ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9 – ΖΩΓΡΑΦΟΥ, 157 80 ΑΘΗΝΑ
ηλ. ταχυδρομείο: semfe@central.ntua.gr, fax: 2107721685
ιστοσελίδα: semfe.ntua.gr

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Κ. Αναγνωστόπουλος Π. Πασιπουλαρίδης Κ. Σιέττος

ΟΔΗΓΙΕΣ:
Γράψτε το (ένα) θέμα που σας δίνεται παρακάτω. Δημιουργήστε κατάλογο στην προσωπική σας περιοχή με όνομα **EXAM** (προσοχή: **όλα κεφαλαία!**). Εκεί μέσα θα βρίσκονται όλα τα σχετικά αρχεία του αντίστοιχου θέματος: Προγράμματα, γραφικές παραστάσεις, αρχεία δεδομένων κλπ. Μέσα στον κατάλογο αυτό θα βρίσκεται αρχείο με όνομα **NOTES** στο οποίο θα δίνετε τις αναγκαίες επεξηγήσεις για τα θέματα που λύνετε (μπορείτε να γράφετε σε greeklish). Επιτρέπεται η χρήση των σημειώσεών σας και η πρόσβαση στις ιστοσελίδες του μαθήματος. Κάθε άλλη αντιγραφή ή επικοινωνία κάνει την εξετάσή σας άκυρη και μηδενίζεστε.

Το συνοδευτικό λογισμικό του 1ου τόμου, εκτός από τη γνωστή του θέση στην ιστοσελίδα, μπορεί να κατέβει και να ανοίξει με τις εντολές:
> wget http://www.physics.ntua.gr/pm.zip
> unzip pm.zip

Τερματικό με φλοιό μπορείτε να ανοίξετε από Applications -> Accessories -> Terminal
Η πρώτη εντολή που θα δώσετε για να πάρετε το γνώριμό σας φλοιο tcsh είναι

$ tcsh

Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να αποθηκευτούν σε αρχεία τύπου jpeg, pdf, postscript, eps, gif, png. Σχετικό παράδειγμα δίνεται από τις παρακάτω εντολές στο gnuplot:
```
gnuplot> plot x, x*2
gnuplot> set terminal postscript color
gnuplot> set output "graph.ps"
gnuplot> replot
gnuplot> set output
gnuplot> set term wxt
gnuplot> ! evince graph.ps
```

Προσοχή: τα αρχεία που θα συλλέξουμε είναι **μόνο** τα αρχεία που θα βάλετε στον κατάλογο ~/EXAM Οποιοδήποτε άλλο αρχείο είναι πιθανό να χαθεί μετά το τέλος των εξετάσεων.

Μη επιτυχημένη υποβολή σύμφωνα με αυτή τη διαδικασία είναι ισοδύναμη με μη παράδοση γραπτού σε συμβατικές εξετάσεις.

Όταν τελειώσετε να γράφετε, κάνετε αποσύνδεση χρήστη (logout) - όχι αλλαγή χρήστη ή shutdown.

Η εξέταση διαρκεί **1 ώρα και 45 λεπτά**

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Η δυναμική εξέλιξης ενός πληθυσμού ψαριών περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$N_{i+1} = r\,N_i e^{-N_i}$$

όπου r είναι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού.

α. Να γράψετε πρόγραμμα Fortran το οποίο να υπολογίζει την εξέλιξη του πληθυσμού, δηλαδή την ακολουθία N0, N1, N2, ...,Nmax δεδομένου ότι γνωρίζουμε το N0.
Τα αποτελέσματα θα πρέπει να γράφονται σε ένα αρχείο με την εξής σειρά: i, N_i.

β. Να τρέξετε το πρόγραμμα για r=5,10,16.5 και αρχικό πληθυσμό $N_0 = 0.1$.
Στην συνέχεια παραστήστε γραφικά τις 80 επόμενες γενιές (Nmax=80)
χρησιμοποιώντας το gnuplot, για κάθε μια από τις τιμές του r. Να γράψετε τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση.

Το πρόγραμμα Fortran να ονομαστεί generation.f. Πρέπει να παραδοθούν τρία αρχεία file1.dat, file2.dat, file3.dat
με τα αποτελέσματα που βρήκατε για r=5,10,16.5. Ακόμη πρέπει να παραδοθεί ένα αρχείο coments1.txt που να περίεχει
τα σχόλια σας πάνω στο ερώτημα β.

