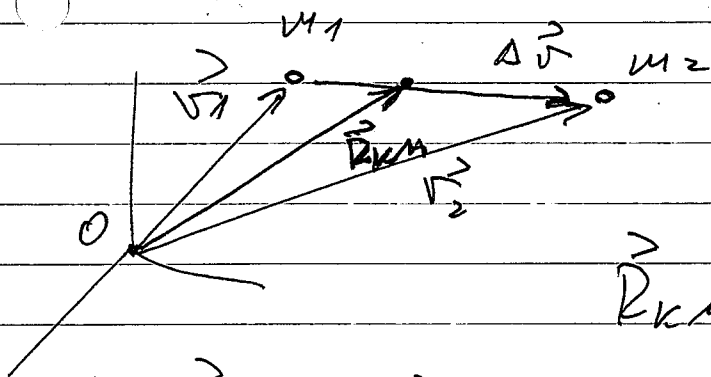
$$\Rightarrow \boxed{M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}}$$

(3)

Συναρτήσει του Κέντρου Μάζας ^{κοινοστούματoς} κινείται σαν ένα συμπαγές σώμα μάζας M υπό των επιδράσεων των εξωτερικών δυνάμεων.

Εφαρμογές:

(1) Δύο συμπαγή σώματα m_1, m_2



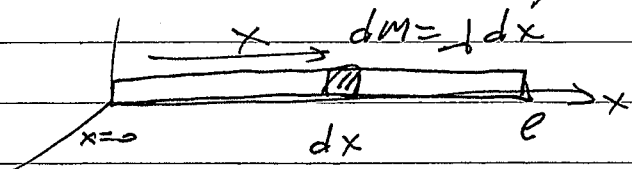
$$\vec{v}_1 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 + m_2 (\vec{v}_1 + \Delta\vec{v})$$

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_1 + \frac{m_2}{M} \Delta\vec{v}$$

(2) Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους l και μάζας M .



l = συνολική μάζας
ορα μάζα α μίκρο

$$l = \frac{M}{\rho}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N x_k dm_k \underset{\text{ράβδος}}{=} \frac{1}{M} \int_0^l x dm = \int_0^l \frac{x}{M} dx$$

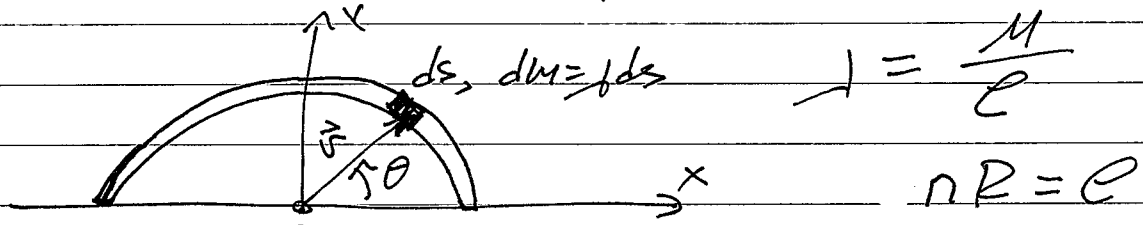
$$x_{CM} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{M} \Big|_0^l = \frac{1}{2} \frac{l^2}{M} = \frac{M}{M} \frac{1}{l} \frac{l^2}{2} = \frac{l}{2}$$

Για συνεχή κατανομή μάζας χαρίζουμε
 κομμάτια σε μικρά κομμάτια dM_k
 N και στοιχειώδεις μάζες dM_k
 $k=1, 2, \dots, N$ και παίρνουμε το $N \rightarrow \infty$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N \vec{r}_k dM_k = \frac{1}{M} \int_{\Sigma_{OMA}} \vec{r} dM$$

$dM = \rho(\vec{r}) dV$, $dV =$ στοιχειώδης όγκος
 $\rho =$ πυκνότητα στο σημείο \vec{r} .

3) Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους l , μάζας M
 σε σχήμα ημικυκλίου.



