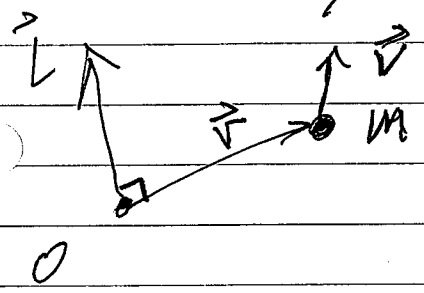


II ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

A ΡΟΗ ΔΥΝΑΜΗΣ - ΣΤΡΟΦΟΡΜΑ ΣΩΜΑΤΙΟΥ

Για ένα σωμα μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα \vec{v} ορίζουμε το διάνυσμα της στροφορμής ως προς ένα σημείο αναφοράς O :



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{p} = m \vec{v}$$

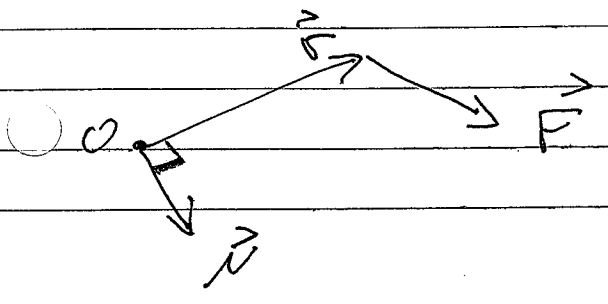
Η στροφορμή \vec{L} είναι διάνυσμα κάθετο στο \vec{r} και στην ορμή (ταχύτητα) \vec{p} του σωματιδίου λόγω του εξωτερικά γινομένου.

$$\vec{v} \cdot \vec{L} = \vec{v} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = (\vec{v} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} = 0$$

$$\vec{L} \perp (\vec{r}, \vec{v})$$

Η στροφορμή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα \vec{r} και \vec{v} .

Η ροπή μιας δύναμης ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο της δύναμης επί το διάνυσμα θέσης του σώματος:



$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$\vec{N} \perp (\vec{r}, \vec{F})$$

Η ροπή ως δύναμη είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα \vec{r} και \vec{F} .

Μεταβολή Στροφορμής με τον χρόνο:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{p} + \vec{v} \times \frac{d\vec{p}}{dt} =$$

$$= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{v} \times \vec{F} = m \vec{v} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{F}$$

⇒ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{F} = \vec{N}$

Εάν η ροπή ως δύναμη είναι μηδέν τότε η στροφορμή διατηρείται (δυναμικά) δηλαδή το διάνυσμα ως στροφορμή είναι σταθερό.

Εάν η δύναμη ασκείται σε ένα κεντρικό πεδίο δυνάμεων, και είναι ομογενώς κατευθυνόμενη

η στροφορμή ως προς αυτό το σημείο

$$\vec{F} = F(r) \hat{r} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{F} = F(r) \vec{v} \times \hat{r} = 0$$

⇒ $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, $\vec{N} = \vec{v} \times \vec{F} = 0$

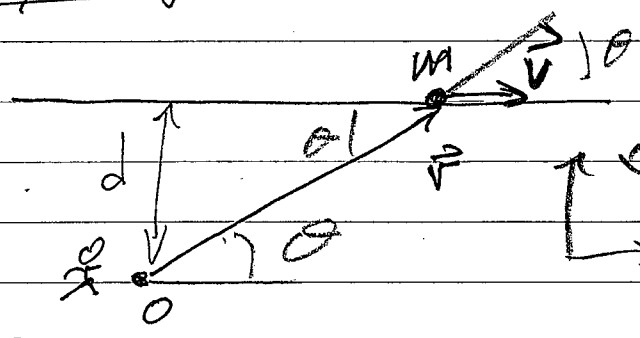
Η στροφορμή διατηρείται.

Η κίνηση γίνεται τότε σε ένα επίπεδο

κάθετο στην στροφορμή \vec{L} και αυτό το επίπεδο κίνησης παραμένει σταθερό στον χρόνο.

Παράδειγμα κεντρικών δυνάμεων οι δυνάμεις
επίπεδοι \Rightarrow το επίπεδο κίνησης
των σωμάτων γύρω από τον ΗΓΟ παραμένει
σταθερό εάν απρξίσουμε των επιδράσεων των
άλλων σωμάτων.

Παράδειγμα 1: εδίδραση κίνηση σωματιού



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

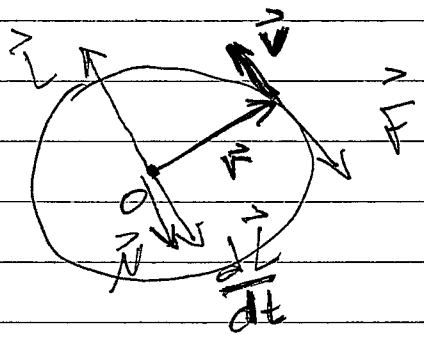
$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

\vec{r}, \vec{v} στο επίπεδο του χαρτί $\Rightarrow \vec{L} \perp$ στο επίπεδο
του χαρτί

$$\vec{L} = m |\vec{r}| |\vec{v}| \sin \theta \hat{z}$$

$$\left. \begin{aligned} |\vec{r}| = r \\ |\vec{v}| = v \end{aligned} \right\} \quad r \sin \theta = d \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = m d v \hat{z}$$