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

Δίνεται η ακόλουθη μη γραμμική εξίσωση ταλαντώσεων

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -b \cdot x(t)^3$$

όπου b είναι θετική σταθερά.

α. Να γράψετε πρόγραμμα Fortran το οποίο να επιλύει την παραπάνω διαφορική εξίσωση με την μεθόδο Euler.
Τα αποτελέσματα θα πρέπει να γράφονται σε ένα αρχείο με την εξής σειρά: T(i),X(i),V(i).

β. Να τρέξετε το πρόγραμμα για b=1, με αρχικές συνθήκες X(tin=0)=3, X'(tin=0)=3 και

τελικό χρόνο tf=10. Να μειώσετε το
βήμα ολοκλήρωσης dt μέχρι τα αποτελέσματά σας να σταθεροποιηθούν (εναλλακτικά αυξήστε τον αριθμό βημάτων steps).
Στην συνέχεια χρησιμοποιήστε το gnuplot για να παραστήστε γραφικά την θέση και την ταχύτητα σε συνάρτηση
με τον χρόνο, σε δύο διαφορετικά διαγράμματα.
γ. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα να υπολογίσετε την περίοδο, το πλάτος και την μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης.

Το πρόγραμμα Fortran να ονομαστεί vibration.f. Πρέπει να παραδοθούν δύο αρχεία position.jpg, velocity.jpg
με τις γραφικές παραστάσεις που κάνατε στο ερώτημα β.. Ακόμη πρέπει να παραδοθεί ένα αρχείο coments2.txt που να περιέχει
τις απαντήσεις σας στο ερώτημα γ.

<u>ΘΕΜΑ</u> 3

α. Να γράψετε πρόγραμμα Fortran για την κίνηση σώματος εντός δισδιάστατου τριγωνικού κουτιού, του οποίου το
σύνορο περιγράφεται από τις εξισώσεις: x=0, y=0, x+y=1.
Τα αποτελέσματα θα πρέπει να γράφονται σε ένα αρχείο triangle.dat με την εξής σειρά: t,x,y,vx,vy.

β. Να τρέξετε το πρόγραμμα για αρχικές συνθήκες x(t0=0)=0.1, y(t0=0)=0.7, vx(t0=0)=0.5, vy(t0=0)=0.3, συνολικό χρόνο tf=10, και χρονικό βήμα dt=0.01.
Στην συνέχεια χρησιμοποιήστε το gnuplot για να παραστήστε γραφικά την τροχιά του σώματος (x-y), η οποία πρέπει να σωθεί στο αρχείο triangle.jpg. (20/100)

Το πρόγραμμα Fortran να ονομαστεί triangle.f. Πρέπει να παραδοθούν ακόμη τα δύο αρχεία triangle.dat, triangle.jpg
με τα δεδομένα και την γραφική παράσταση που κάνατε στο ερώτημα β.

<u>Υπόδειξη</u>

1) Όταν το σώμα συγκρούεται στο τοίχωμα x+y=1 η ταχύτητα αλλάζει ως εξής: vx->-vy και vy->-vx

2) Για να κάνετε την γραφική παράσταση στο Gnuplot να δώσετε την εντολή:
plot [0:1] [0:1] "triangle.dat" using 2:3 with line,1-x.
Αμέσως μετά, για να σώσετε την γραφική παράσταση που κάνατε, πληκτρολογήστε:
set terminal jpeg
set output "triangle.jpeg"
replot
set output
set terminal wxt

<u>ΘΕΜΑ</u> 4

Η εξέλιξη πληθυσμού κουνελιών μοντελοποιείται από την αναδρομική σχέση:

$$N_{i+1} = \sin(r \cdot N_i)$$

όπου r είναι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού και i είναι ο αριθμός των ετών από τον αρχικό χρόνο.

α. Να γράψετε πρόγραμμα Fortran το οποίο να υπολογίζει το σημείο ισορροπίας της απεικόνισης
με την μέθοδο Newton Raphson. Τα αποτελέσματα θα πρέπει να γράφονται
σε ένα αρχείο Newton.dat με την εξής σειρά: i, x_i.