$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\text{ράβδος}} \vec{r} dM, \quad \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$$

$$\vec{r} = R \cos \theta \hat{x} + R \sin \theta \hat{y}$$

$$dM = \lambda ds = \lambda R d\theta$$

$$\Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^{\pi} R \cos \theta \lambda R d\theta = \frac{\lambda R^2}{M} \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

$$\Rightarrow x_{CM} = 0$$

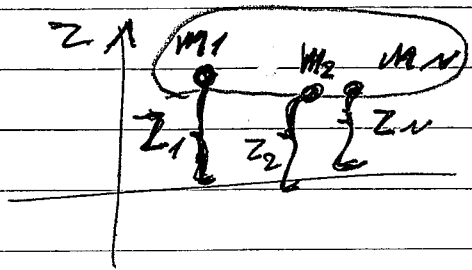
$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^{\pi} R \sin \theta \lambda R d\theta = \frac{\lambda R^2}{M} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta =$$

$$= \frac{\lambda R^2}{M} (-(1) - (-1)) = \frac{2\lambda R^2}{M} = \frac{2}{e} \frac{M}{M} \frac{R^2}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{2 R^2}{e} = \frac{2 l^2}{e \pi^2} = \frac{2 l}{\pi^2}$$

Δυναμική Ενέργεια σε ομογενές μέσο Βαρύτητας:

$$U = \sum_k M_k g z_k = \sum_k M_k z_k g = M g z_{cm}$$



$$z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_k M_k z_k$$

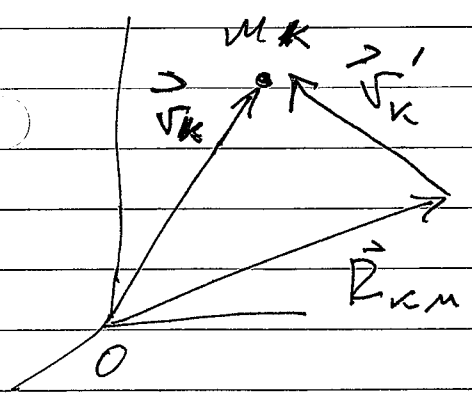
Δυναμική Ενέργεια ελάχιστη όταν $z_{cm} = \text{ελάχιστο}$

Διεύθυνση Βαρύτητας για ένα στερεό σώμα:

$$\vec{B} = \sum_k M_k \vec{g} = M \vec{g}$$

Γ

Κίνηση ως προς το Κέντρο Μάζας



$$\vec{v}_k = \vec{R}_{km} + \vec{v}'_k$$

$$M \vec{R}_{km} = \sum_k M_k \vec{v}_k =$$

$$= \sum_k M_k (\vec{R}_{km} + \vec{v}'_k)$$

$$= \sum_k M_k \vec{R}_{km} + \sum_k M_k \vec{v}'_k =$$

$$= M \vec{R}_{km} + \sum_k M_k \vec{v}'_k$$

$$\Rightarrow \underline{\sum_k M_k \vec{v}'_k = 0}$$

Παραγωγίζουμε $\sum_k M_k \frac{d\vec{v}'_k}{dt} = 0$

Ταχύτητα σωματίδια ως προς το σύστημα των Κέντρο Μάζας

$$\vec{u}_k = \frac{d\vec{v}_k}{dt}, \quad \vec{p}'_k = m_k \vec{u}_k$$

$$\Rightarrow \sum_k m_k \vec{u}_k = 0 \Rightarrow \sum_k \vec{p}'_k = 0$$

ως προς το κέντρο μάζας η ορμή οπρι των σωματιδίων είναι μηδέν.