Παράδειγμα 2: κυκλική κίνηση σωματιού



$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

κάθετα στο επίπεδο του κύκλου

$$\vec{N} = \vec{v} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{L} = m v r \hat{z}, \quad \vec{N} = -v F \hat{z}, \quad |\vec{v}| = v, \text{ σταθερό!}$$

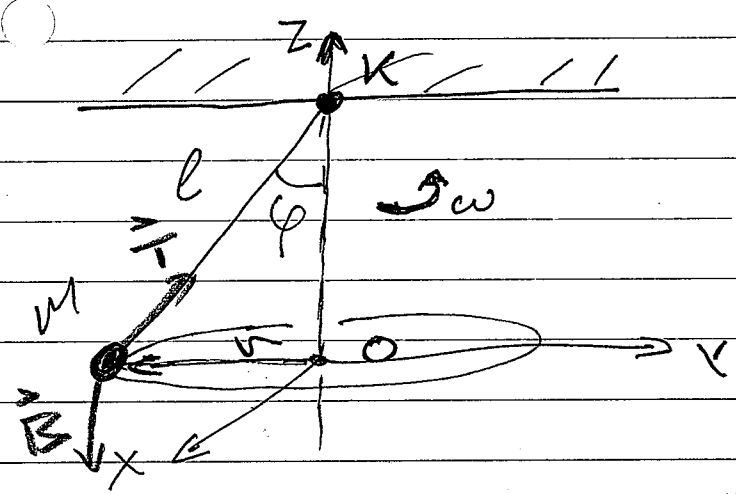
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m v \frac{dv}{dt} \hat{z} = -v F \hat{z} \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -F$$

Άσκηση:

Μικρή σφαίρα μάζας m κρέμεται από νήμα μήκους l από ανώτατο σημείο ανάρτησης K , και κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω σε οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας r (εξ ους το κέντρο O βρίσκεται στην κατακόρυφο από το σημείο ανάρτησης K).

Βρείτε: (α) Τον στροφορμή της μάζας ως προς τα σημεία K και O .

(β) Τον ρυθμό μεταβολής του διανύσματος της στροφορμής ως προς τα σημεία K και O . Δώστε εξηγήσεις.



Κυκλική κίνηση της μάζας
 Δυνάμεις \rightarrow Βρος και
 Ταν Νήματος

$$L_{στροφ} = m \frac{v^2}{\omega} = m \omega^2 r$$

$$T \cos \varphi = m g$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$r = l \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{g}{\omega^2 l}$$

$$g, \omega, l \Rightarrow \varphi, r$$

(α) Διανύσμη θέσης ως προς το σημείο K :

$$\vec{r}_K = x \hat{x} + y \hat{y} - l \cos \varphi \hat{z} = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y} - l \cos \varphi \hat{z}$$

για $t=0 \Rightarrow x=r, y=0, z=z_0 = l \cos \varphi$

$$\vec{L}_K = m \vec{v}_K \times \vec{r}_K$$

$$\vec{v}_K = \frac{d\vec{r}_K}{dt} = -\omega r \sin \omega t \hat{x} + \omega r \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{L}_K = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r \cos \omega t & r \sin \omega t & -z_0 \\ -\omega r \sin \omega t & \omega r \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} = m \hat{x} (-z_0 \omega r \cos \omega t) - m \hat{y} (-z_0 \omega r \sin \omega t) + \hat{z} (\omega r^2 \cos^2 \omega t + \omega r^2 \sin^2 \omega t)$$

$$\vec{L}_K = m l \cos \varphi \omega r \cos \omega t \hat{x} + m l \cos \varphi \omega r \sin \omega t \hat{y} + m \omega r^2 \hat{z}$$

$$|\vec{v}_K| = \omega r, \quad \vec{L}_K = m l v_0 \cos \varphi (\cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}) + m \omega r^2 \hat{z}$$

$$\vec{L}_0 = m \vec{v}_0 \times \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_0 = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}, \quad \dot{\vec{v}}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \vec{v}_K$$

$$\vec{L}_0 = m \omega r^2 \hat{z} = m v_0 \hat{z}, \quad v_0 = r \omega$$

$$(b) \frac{d\vec{L}_K}{dt} = m l v_0 \cos \varphi (-\omega \sin \omega t \hat{x} + \omega \cos \omega t \hat{y})$$

$$\frac{d\vec{L}_K}{dt} = m l \omega v_0 \cos \varphi (-\sin \omega t \hat{x} + \cos \omega t \hat{y})$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0$$

Poru Suvijeruv us npos zo svyrio K?

$$\text{Poru Taus svyru} = \vec{v}_K \times \vec{T} = 0$$

$$\text{Poru Bupu} \vec{N}_K = \vec{v}_K \times \vec{R}, \quad \vec{R} = -m g \hat{z}$$

$$\vec{N}_B = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v \cos \omega t & v \sin \omega t & -z_0 \\ 0 & 0 & -Mg \end{vmatrix} = \hat{x} (-Mg v \sin \omega t) - \hat{y} (-Mg v \cos \omega t)$$

$$\vec{N}_B = -Mg v \sin \omega t \hat{x} + Mg v \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{N}_B = -M \omega^2 \cos \varphi \sin \omega t \hat{x} + M \omega^2 \cos \varphi \cos \omega t \hat{y}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_k}{dt} = \vec{N}_B$$