β. Να τρέξετε το πρόγραμμα για $r=2$, εκτελώντας πέντε βήματα του αναδρομικού τύπου της Newton Raphson. Δίνεται
το αρχικό σημείο της ακολουθίας: $x_0=1$.
γ. Να ελέγξετε τον τύπο της ευστάθειας του σταθερού σημείου που βρήκατε. Τι μπορείτε να πείτε για την εξέλιξη του πληθυσμού των κουνελιών μετά από μερικές δεκαετίες.

Το πρόγραμμα Fortran να ονομαστεί Newton.f. Πρέπει να παραδοθεί ακόμη ένα αρχείο Newton.dat
με τα δεδομένα που βρήκατε στο ερώτημα β.

<u>Υπόδειξη</u>

1) Να θεωρήσετε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, όπου $f(x)=\sin(r\cdot x)$.

2) Να χρησιμοποιήσετε τον αναδρομικό τύπο

$$x_{i+1}=x_i-\frac{g(x_i)}{g'(x_i)},$$

με $x_0=1$, και να τον εκτελέσετε 5 φορές, για $r=2$.

3) Η παράγωγος της συνάρτησης $g(x)$ στον παραπάνω τύπο
να υπολογιστεί αναλυτικά από την σχέση $g'(x)=f'(x)-1$.

4) Για να μελετήσετε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας x^* που
βρήκατε με την Newton Raphson υπενθυμίζεται ότι:

1) $|f'(x^*)|<1$ το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές
2) $|f'(x^*)|>1$ το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές
3) $|f'(x^*)|=1$ δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα

<u>ΘΕΜΑ 5</u>

Θεωρήστε δύο είδη που ανταγωνίζονται για το ίδιο είδος τροφής. Έστω ότι τα μεγέθη των δύο πληθυσμών στο χρόνο t παριστάνονται από τις μεταβλητές x(t), y(t). Έστω ότι η δυναμική της εξέλιξης του μεγέθους του πληθυσμών στο χρόνο μπορεί να μοντελοποιηθεί από το εξής σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{dx(t)}{dt}=x\,(3-x-2\,y)$$
$$\frac{dy(t)}{dt}=y(2-x-y)$$

Γράψτε ένα πρόγραμμα fortran για την ολοκλήρωση των παραπάνω εξισώσεων με τη μέθοδο Euler. Το πρόγραμμα θα πρέπει να γράφει σε ένα αρχείο τα εξής:

t x(t) y(t)
για κάθε αρχική συνθήκη που θα του δίνετε.

1. Τρέξτε το πρόγραμμα για τις παρακάτω αρχικές συνθήκες δημιουργώντας δύο αρχεία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα
    1. x(t=0) = 1 y(t=0)=2
    2. x(t=0) = 3 y(t=0)=1
2. Πόσο μικρό θα πρέπει να είναι το βήμα ολοκλήρωσης για να πετύχουμε "σύγκλιση" της λύσης;
3. Πόσος χρόνος χρειάζεται περίπου για τη σταθεροποίηση της λύσης;
4. Τι παρατηρείτε; Για ποιες από τις δύο αρχικές συνθήκες υπάρχουν και τα δύο είδη στο τέλος;

ΘΕΜΑ 6

Η διακριτή λογιστική εξίσωση στην τυπική της μορφή δίνεται από την ακόλουθη σχέση:
$N_{k+1} = rN_k(1-N_k)$

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα fortran που θα βρίσκει τα σημεία ισορροπίας της παραπάνω απεικόνισης με τη μέθοδο Newton-Raphson. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας με τη μέθοδο Newton-Raphson με σφάλμα σύγκλισης 10^{-6} για $r = 2.124$ και $r = \sqrt{2}$.
2. Για κάθε ένα από τα σημεία αυτά γράψτε σε ένα αρχείο τα εξής: (α) Αριθμός επανάληψης της μεθόδου Newton-Raphson (β) Την τρέχουσα λύση κατά την τρέχουσα επανάληψη (γ) Το σφάλμα κατά την τρέχουσα επανάληψη.