Απόμ ισχύει: $\vec{v}_k = \vec{v}_{km} + \vec{u}_k$

ορμή $\vec{v}_k = \frac{d\vec{v}_k}{dt}$

Κινητική Ενέργεια συστήματος σωματιδίων:

$$K_{tot} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_N v_N^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2$$

$$K_{tot} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\vec{v}_{km} + \vec{u}_k) \cdot (\vec{v}_{km} + \vec{u}_k)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k m_k \vec{v}_{km} \cdot \vec{v}_{km} + \frac{2}{2} \sum_{k=1}^N m_k \vec{u}_k \cdot \vec{v}_{km}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_k m_k \vec{u}_k \cdot \vec{u}_k$$

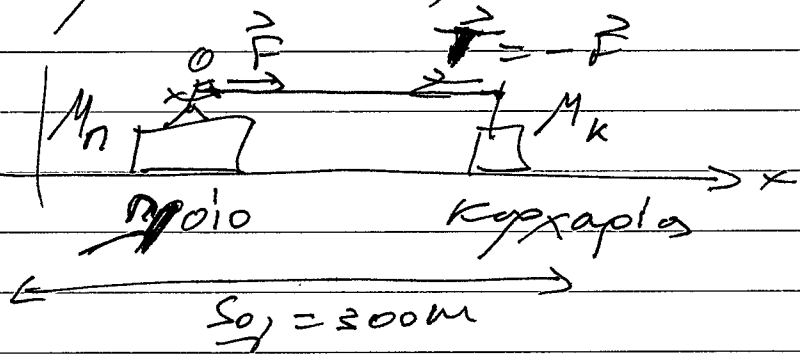
αλλά $\sum_k m_k \vec{u}_k = 0$

$$\Rightarrow K_{tot} = \frac{1}{2} M v_{km}^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k u_k^2$$

Αρα η ορμή ενέργεια γράφεται σαν το άθροισμα της ενέργειας των Κέντρο Μάζας και της ενέργειας των σωματιδίων ως προς το Κέντρο Μάζας.

Άσκηση: Ξεράει σε ένα μικρό Πλοίο καρφακιών έναν καρχαρία. Ο καρχαρίας είναι αρχικά σε απόσταση 300 m από το Πλοίο. Κατά την διαδικασία που ο καρφάς τραβιέει τον καρχαρία προς το μέρος του το Πλοίο (που αρχικά κινείται) κινείται 45 m προς τον καρχαρία.
 Μάζα Πλοίου = 5400 kg

- (α) Πόση είναι η μέγιστη M_k του καρχαρία? Υποθέστε ότι το νερό δεν ασκεί τριβές.
- (β) Ποιά είναι η σχέση ταχύτητας Πλοίου με την ταχύτητα του καρχαρία?



(α) Οι δυνάμεις στο σύστημα Πλοίο - Καρχαρίας είναι εσωτερικές άρα η ορμή διατηρείται και το κέντρο μάζας είναι σε σταθερή θέση (ακίνητο).