Ροπή Συρρέων προς το σημείο O:

Ροπή Βάρων = $v R$

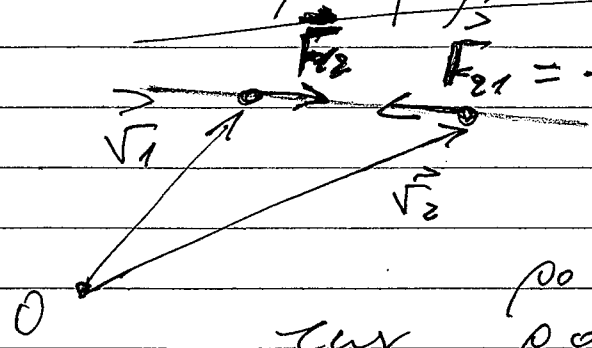
Ροπή Τάσης Νημάτων = $v T \cos \varphi = -v R$

\Rightarrow Συνογώνι Ρομών προς το O είναι μηδέν.

$$\Rightarrow \frac{dL_0}{dt} = 0$$

Β) Σύστημα Σωματιδίων - Ελαστικές Δυνάμεις

Στροφομή Κίνησης Μάζας



Για ένα σύστημα Ν σωμάτων η ογμή που είναι το άθροισμα των ρομών των δυνάμεων δεν ασκούνται σε κάθε σωματίδιο

$$\vec{N}_{O_1} = \sum_{i=1}^N \vec{v}_k \times \vec{F}_k$$

Η δύναμη που δέχεται στο σημείο k είναι το άθροισμα των εξωτερικών από το σύστημα δυνάμεων και των εσωτερικών δυνάμεων από τα άλλα σωματίδια στο αίλιο

$$\vec{F}_k = \vec{F}_{k, \text{ext}} + \vec{F}_{k, \text{int}}$$

$$\vec{F}_{k, \text{int}} = \sum_{s=1, s \neq k}^N \vec{F}_{ks}$$

$$\vec{N}_{O_1} = \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \times \vec{F}_{k, \text{ext}} + \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{s=1, s \neq k}^N \vec{v}_k \times \vec{F}_{ks} \right\}$$

ο δείκτης όσον αφορά μωδενίζεται όπως γράφεται στο προηγούμενο σχήμα:

$$\vec{v}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{v}_2 \times \vec{F}_{21} = \vec{v}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{v}_2 \times \vec{F}_{12} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \times \vec{F}_{12}$$

$$\vec{F}_{12} \parallel (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \Rightarrow (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \times \vec{F}_{12} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{N}_{O_1} = \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \times \vec{F}_{k, \text{ext}} = \vec{N}_{\text{εξωτερικών δυνάμεων}}$$

$$\frac{d\vec{L}_{O_1}}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{d\vec{L}_k}{dt} = \vec{N}_{O_1}$$

Έστω σωματίδιων σε ομοιογενές πεδίο βαρύτητας:

$$\vec{N}_B = \sum_k \vec{v}_k \times \vec{F}_k, \quad \vec{F}_k = m_k \vec{g}$$

$$\vec{N}_B = \sum_k M_k \vec{v}_k \times \vec{g} = M \vec{R}_{cm} \times \vec{g}$$

$$\boxed{\vec{N}_B = \vec{R}_{cm} \times \vec{B}} \quad , \quad \boxed{\vec{B} = \sum_k M_k \vec{g}}$$

→ Ποινή ^{βαρών} ως προς το κέντρο Μάζας = 0.

Στροφομή ως προς το κέντρο Μάζας

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_k M_k \vec{v}_k \quad , \quad M = \sum_k M_k$$

$$\vec{L}_{O_1} = \sum_{k=1}^N \vec{L}_k = \sum_{k=1}^N M_k \vec{v}_k \times \vec{v}_k =$$
$$= \sum_k M_k (\vec{R}_{cm} + \vec{v}'_k) \times (\vec{V}_{cm} + \vec{u}_k)$$

$$= \sum_k M_k \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \sum_k M_k \vec{R}_{cm} \times \vec{u}_k$$
$$+ \sum_k M_k \vec{v}'_k \times \vec{V}_{cm} + \sum_k M_k \vec{v}'_k \times \vec{u}_k$$

1ο x 2ο $\sum_k M_k \vec{u}_k = 0 \quad , \quad \sum_k M_k \vec{v}'_k = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_{O_1} = M \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \sum_k M_k \vec{v}'_k \times \vec{u}_k}$$

