ΘΕΜΑ

Σωματίδιο βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην κατάσταση που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + ik_0(x-x_0)\right),$$

όπου $k_0 = 3$, $\sigma = 0.5$, $x_0 = -6$. Η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου δίνεται από τη σχέση:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -4 \quad ή \quad x > 4 \\ 6 & 2 < |x| \leq 4 \\ -12 & |x| \leq 2 \end{cases}$$

Να χρησιμοποιήσετε το σχήμα του Visscher για να ολοκληρώσετε την εξίσωση του Schrödinger, στο διάστημα $-300 < x < 300$ μέχρι χρόνο t_f χρησιμοποιώντας $\Delta x = 0.02$ και $a = \Delta t/(2\Delta x^2) = 0.45$.

1. Να φτιάξετε τις γραφικές παραστάσεις των $\mathrm{Re}(\psi(x,t_f)$, $\mathrm{Im}(\psi(x,t_f)$ και $\rho(x,t_f) = \psi(x,t_f)^*\psi(x,t_f)$ στο ίδιο διάγραμμα για $t_f = 1.4$. Τα όρια του διαγράμματος να είναι τέτοια που να δείχνουν την περιοχή του x όπου η $\rho(x,t_f)$ παίρνει τιμές που είναι ορατά μεγαλύτερες του 0.

2. Να επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα για $t_f = 2.5$ και $t_f = 4.2$.

3. Να φτιάξετε τη γραφική παράσταση της $\rho(x,t_f)$ στην περιοχή $-4 < x < 4$ για $t_f = 1.4, 2.5, 4.2$ και να σχολιάσετε τη συμπεριφορά της $\rho(x,t_f)$ στις περιοχές με διαφορετική τιμή της δυναμικής ενέργειας.

4. Να υπολογίσετε προσεγγιστικά τις πιθανότητες $P(x < -4; t_f)$, $P(-4 < x < 4; t_f)$, $P(4 < x; t_f)$ για $t_f = 1.4, 2.5, 4.2$.

5. Ποια εκτιμάτε ότι θα είναι πιθανότητα το σωματίδιο να ανακλαστεί πάνω στο φράγμα του δυναμικού και ποια η πιθανότητα να διαδοθεί πέρα από το πηγάδι για $t \to \infty$;

ΘΕΜΑ: Οι εξισώσεις FitzHugh-Nagumo με όρο διάχυσης έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση της διάδοσης κυμάτων σε διεγέρσιμα μέσα, όπως του καρδιακού ιστού και των νευρικών ινών:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a-u)(u-1)u - v + I \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= e(u-bv)\end{aligned}$$

Το εξωτερικό ερέθισμα αντιστοιχεί στο ρεύμα I. Στα επόμενα θα θεωρήσετε $0 \le x \le 1$, τις αρχικές συνθήκες

$$u(x,0) = v(x,0) = 0\,,$$

και τις συνοριακές συνθήκες von Neumann

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(1,t)}{\partial x} = 0\,,$$

1. Να γράφετε πρόγραμμα που θα ολοκληρώνει το παραπάνω πρόβλημα με τη μέθοδο Euler. Αν το βήμα ολοκλήρωσης είναι dt, το πρόγραμμα θα καταγράφει τις τιμές των $u(1/2,t)$, $v(1/2,t)$ ανά χρονικά διαστήματα $10dt$ σε ένα αρχείο `fhnresults.txt`. Την τελική χρονική στιγμή t_f της ολοκλήρωσης, το πρόγραμμα θα καταγράφει τις τιμές των $(x, u(x,t_f), v(x,t_f))$ στο αρχείο `fhnprofile.txt`.

2. Να τρέξετε το πρόγραμμα για $a = 0.1$, $b = 1$, $D = 0.001$, $e = 0.01$, $I = 0.1$ και $N_x = 20$ από χρόνο $t = 0$ μέχρι $t_f = 1000$ με βήμα $dt = 0.01$. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των $u(1/2,t)$, $v(1/2,t)$ στο ίδιο διάγραμμα. Τι συμπεραίνετε για τις τιμές των $u(x,t_f), v(x,t_f)$;

3. Επαναλάβατε για $I = 0.01$ και $I = 0.8$. Τι παρατηρείτε;

<u>ΘΕΜΑ</u>

Θεωρείστε την απεικόνιση

$$x_{n+1} = \begin{cases} r x_n\,, & 0 \le x_n < \frac{1}{2} \\ r(1 - x_n)\,, & \frac{1}{2} \le x_n \le 1 \end{cases}$$

Η παραπάνω απεικόνιση αποκαλείται απεικόνιση σκηνής (tent map).

1. Κατασκευάστε το διάγραμμα διακλάδωσης των λύσεων για τιμές του r μεταξύ 1 και 2 με βήμα 0.0025.

   (α) Γράψτε τα αποτελέσματα σε ένα αρχείο που θα ονομάσετε `resultstentmap.txt` και στο οποίο θα γράφετε σε κάθε επανάληψη αλλά **μόνο** τις τελευταίες 500 τιμές από τη σειρά της απεικόνισης με αυτή τη σειρά: α) την τιμή του r και β) την τιμή του x_n. (Για κάθε τιμή του r κάντε 2000 επαναλήψεις της απεικόνισης)

   (β) Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης με το `gnuplot` και ονομάστε το αρχείο `figuretentmap.ps`.