$$x_{cm} = \frac{x_k M_k}{M_n + M_k} \text{ σταθερό με τον χρόνο}$$

Τα δύο σώματα συναντιούνται στο x_{cm}

$$\Rightarrow x_{cm} = 45 \text{ m}, \quad x_k = 300 \text{ m}$$

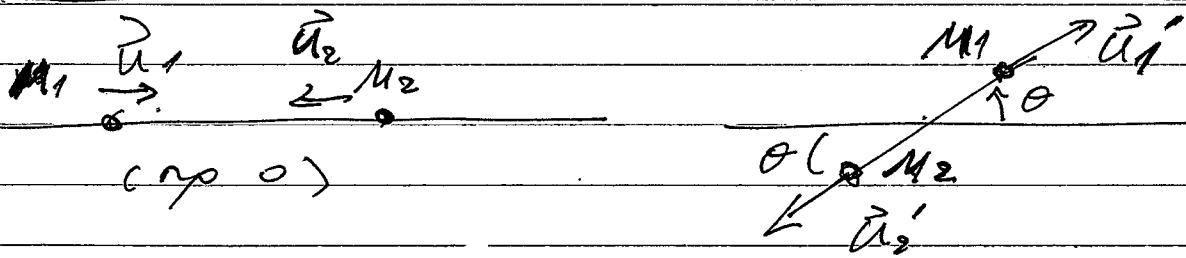
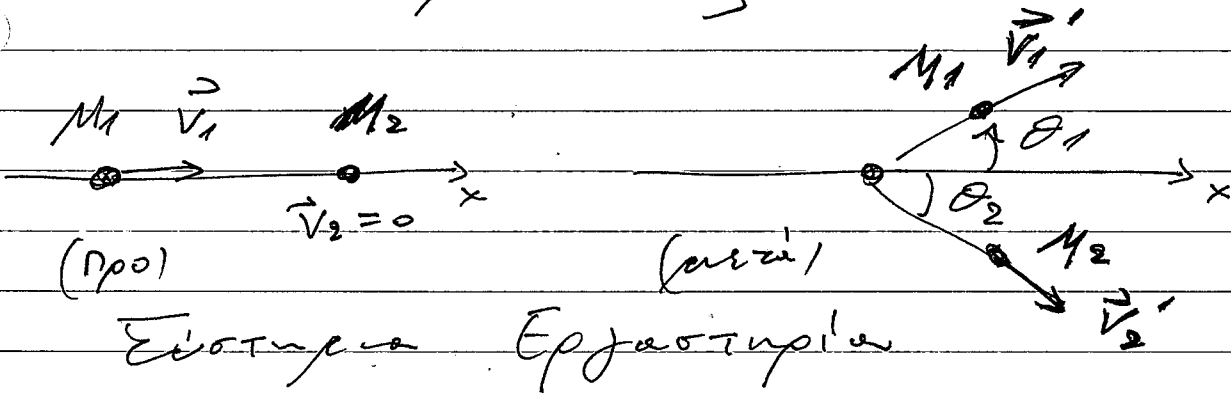
$$\Rightarrow M_k = M_n \frac{x_k}{x_k - x_{cm}} = 953 \text{ kg}$$

(β) $P(\text{αρχικά}) = 0 \Rightarrow P(\text{†}) = 0$
 $M_n v_n + M_k v_k = 0 \Rightarrow v_k = -v_n \frac{M_n}{M_k}$

Δ) Ελαστική Κρούση

Έστω μάζα M_1 κινείται οριζόντια χωρίς τριβές με ταχύτητα \vec{v}_1 και συγκρούεται ηχηρικά με ακίνητο σώμα μάζας M_2 . Η κρούση είναι τέλεια ελαστική. Συζητήστε διετηρείται η Ενέργεια.

Περιγράψτε τη κρούση στο σύστημα τα Εργαστηρίου και στο σύστημα τα Κέντρου Μάζας.



$$\vec{V}_{CM} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1 = \vec{V}_{CM} + \vec{u}_1, \quad \vec{v}_2 = \vec{V}_{CM} + \vec{u}_2, \quad \vec{v}_2 = 0$$

$$\vec{p}'_1 = M_1 \vec{u}'_1 = M_1 (\vec{v}_1 - \vec{V}_{CM}) = \frac{M_1 M_2}{M} \vec{v}_1$$

$$\vec{p}'_2 = M_2 \vec{u}'_2 = M_2 (-\vec{V}_{CM}) = -\frac{M_1 M_2}{M} \vec{v}_1$$

$$\vec{P}'_{\text{προ}} = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = 0 = \vec{P}'_{\text{μετα}}$$

(9)

$$M_1 \vec{u}_1 + M_2 \vec{u}_2 = 0 \quad \text{κα} \quad M_1 \vec{u}'_1 + M_2 \vec{u}'_2 = 0$$

Ελαστική Κρούση \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Διατήρηση Ορμής} \\ \text{κα} \\ \text{Διατήρηση Ενέργειας} \end{array} \right.$