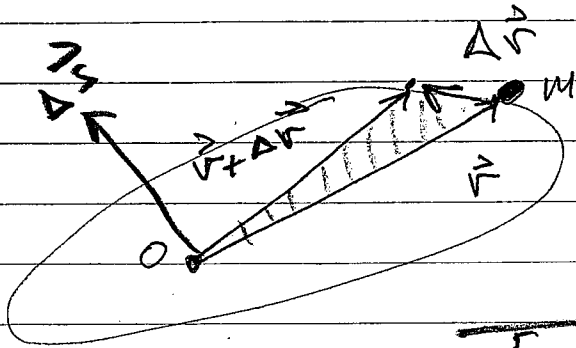
Στροφομή των συστήματος ως προς το κέντρο Μάζας των συστημάτων:

$$\boxed{\vec{L}_{cm} = \sum_k M_k \vec{v}'_k \times \vec{u}_k}$$

Στροφομή του κέντρου Μάζας ως προς το σημείο αναφοράς = $M \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} = \vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{O_1}$

Γ Εφαρμογές - Ασκήσεις

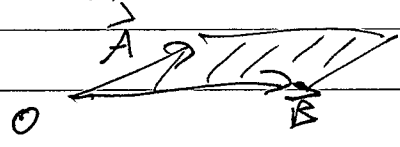
1) 2ος Νόμος του Kepler



Το εμβαδόν του σελήμιου τριγώνου που σχηματίζεται είναι:

$$\Delta S = \frac{1}{2} \vec{r} \times \Delta \vec{v}$$

Παρατήρηση: Εμβαδόν παραλληλόγραμμου = $|\vec{r} \times (\vec{v} + \Delta \vec{v})| = |\vec{r} \times \Delta \vec{v}|$



Εμβαδόν παραλληλόγραμμου = $|\vec{A} \times \vec{B}|$

Εμβαδόν τριγώνου OAB = $\frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

⇒ $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{m}$ για ένα σώμα μάζας m.

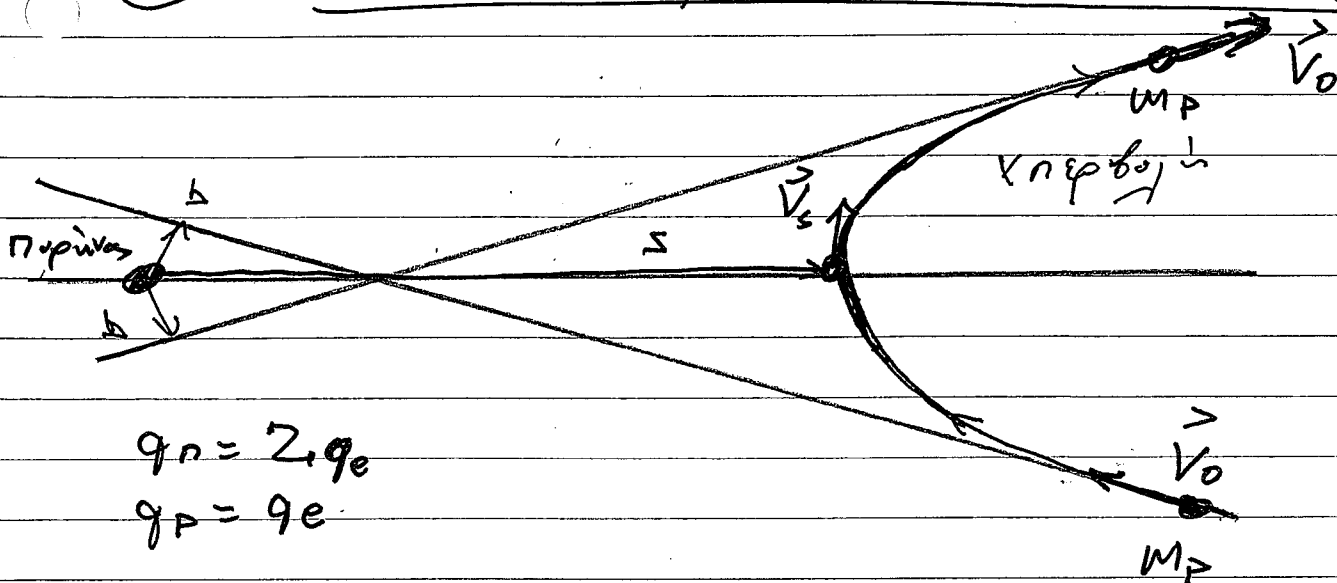
Εάν το κέντρο O ασκεί δύναμη σαν μάζα m κατά μήκος του \vec{r} , κεντρική δύναμη, τότε η στροφορμή διατηρείται.

αρα $\frac{dS}{dt} = \text{αριθρò}$ με τον χρόνο

αρα σε ίσα χρονικά διαστήματα η μάζα m θα κινείται ως προς το κέντρο O σαρώσει ίσα εμβαδά.

παράδειγμα: Ηλιας - Γη.

2) Σκέδαση πρωτονίου από βαρέ πυρήνα



$$q_n = Z_1 q_e$$

$$q_p = q_e$$

Κοιτάζουμε τον πυρήνα ανιχνευόμενου πλάτος το πρωτόνιο σε μεγάλη (άπειρη) απόσταση αρχικά με ταχύτητα V_0 έχοντας μηδενική δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης με τον πυρήνα, πλησιάζει σε ελάχιστη απόσταση s και ανυψώνεται.