   Μεγενθύνετε την περιοχή του διαγράμματος για $1.407 < r < 1.416$ και $0.580 < x < 0.588$. Σε ποιο σημείο τα δύο μη συνεκτικά διαστήματα μέσα στα οποία παίρνουν τιμές τα x_n συγχωνεύονται σε ένα; Στη συνέχεια μεγενθύνετε τα διαστήματα $1.0 < r < 1.1$, $0.4998 < x < 0.5004$ και $1.00 < r < 1.03$, $0.4999998 < x < 0.5000003$ και εντοπίστε τα σημεία συχώνευσης δύο μη συνεκτικών διαστημάτων μέσα στα οποία παίρνουν τιμές τα x_n.

2. Γράψτε πρόγραμμα για την επαναληπτική εύρεση των σημείων ισορροπίας της παραπάνω απεικόνισης με τη μέθοδο Newton-Raphson. Ξεκινήστε τη μέθοδο με αρχική εκτίμηση των λύσεων ισορροπίας $x = 0.7$.

   (α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας με τη μέθοδο Newton-Raphson με σφάλμα σύγκλισης 1.0×10^{-6} για $r = 1.756$ και $r = 1.2$. Γράψτε σε ένα διαφορετικό αρχείο για κάθε τιμή του r (με τις ονομασίες `resnewton1.txt` και `resnewton2.txt` αντίστοιχα) ανα γραμμή τα εξής:

      i. Αριθμός επανάληψης της μεθόδου Newton-Raphson
      ii. Την τρέχουσα λύση κατά την τρέχουσα επανάληψη
      iii. Το σφάλμα κατά την τρέχουσα επανάληψη

   (β) Χαρακτηρίστε κάθε σημείο ισορροπίας ως προς την ευστάθειά του.

ΘΕΜΑ

Αρμονικός ταλαντωτής φυσικής συχνότητας ω_0 υπόκειται σε ταλάντωση μέσα σε ρευστό με τριβή, έτσι ώστε η επιτάχυνση σαν συνάρτηση του χρόνου να είναι:

$$a(t) = -\gamma v(t) - \omega_0^2 x(t)$$

Ο ταλαντωτής εκτελεί κίνηση με αρχικές συνθήκες $x(0) = A$, $v(0) = -\gamma A/2$. Τότε μπορεί να δειχθεί πως για $\Delta = -\gamma^2 + 4\omega_0^2 > 0$, η εξίσωση που δίνει τη θέση και την ταχύτητα του ταλαντωτή σαν συνάρτηση του χρόνου είναι:

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t/2} \cos(\sqrt{\Delta}\ t/2)$$

$$v(t) = -(A/2)\mathrm{e}^{-\gamma t/2} \left\{ \gamma \cos(\sqrt{\Delta}\ t/2) + \sqrt{\Delta} \sin(\sqrt{\Delta}\ t/2) \right\}$$

1. Να γράψετε πρόγραμμα που να υπολογίζει αριθμητικά με τις μεθόδους Euler, Euler-Cromer και Euler-Verlet τη θέση και την ταχύτητα του ταλαντωτή, καθώς και την ακριβή τιμή της λύσης $x(t)$ από χρόνο $t = 0$ μέχρι χρόνο t_f εκτελώντας N_t χρονικά βήματα. Για κάθε τιμή του χρόνου, αποθηκεύστε στα αντίστοιχα αρχεία `euler.dat`, `euler_cromer.dat`, `euler_verlet.dat` τις τιμές $(t_i, x_i, v_i, x(t_i), x_i - x(t_i))$ σε πέντε στήλες.

2. Να εκτελέστε το πρόγραμμα για $A = 1$, $\gamma = 1$, $\omega_0 = 6.28$, $t_f = 15$, $N_t = 10\,000$. Να φτιάξετε τις γραφικές παραστάσεις (t_i, x_i), $(t_i, x(t_i))$ σε ένα διάγραμμα για κάθε μέθοδο. Μπορείτε να διακρίνετε ποια μέθοδος απέχει περισσότερο από την ακριβή λύση;

3. Να φτιάξετε τη γραφική παράσταση $(t_i, x_i - x(t_i))$ για όλες τις μεθόδους στο ίδιο διάγραμμα. Σχολιάστε την ακρίβεια που επιτυγχάνετε από κάθε μέθοδο για τις παραμέτρους που χρησιμοποιήσατε.

4. Για τη μέθοδο Euler-Cromer, υπολογίστε τη μέγιστη τιμή του σφάλματος $\max(|x_i - x(t_i)|)$ για $N_t = 100, 200, 500, 1000, 5000, 10000, 20000$ σαν συνάρτηση του N_t και του βήματος $\delta t = t_f/(N_t - 1)$. Να κάνετε τη γραφική παράσταση $(\delta t, \max(|x_i - x(t_i)|))$. Σχολιάστε.