(α) $\underline{u_1 = u_1'}$ και $\underline{u_2 = u_2'}$

(β) Απόδειξη:

$$\frac{1}{2} M_1 u_1^2 + \frac{1}{2} M_2 u_2^2 = \frac{1}{2} M_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 u_2'^2$$

$$M_1 \vec{u}_1 = -M_2 \vec{u}_2 \Rightarrow M_1 |\vec{u}_1| = M_2 |\vec{u}_2| \Rightarrow M_1 u_1 = M_2 u_2$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{M_1}{M_2} u_1 \quad \text{κα} \quad u_2' = \frac{M_1}{M_2} u_1'$$

$$\Rightarrow M_1 u_1^2 + M_2 \frac{M_1^2}{M_2^2} u_1^2 = M_1 u_1'^2 + M_2 \frac{M_1^2}{M_2^2} u_1'^2$$

$$\Rightarrow u_1^2 \left(M_1 + \frac{M_1^2}{M_2} \right) = u_1'^2 \left(M_1 + \frac{M_1^2}{M_2} \right)$$

$$\Rightarrow u_1^2 = u_1'^2 \Rightarrow \underline{u_1 = u_1'}$$

(β) Έχον μετρήσει τον γωνία θ_1 και θ_2

$$\tan \theta_1 = \frac{v_1 \sin \theta_1}{v_1 \cos \theta_1} = \frac{v_1' \sin \theta_1}{v_1' \cos \theta_1} = \frac{v_1'}{v_1} = \frac{u_1'}{u_1}$$

$$u_1' = u_1 \sin \theta$$

15x2α: $\vec{v}_i' = \vec{v}_{km} + \vec{u}_i'$

$v_{ix}' = u_i' \sin \theta$, οπότε $\vec{v}_{km} \parallel \hat{x}$

$v_{ix}' = v_{km} + u_i' \cos \theta$

$\tan \theta_1 = \frac{u_i' \sin \theta}{v_{km} + u_i' \cos \theta}$, $u_i' = u_1$

$\vec{v}_{km} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} (\vec{v}_{km} + \vec{u}_1)$

$\Rightarrow M_2 \vec{v}_{km} = M_1 \vec{u}_1 \Rightarrow \frac{v_{km}}{u_1} = \frac{M_1}{M_2}$

$\Rightarrow \boxed{\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\frac{M_1}{M_2} + \cos \theta}}$

Ε) Συστήματα Μεταβλητής Μάζας

1) Δορυφόρος σε δακτυλιοειδή σκόνη:

Καθίστουμε το σύστημα σκόνης ακίνητο και ότι ο δορυφόρος κινείται συγχρονισμένα με τους κόκκους της σκόνης και ότι η προσπίπτουσα σκόνη δεν συναντάει καμία ερπύνη που εμπόδιζε την ελιπτική ταρ.

$\rho = \text{πυκνότητα σκόνης}$, $S = \text{επιφάνεια δορυφόρου}$
 $dx = v dt$

~~Μάζα~~ S σε χρόνο dt δορυφόρος κινείται κατά $dx = v dt$

και η σκόνη στον ογκο $S dx = S v dt$

Επικρατούμε στα δορυφόρο

$\Rightarrow \frac{dM_D}{dt} = \rho S \frac{dx}{dt} = \rho S v = C v$

Το σύστημα Δορυφόρος - Σελήνη
έχει συνεχή ορμή, μόνο εσωτερικές
δυνάμεις

$\vec{P}_{01} = M_{\Delta} V + 0$ { το σύνθετο σκεύος
ακίνητο, αχρόνιαμαδα

$\vec{P}_{01} = \text{σταθερό} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{01}}{dt} = 0$

$\Rightarrow M_{\Delta} \frac{dV}{dt} + V \frac{dM_{\Delta}}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = - \frac{dM_{\Delta}}{dt} \frac{V}{M_{\Delta}} = -c \frac{V^2}{M_{\Delta}(t)}$

Διατήρηση ορμής ζώνη $\Rightarrow M_0 V_0 = M_{\Delta}(t) V(t)$

$\Rightarrow M_{\Delta}(t) = \frac{M_0 V_0}{V}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dt} = - \frac{c V^3}{M_0 V_0}}$

$\Rightarrow \frac{dV}{V^3} = - \frac{c}{M_0 V_0} dt$ ολοκλήρωση

$\int_{V_0}^V \frac{dV}{V^3} = - \frac{c}{M_0 V_0} t \Rightarrow -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{V_0^2} \right) = - \frac{ct}{M_0 V_0}$

$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_0^2} + \frac{2c}{M_0 V_0} t$

$\boxed{V^2 = \frac{V_0^2}{\frac{2cV_0}{M_0} t + 1}}$

$V^2 \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$

2) Πύραυλος εκτός Ρεύσης Βαρύτητας:

Ο πύραυλος εκκρίνει προς τα πάνω Κουβαέλια με ταχύτητα \vec{V}_0 ως προς τον πύραυλο με ρυθμό a , δηλαδή: $\frac{dM_0}{dt} = -a, a > 0$.