ΘΕΜΑ 7

Σωμάτιο ακολουθεί την τροχιά:
$x(t) = x_0 \cos(\omega_1 t)$
$y(t) = y_0 \sin(\omega_2 t)$

Γράψτε πρόγραμμα σε fortran στο οποίο ο χρήστης δίνει τα $x_0, y_0, \omega_1, \omega_2$ και το πρόγραμμα υπολογίζει την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σωματιδίου από χρόνο $t_0 = 0$ μέχρι χρόνο t_f με βήμα χρόνου dt, παραμέτρους που το πρόγραμμα ζητάει από το χρήστη και διαβάζει στο stdin. Το πρόγραμμα θα βρίσκεται στο αρχείο kinhsh.f Τα αποτελέσματα αποθηκεύονται σε τρία διαφορετικά αρχεία thesi.dat, taxythta.dat και epitaxynsh.dat. Σε κάθε αρχείο βρίσκονται 3 στήλες, ο χρόνος και οι δύο συνιστώσες της θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης αντίστοιχα.

1. Επιλέξτε $x_0 = 2, y_0 = 1, \omega_1 = 2\pi$. Προσδιορίστε την τιμή της ω_2 ώστε η τροχιά να είναι έλλειψη. Κάνετε τρεις γραφικές παραστάσεις όπου θα φαίνονται οι δύο συνιστώσες της θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης σα συνάρτηση του χρόνου για $t_f = 8, dt = 0.01$. Ονομάστε τα αρχεία thesi.ps, taxythta.ps, epitaxynsh.ps.
2. Για τις παραπάνω παραμέτρους, κάνετε τη γραφική παράσταση της τροχιάς και αποθηκεύστε την στο αρχείο troxia.ps
3. Μεταβάλετε το πρόγραμμά σας ώστε να υπολογίζει την κινητική, δυναμική και (ολική) μηχανική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του κινητού και αποθηκεύστε το στο αρχείο kinhsh1.f. Σε ένα αρχείο energeia.dat να δίνονται σε 4 στήλες οι $t, \frac{T}{m}, \frac{U}{m}, \frac{E}{m}$ (χρόνος, κινητική, δυναμική, μηχανική ενέργεια ανά μονάδα μάζας). Σε ένα διάγραμμα energy.ps να αποθηκεύσετε και τις τρεις γραφικές παραστάσεις.
4. Προσδιορίστε την ω_2 ώστε η τροχιά να είναι περιοδική και να τέμνει μια φορά τον εαυτό της. Κάντε τη γραφική παράσταση της τροχιάς και αποθηκεύστε την στο αρχείο troxia1.ps.

ΘΕΜΑ 8

Σωμάτιο κινείται υπό την επίδραση δύναμης που του προσδίδει επιτάχυνση:

$a(x) = -4\pi^2 x - 20x^3 - 10$

Υπολογίστε τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου από χρόνο t=0 μέχρι t=10 με τη μέθοδο Euler-Verlet με 10000 βήματα παίρνοντας $x(0)=0, v(0)=1$.

1. Κάντε τη γραφική παράσταση της θέσης και της ταχύτητας και αποθηκεύστε τα διαγράμματα στα αρχεία thesi.ps και taxythta.ps
2. Σε ένα αρχείο energy.dat να κάνετε το πρόγραμμά σας να αποθηκεύει το χρόνο, θέση, επιτάχυνση, κινητική ενέργεια, δυναμική ενέργεια και (ολική) μηχανική ενέργεια ανά μονάδα μάζας. Σε ένα αρχείο energy.ps να σώστε τη γραφική παράσταση της κινητικής, δυναμικής και μηχανικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας. Υπολογίστε γραφικά την προσεγγιστική τιμή της μηχανικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας. Διατηρείται; Με πόση ακρίβεια (υπολογίστε γραφικά και προσεγγιστικά την ποσότητα $2(E_{min} - E_{max})/(E_{min} + E_{max}) \times 100$); Εξηγήστε.
3. Από τη γραφική παράσταση θέσης-επιτάχυνσης προσδιορίστε γραφικά και προσεγγιστικά την τιμή της θέσης ισορροπίας του σωματιδίου. Η γραφική παράσταση να σωθεί στο αρχείο ax.ps

ΘΕΜΑ 9

Η θερμοκρασιακή κατανομή u(x,t) μιας μονοδιάστατης ράβδου μήκους **L=1**, την χρονική στιγμή t, ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

όπου **α** είναι η παράμετρος της θερμοδιάχυσης (thermal diffusivity) της οποίας η τιμή εξαρτάται από το υλικό της ράβδου.