Οι δύο ασυμπτωτικές καμπύλες (ευθείες γραμμές) που κινείται το πρωτόνιο είναι ασύμπτωτες ... ευθείες γραμμές με κλίση κ .

Διατήρηση Ενέργειας:

$$\frac{1}{2} M_p V_0^2 = \frac{1}{2} M_p V_s^2 + \kappa \frac{q_n q_p}{s}$$

Διατήρηση Έξουφαρμης (Αύραση Κεντρική)

$$M_p V_0 b = M_p V_s s$$

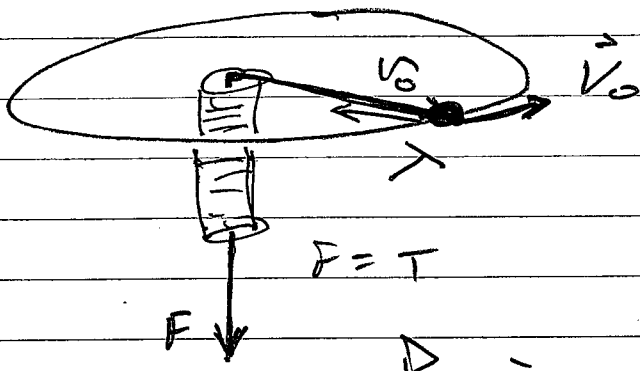
b = παράμετρος κρούσης, γραμμική ποσότητα.

Η ορμή δαμ διατηρείται. Αντικαθιστούμε το V_s και έχουμε:

$$\kappa \frac{Z q_e^2}{s} = \frac{1}{2} M_p V_0^2 \left(1 - \frac{b^2}{s^2} \right) \Rightarrow s = \dots$$

3) Σύστημα σαν συστήμα

Σύμα μάζας m κινείται κυκλικά σε οριζόντιο επίπεδο (όπως στο σχήμα). Πόσο έργο παράγει εάν η ακτίνα ελαττωθεί από r_0 σε r_1 ?



Στο σύμα ασκείται η δύναμη T στο ελάσμα κάθετη στην ταχύτητα, και η μίκρυνση της ακτίνας.

Ποινή των ταχύτητων του νήματος T ίση με $m v^2 / r \Rightarrow$ διατήρηση της στροφορμής

$m v_0 r_0 = m v r$ γενικά για κάθε ακτίνα

Το σύμα εκτελεί κυκλικό κίνημα, άρα η T έχει ως ρόλο της κεντρομόλου δύναμης

$T = m \frac{v^2}{r} = m \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3} = m \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}$

$W_{\text{συστήμα}} = \int_{r_0}^{r_1} \vec{T} \cdot d\vec{r} = m v_0^2 r_0^2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^3} (-1)$

$\vec{T} = -T \hat{r}, \quad d\vec{r} = dr \hat{r}$

$W_{\text{συστήμα}} = -m v_0^2 r_0^2 (-\frac{1}{2}) \left\{ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right\} = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1 \right)$

Μεταβολή Κινητικής Ενέργειας:

$\Delta E_k = E_k(\text{τελ}) - E_k(\text{αρχ}) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1 \right)$

Εάν $v_0 > v_1 \Rightarrow \Delta E_k = W_{ουρής} > 0$

Καταβόλεται έργο $W_{ουρής}$ για να ελαττώσουμε την ακτίνα από το σύστημα δια τον να υπάρχει μια εξωτερική αδρωτική δύναμη που πρέπει να υπερνικήσουμε για να ελαττώσουμε την ακτίνα κίνησης.

4) Δοίστες μάζες M συνδέονται μέσω αβαρούς ράβδου μήκους l . Το σύστημα περιστρέφεται γύρω από το κέντρο της ράβδου (ΚΡ) με γωνιακή ταχύτητα ω .

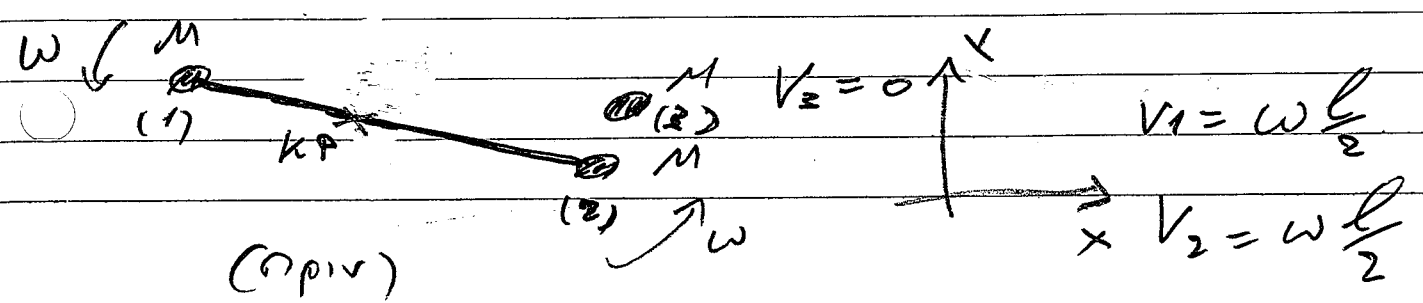
Η μία από τις δύο μάζες συγκρούεται μετωπικά με μία τρίτη ακίνητη μάζα M και προσκολλάται ή μία στην άλλη.