Την χρονική στιγμή t ο πύραυλος έχει μάζα M_0 και ταχύτητα \vec{V}
 $\vec{V} = V \hat{x}$ και $\vec{V}_0 = -V_0 \hat{x}$ ως προς τον πύραυλο.

Το σύστημα είναι ο Πύραυλος και όλο το Κουβαέλιο που έχει εκκρίνει
Η ολική ορμή διατηρείται

$$\vec{P}_{ολ} = M_0 \vec{V}(t) + \vec{P}_{κουβαελίων}$$

$$\frac{d\vec{P}_{ολ}}{dt} = \frac{d}{dt}(M_0 \vec{V}) + \frac{dP_{κουσ.}}{dt} = 0$$

$$\frac{dM_0}{dt} \vec{V} + M_0 \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dM_0}{dt} (\vec{V}_0 + \vec{V}) = 0$$

$$\frac{dM_0}{dt} = -\frac{dM_0}{dt} = a$$

$$\Rightarrow M_0 \frac{dV}{dt} - \frac{dM_0}{dt} V_0 = 0$$

$$\Rightarrow M_0 \frac{dV}{dt} + \frac{dM_0}{dt} V_0 = 0 \Rightarrow \underline{M_0 dV + dM_0 V_0 = 0}$$

$$\Rightarrow dV = -V_0 \frac{dM_0}{M_0} \quad \text{και ολοκληρώνουμε}$$

$$V(t) - V(0) = -V_0 \ln \frac{M_0(t)}{M_0(0)}$$

$$M_n(t) = M_n(0) - at$$

$$\Rightarrow V(t) = V(0) + \ln \frac{M_n(0)}{M_n(t)}$$

Η ταχύτητα του πυραύλου αυξάνει με τον χρόνο.

3) Πύραυλος εντός Πεδίου Βαρύτητας :

Πύραυλος (που κείται) με αρχική μάζα M_0 εκτορύνει αέρα προς τα κάτω με ρυθμό b και με ταχύτητα v_0 ως προς τον πύραυλο. Η τιμή του b ρυθμίζεται κατά βούληση.

(a) Να βρεθεί το b ως συνάρτηση του χρόνου, έτσι ώστε ο πύραυλος να παραμείνει ακίνητος στον αέρα σε μικρό ύψος έναντι από το έδαφος.

(b) Εάν τα καύσιμα που εκτορύνονται έχουν σταθερή τιμή a , υπολογίστε την ταχύτητα ανέμου της ρουκέτας, $a > b$ του προηγούμενου φρωτισμένου.

(a) Παρίστανε την εξίσωση κίνησης του πυραύλου (που κείται) με έναν διαφορετικό τρόπο :

$$\Delta \vec{P} = (M_n - \Delta M_k) (\vec{V} + \Delta \vec{V}) + \Delta M_k (\vec{V} + \vec{V}_0) - M_n \vec{V}$$

$$\Delta \vec{P} = M_n \Delta \vec{V} + \Delta M_k \vec{V}_0$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M_n \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dM_k}{dt} \vec{V}_0$$

$$\text{örner } b = \frac{dM_n}{dt} = - \frac{dM_0}{dt} > 0$$

(14)

$$\vec{F} = -Mg \hat{z}, \quad \vec{V}_0 = -V_0 \hat{z}, \quad \vec{V} = V \hat{z}$$

$$-Mg = M_n \frac{dV}{dt} - b V_0$$

$$\frac{dV}{dt} = 0, \text{ röpaupas axirvuzas}$$

$$b V_0 = M_n g \Rightarrow \frac{db}{dt} V_0 = \frac{dM_n}{dt} g$$

$$\Rightarrow -b g = V_0 \frac{db}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{db}{dt} = - \frac{g}{V_0} b}$$