1) Να γράψετε πρόγραμμα Fortran το οποίο να επιλύει με πεπερασμένες διαφορές την παραπάνω εξίσωση, δεδομένου ότι θερμοκρασία στα άκρα της ράβδου είναι μηδέν κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

ενώ η θερμοκρασιακή κατανομή u(x,t) κατά μήκος της ράβδου, την χρονική στιγμή t=0 είναι

$$u(x,0) = 0.5[1 - \cos(\frac{2\pi x}{b})] \text{ για } 0 \le x < b \quad \text{και} \quad u(x,0) = 0 \text{ για } b \le x \le L$$

Το πρόγραμμα να ονομαστεί heat_eq.f

2) Να εκτελέσετε το πρόγραμμα για Nx=300, Nt=1000, **α**=0.5, b=0.09, L=1, και να υπολογίσετε την θερμοκρασία συναρτήσει του x, τις χρονικές στιγμές tf=0.0001, 0.001, 0.01, 0.05 (όπου Nx, Nt είναι ο αριθμός των πλεγματικών σημείων κατά μήκος του άξονα-x και άξονα-t αντίστοιχα). Προσοχή, για την χρονική στιγμή tf=0.05 αντί για Nx=300 χρησιμοποιήστε Nx=100. Τα αποτελέσματα θα πρέπει με την εξής σειρά x(i), u(i,Nt), να παραδοθούν στα αρχεία temp_t1.dat, temp_t2.dat, temp_t3.dat και temp_t4.dat αντιστοίχως, για τους τέσσερεις παραπάνω χρόνους. Ακόμη να παραστήσετε γραφικά την θερμοκρασία u(x,tf) συναρτήσει του x για tf=0.0001, 0.001, 0.01 και 0.05 στο ίδιο σύστημα αξόνων, και η γραφική παράσταση να αποθηκευτεί στο αρχείο heat_t.pdf .

3) Να εκτελέσετε το πρόγραμμα για Nx=300, Nt=1000, **α**=5, 2, 1 (τρείς τιμές), b=0.2 και L=1, την χρονική στιγμή tf=0.001. Τα αποτελέσματα θα πρέπει, με την εξής σειρά x(i), u(i,Nt), να παραδοθούν στα αρχεία temp_a1.dat, temp_a2.dat, temp_a3.dat, για τις τρείς παραπάνω τιμές της θερμοδιάχυσης. Ακόμη να παραστήσετε γραφικά την θερμοκρασία u(x,tf) συναρτήσει του x, για tf=0.001 και α=5, 2 και 1 στο ίδιο σύστημα αξόνων, και η γραφική παράσταση να αποθηκευτεί στο αρχείο heat_a.pdf . Σύμφωνα με τα αποτελέσματα σας να σχολιάσετε σύντομα την φυσική σημασία της παραμέτρου **α**.

4) Να εκτελέσετε το πρόγραμμα για Nx=300, Nt=1000, α=1, b=0.09, L=1, tf=0.05. Είναι τα αποτελέσματα που παίρνετε ρεαλιστικά; Αν όχι, να δικαιολογήσετε για πιο λόγο συμβαίνει αυτό υπολογίζοντας την τιμή του Courant Number ο οποίος ορίζεται από την εξίσωση:

$$r = \frac{a\,dt}{(dx)^2}$$

(dt και dx είναι τα διακριτά βήματα ολοκλήρωσης κατά τους άξονες x και t αντιστοίχως).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΕΣ

Τα θέματα που δίνονται παρακάνω είναι ενδεικτικά αυτών που θα ζητηθούν στην τελική εξέταση. Σε κάθε ομάδα θα ζητηθεί να αναπτύξει μέσα σε 1 ώρα και 45 λεπτά ένα θέμα ανάλογου επιπέδου. Η εξέταση θα γίνει μπροστά στους υπολογιστές των αιθουσών που διδάσκεστε και θα βγει πρόγραμμα κατανομής τη Δευτέρα 14/6, όπου καθένας θα πρέπει να παρουσιαστεί στην αναφερόμενη αίθουσα και χρόνο που θα έχει προσδιοριστεί από την κατανομή. Μπορείτε να έχετε μαζί σας σημειώσεις/βιβλία, καθώς και να χρησιμοποιήσετε τα αρχεία που θα βρίσκονται στην προσωπική σας περιοχή. Το σύστημα δε θα είναι προσβάσιμο την ημέρα της εξέτασης.