(α) Προσδιορίστε το κέντρο μάζας (ΚΜ) του συστήματος συστήματος πριν την κρούση και την ταχύτητά του.

(β) Ποια είναι η στροφορμή του συστήματος των τριών μαζών πριν την κρούση? Ποια μετά την κρούση? ως προς το (ΚΜ).

(γ) Γωνιακή ταχύτητα συστήματος μετά την κρούση?

(δ) Αρχική και Τελική Κινητική Ενέργεια?



(α) Δείξτε κέντρο μάζας (ΚΜ) ως προς το κέντρο της ράβδου (ΚΡ):

$$x_{ΚΜ} = \frac{-M\frac{\ell}{2} + M\frac{\ell}{2} + M\ell}{M+M+M} = \frac{\ell}{6}$$

$$\vec{V}_{ΚΜ} = \frac{1}{\sum M} (M\vec{V}_1 + M\vec{V}_2 + 0) = 0$$

$$\vec{V}_1 = -\omega \frac{\ell}{2} \hat{y}, \quad \vec{V}_2 = \omega \frac{\ell}{2} \hat{y}$$

(β)
$$\vec{L}_{Ρο} = M\vec{r}_1 \times \vec{V}_1 + M\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 + 0$$

$$\vec{L}_{Ρο} = M \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{6} \right) (\omega \frac{\ell}{2}) (-\hat{x}) \times (-\hat{y})$$

$$+ M \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{6} \right) (\omega \frac{\ell}{2}) (\hat{x}) \times (\hat{y})$$

$$\vec{L}_{Ρο} = \frac{1}{2} M \omega \ell^2 \hat{z}, \quad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$\vec{L}_{μικρ} = \vec{L}_{Ρο}$ διότι οι δυνάμεις είναι εσωτερικές άρα η συνολική ορμή ορμής διατηρείται.

(γ) Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις άρα η ταχύτητα του ΚΜ είναι μηδενική

$$\vec{V}_{ΚΜ} = 0$$

το σύστημα περιστρέφεται γύρω από το ΚΜ

$$\vec{L}_{μικρ} = M \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{6} \right) (\omega' \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{6} \right)) (-\hat{x}) \times (-\hat{y})$$

$$+ 2M \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{6} \right) (\omega' \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{6} \right)) \hat{x} \times \hat{y}$$

$$\vec{L}_{μικρ} = M \frac{2\ell^2}{3} \omega' \hat{z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M l^2 \omega = \frac{2}{3} M l^2 \omega'$$

$$\omega' = \frac{3}{4} \omega$$

$$(5) K_{\text{προ}} = \frac{1}{2} M V_1^2 + \frac{1}{2} M V_2^2 = M \omega^2 \frac{l^2}{4}$$

$$K_{\text{μετ}} = \frac{1}{2} M V_1'^2 + \frac{1}{2} 2M V'^2$$

$$K_{\text{μετ}} = \frac{1}{2} M \left(\frac{2l}{3} \omega'\right)^2 + \frac{1}{2} 2M \left(\frac{l}{3} \omega'\right)^2 = \frac{1}{3} M l^2 \omega'^2$$

$$K_{\text{μετ}} = \frac{3}{16} M l^2 \omega^2$$

$$\Delta K = K_{\text{μετ}} - K_{\text{προ}} = -\frac{1}{16} M \omega^2 l^2$$

5 Σύστημα που συστρίβεται καθώς περιστρέφεται λόγω των εσωτερικών δυνάμεων βαρύτητας.
Σχήμα του Γαλαξία.

M_k = μάζα του εκτιμώμενου κέντρου
 M = μάζα του σήματος (ηλιακού) που έλκεται από το κέντρο και περιστρέφεται

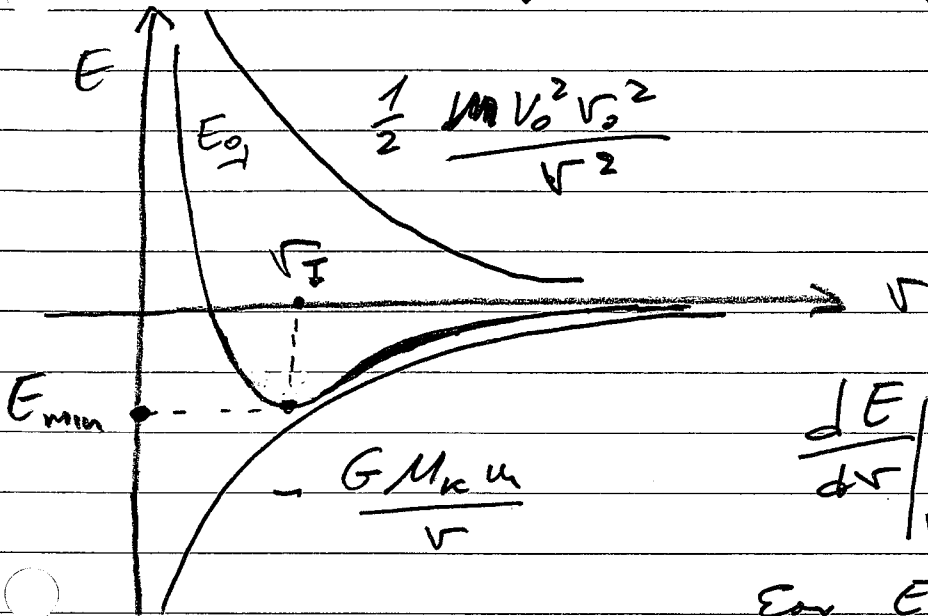
$$E_0 = E_{\text{κιν}} + E_{\text{δυν}} = \frac{1}{2} M V^2 + \left(-\frac{G M_k M}{r} \right)$$