$$\Rightarrow \frac{db}{b} = - \frac{g}{V_0} dt \Rightarrow \boxed{b(t) = b_0 e^{-\frac{g}{V_0} t}}$$

$$b_0 = b(t=0)$$

$$(b) \quad -M_n g = M_n \frac{dV}{dt} - a V_0$$

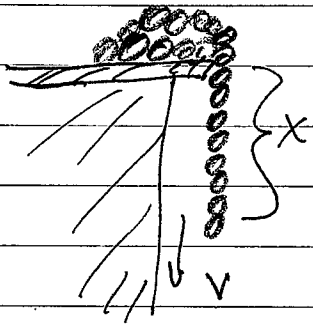
$$\frac{dV}{dt} = -g + a \frac{V_0}{M_n(t)}, \quad M_n(t) = M_0 - at$$

$$V(t) = -gt + a V_0 \int_0^t \frac{dt'}{M_0 - at'}, \quad V(t=0) = 0$$

$$V(t) = -gt + V_0 \ln \frac{M_0}{M_0 - at}$$

(4) Ανοίδα μήκους M και μικρός l βρισκείται σε οριζόντιο οροπέδιο ενός τραπεζοειδούς. Μερικά μικρά υλίκια το ένα άκρο της ανοίδας αρχίζουν να πέφτουν. Το κάθε τμήμα εκφεύγει το τραπέζι με ταχύτητα μηδέν αμέσως μόλις φθάσει στο κενό άσκητά των ταχύτητα της ανοίδας που είναι ίδια σε κίνηση (α) Πόση είναι η ταχύτητα της ανοίδας, όταν βρισκείται στο κενό μήκος της ίσο με x ?

(β) Όταν φθάει στο κενό ορόκλιση η ανοίδα τι ποσοστό από την αρχική δυναμική ενέργεια έχει μετατραπεί σε κινητική ενέργεια?



(α) γραμμική πυκνότητα ανοίδας $\mu = \frac{M}{l}$

$M(x) = \mu x$ μείον ανοίδα στο κενό

$\frac{dP}{dt} = F(x)$, $F(x) = M(x)g = \mu g x$

$P = M(x) v = M(x) \frac{dx}{dt}$

$\frac{dP}{dt} = \frac{dM}{dt} v + M \frac{dv}{dt} = \frac{dM}{dx} \frac{dx}{dt} v + M \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$

$\mu g x = \mu v^2 + \mu x v \frac{dv}{dx} \Rightarrow \boxed{g x = v^2 + x \frac{dv}{dx} v}$

Λόση των διαφορικών εξισώσεων:

$g x = v^2 + x \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx} \Rightarrow 2 x = 2 \frac{v^2}{g} + x \frac{dv^2}{g dx}$

$v = \frac{v^2}{g} \Rightarrow 2 x^2 = 2 x v + x^2 \frac{dv}{dx}$

(16)

$$Z = x^2 v$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{dx} = 2xv + x^2 \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{dx} = 2x^2 \Rightarrow dZ = 2x^2 dx$$

$$\Rightarrow Z = \frac{2}{3} x^3$$

$$x^2 v = \frac{2}{3} x^3 \Rightarrow v = \frac{2}{3} x$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{g} = \frac{2}{3} x \Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{2}{3} g x}$$

(b) $E_{\text{apx}} = Mgl$, Δυναμική Ενέργεια

$$E_{\text{ηγ}} = \frac{1}{2} Mv^2 + Mgl \frac{1}{2} = \frac{1}{2} M \frac{2}{3} gl + Mgl \frac{1}{2}$$

$$\underline{E_{\text{ηγ}} = Mgl \frac{5}{6}}$$

$$\Rightarrow \underline{E_{\text{ηγ}} < E_{\text{apx}}}$$

Δεν διατηρείται η ενέργεια,
ένα μέρος της ενέργειας χάνεται σε γοβίς.