Δύναμη ακτινική, $\vec{F} = -\frac{G M_k M}{r^2} \hat{r}$
όπου η στροφορμή διατηρείται.

$$M V_0 r_0 = M V r \Rightarrow V = \frac{V_0 r_0}{r}$$

Δύναμη ακτινική καθέτη στην ταχύτητα στιγμιαία

$$E_g = \frac{1}{2} m \frac{v_0^2 v_0^2}{r^2} - \frac{G M_k m}{r} = E(r)$$



$$\frac{dE}{dr} \Big|_{r=r_I} = 0 \Rightarrow \text{εξίσωση ισορροπίας}$$

Επειδή $E''(r_I) > 0 \Rightarrow$ σημείο ευσταθούς Ισορροπίας

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{m v_0^2 v_0^2}{r^3} + \frac{G M_k m}{r^2}$$

$$\frac{dE}{dr} = \frac{m}{r^2} \left(G M_k - \frac{v_0^2 v_0^2}{r} \right) \Rightarrow r_I = \frac{v_0^2 v_0^2}{G M_k}$$

Ανατίθεται Σχέση, όπου ισορροπία

$$v_I r_I = v_0 v_0 \Rightarrow v_I = \frac{v_0 v_0}{v_I} \Rightarrow$$

όπου όπου Ισορροπία έχουμε: $v_I = \frac{v_I^2 r_I^2}{G M_k}$

$$\Rightarrow \frac{m G M_k}{v_I^2} = m \frac{v_I^2}{v_I}$$

\Rightarrow Δύο φορές Βαρύτερος = Καρτερότερος Επιπέδων
↓ οξυμυαση

"Επίπεδο κίνηση"

6 (α) Συναρτήσεις συντεταγμένες u ταχύτητα
πραγματο:

$$\vec{V} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}$$

πραγματι:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \hat{r})$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad \rightarrow \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

(β) Η κινητική Ενέργεια του σωματιδίου πραγματι:

$$K = \frac{1}{2} M \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \omega^2 r^2 \right)$$

Απόδειξη:

$$K = \frac{1}{2} M \vec{V}^2$$

$$K = \frac{1}{2} M (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}) \cdot (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}) = \\ = \frac{1}{2} M v_r^2 + \frac{1}{2} M v_\theta^2 \quad \rightarrow \quad \hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$$

$$(γ) \underline{E}_0 = U(r) + \frac{1}{2} M \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2Mr^2}$$

όπου L = στροφορμή του σωματιδίου

$$U(r) = \text{Δυναμική Ενέργεια}, \quad r = |\vec{r}|$$

Δύναμη $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{dU}{dr} \hat{r}$ κεντροική
άρα η στροφορμή διατηρείται \Rightarrow

$$\vec{L} = M \vec{r} \times \vec{v} = M r v_{\theta} \hat{z}$$

$$L = M r v_{\theta} = M r^2 \omega = \text{constanti}$$

$$E = K + E_{\Delta} = U(r) + \frac{1}{2} M \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} M r^2 \omega^2$$

$$E = U(r) + \frac{1}{2} M \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{M r^2}$$

$$E = V(r) + \frac{1}{2} M \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

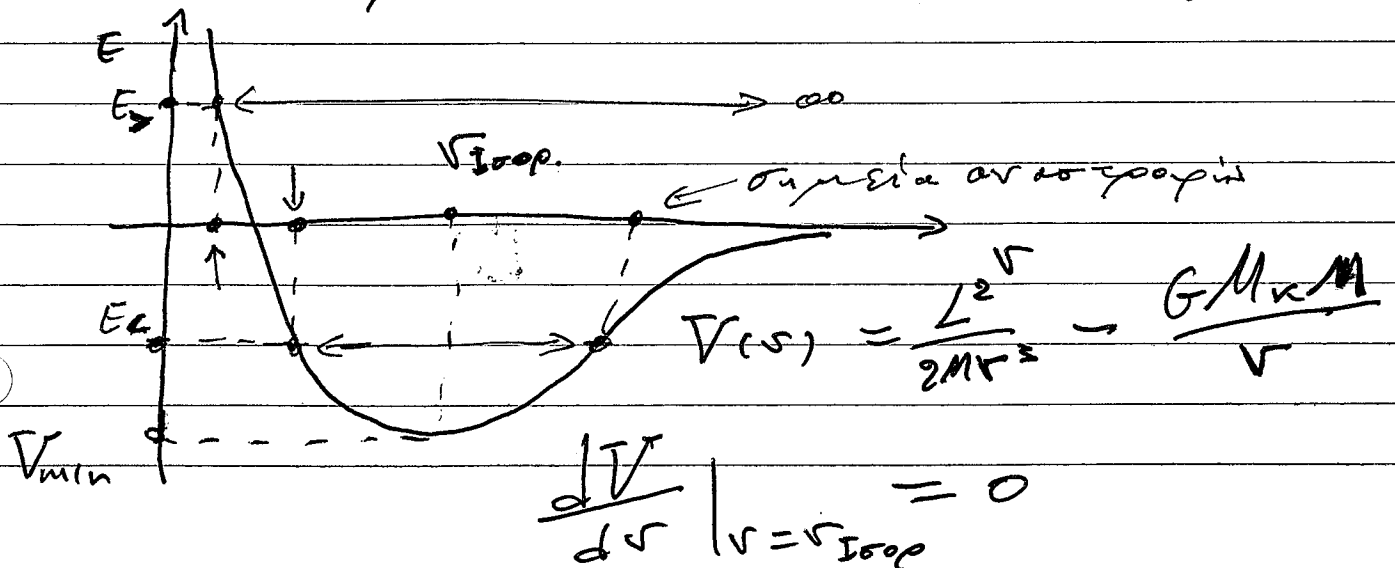
$$V(r) = \frac{L^2}{2 M r^2} + U(r) \quad \text{ενεργεια Σύνθεσης}$$

$$(5) \quad \vec{F}_{\theta} = - \frac{dV}{dr} \hat{r} = F_{\theta}(r) \hat{r}$$

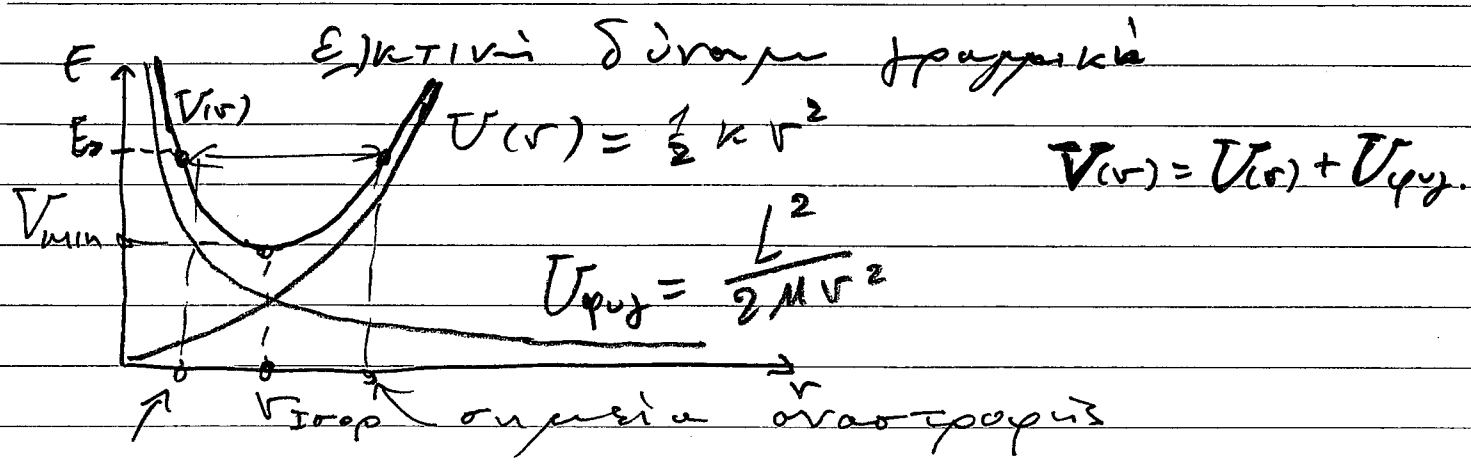
$$F_{\theta}(r) = \frac{L^2}{M r^3} - \frac{dU}{dr}$$

$$F_{\theta}(r) = \frac{L^2}{M r^3} \quad \text{ανωστικη Σύσταση}$$

η ελκυστική δύναμη $U(r) = - \frac{G M_{\kappa} M}{r}$



(ε) $U(r) = \frac{1}{2} k r^2 \Rightarrow F = -\frac{dU}{dr} = -kr$



(στ) συνθήκη Ισοροπίας?

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_{100}} = 0$$

$$\frac{dV}{dr} = kr - \frac{L^2}{Mr^3} \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow$$

$$kr_{100} = \frac{L^2}{Mr_{100}^3} \Rightarrow r_{100}^4 = \frac{L^2}{kM} = \frac{M^2 v_{100}^4 \omega^2}{kM}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{M} \quad \text{στην θέση ισοροπίας}$$

$$F = -\frac{dV}{dr} = -kr + \frac{L^2}{Mr^3} \quad \text{μείων στην θέση ισοροπίας.}$$

$$kr_{100} = \frac{M^2 v_{100}^4 \omega^2}{Mr_{100}^3} = M\omega^2 v_{100}$$

↑
δίνουμε
εξίσωση
ακτινική

↑
κέντρομαζας
επιπέδου