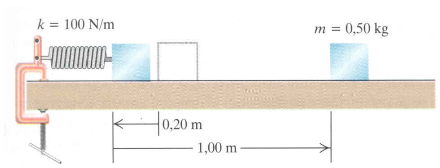
5^{η} Εργασία

Παράδοση 19 Μαΐου 2002

Σύνολο Μονάδων 110

1

Ένα σώμα μάζας 0,50 kg ωθείται συμπιέζοντας ένα οριζόντιο ελατήριο αμελητέας μάζας κατά μία απόσταση 0,20 m. Όταν αφεθεί ελεύθερο το σώμα, κινείται κατά μήκος της οριζόντιας επιφάνειας ενός τραπεζιού καλύπτοντας απόσταση 1,00 m πριν ακινητοποιηθεί. Η σταθερά ελατηρίου k, είναι 100 N/m. Πόσος είναι ο συντελεστής κινητικής τριβής μ_k μεταξύ του σώματος και του τραπεζιού;



Λύση:

Στην αρχική κατάσταση το σώμα βρίσκεται σε ηρεμία και επομένως η κινητική ενεργεία του είναι μηδέν: $K_1 = 0$ ενώ η δυναμική ενέργεια οφείλεται στο ελατήριο θα είναι:

$$U_1 = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 100(N/m) \times (0,20m)^2 = 2J$$

Στην τελική κατάσταση το σώμα ηρεμεί και πάλι, συνεπώς η κινητική ενέργεια του είναι μηδέν: $K_2 = 0$ και η δυναμική ενέργεια η οφειλόμενη στο ελατήριο είναι μηδέν $U_2 = 0$ μιας και το ελατήριο έχει δώσει όλη την ενέργεια του κατά την διάρκεια της επαφής του με το σώμα.

Το έργο της τριβής πάνω στο σώμα αφού διανύσει μια απόσταση s θα είναι:

$$W = \vec{T} \cdot \vec{s} = \mu_k mg \cos\phi s = -\mu_k mgs$$

όπου η δύναμη της τριβής T εκφράζεται από την σχέση $T = \mu_k mg$. Το $\phi = 180^o$ είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος της μετατόπισης και της δύναμης της τριβής (Η δύναμη της τριβής είναι αντίθετη της μετατόπισης).

Η διατήρηση της ενέργειας θα μας δώσει:

$$K_1 + U_1 + W = K_2 + U_2 \Rightarrow W = -U_1 \Rightarrow \mu_k = \frac{U_1}{mgs} \Rightarrow$$

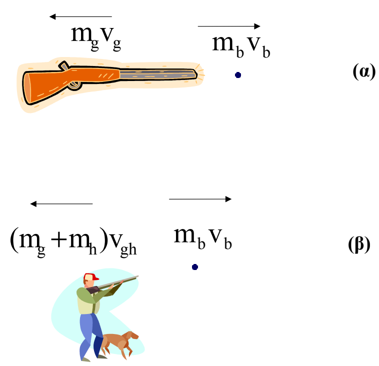
$$\mu_k = 0,408$$

2

Όταν πυροβολούμε μ΄ ένα όπλο όταν το κρατάμε μακριά από τον ώμο μας λέμε ότι ¨κλωτσάει’ (κινείται προς τα πίσω) περισσότερο από όταν το κρατάμε σε επαφή με τον ώμο μας. Εξηγήστε το φαινόμενο.

Λύση:

Έστω m_g η μάζα του όπλου, m_b η μάζα της σφαίρας και m_h η μάζα μας. Ας θεωρήσουμε τις δύο περιπτώσεις όπως φαίνονται στο σχήμα. Στην περίπτωση (α): αρχικά το όπλο και η σφαίρα ισορροπούν (ταχύτητα μηδέν), άρα η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδέν. Μετά την εκπυρσοκρότηση η σφαίρα κινείται με v_b και έχει ορμή $m_b v_b$. Το



όπλο θα κινηθεί στην αντίθετη φορά με ταχύτητα v_g και θα έχει ορμή $m_g v_g$. Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$m_b v_b = m_g v_g \Rightarrow v_g = \frac{m_b v_b}{m_g}$$

Στην δεύτερη περίπτωση η συνολική μάζα που θα κινηθεί δεν είναι μόνο η μάζα του όπλου αλλά η μάζα την δική μας συν την μάζα του όπλου $(m_g + m_h)$. Πάλι από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$m_b v_b = (m_g + m_h)v_{gh} \Rightarrow v_{gh} = \frac{m_b v_b}{m_g + m_h}$$

όπου v_{gh} είναι η ταχύτητα που θα κινηθεί το σύστημα όπλου-ανθρώπου. Είναι προφανές ότι $v_{gh} < v_g$ και γι΄ αυτό παρατηρούμε ότι όταν πυροβολούμε μ΄ ένα όπλο όταν το κρατάμε μακριά από τον ώμο μας λέμε ότι ¨κλωτσάει’ (κτυπάει προς τα πίσω) περισσότερο από όταν το κρατάμε σε επαφή με τον ώμο μας.

3

Πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια, η μάζα A (3,00 kg) κινείται προς τη μάζα B (5,00 kg), η οποία είναι αρχικά ακίνητη. Μετά τη σύγκρουση, η μάζα A έχει ταχύτητα 1,20 m/s προς τ΄ αριστερά και η B 6,50 m/s προς τα δεξιά. α) Ποια ήταν η ταχύτητα της A αρχικά; β) Υπολογίστε τη μεταβολή στην ολική κινητική ενέργεια του συστήματος που συμβαίνει κατά τη σύγκρουση.

Λύση:

α)

Η τελική ορμή του συστήματος θα είναι θετική προς τα δεξιά και θα είναι:

$$P = (3Kg)(-1,2m/s) + (5Kg)(6,5m/s) = 28,9Kgm/s$$

Το Β σώμα είναι σε ηρεμία πριν από την κρούση, επομένως από την διατήρηση της ορμής για την αρχική ταχύτητα του Α σώματος θα είναι:

$$m_A v_{A1} = P \Rightarrow v_{A1} = \frac{P}{m_A} = 9,633m/s$$

όπου ο δείκτη 1 και 2, αναφέρεται στην αρχική και τελική κατάσταση των δυο σωματιδίων αντιστοίχως.

β)

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2 - \frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 = -31,4J.$$

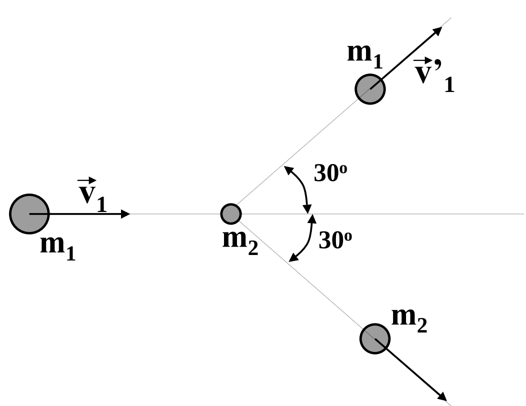
όπου $v_{A2} = -1,2m/s$, $v_{B2} = 6,5m/s$ και $v_{A1} = 9,633m/s$.

4

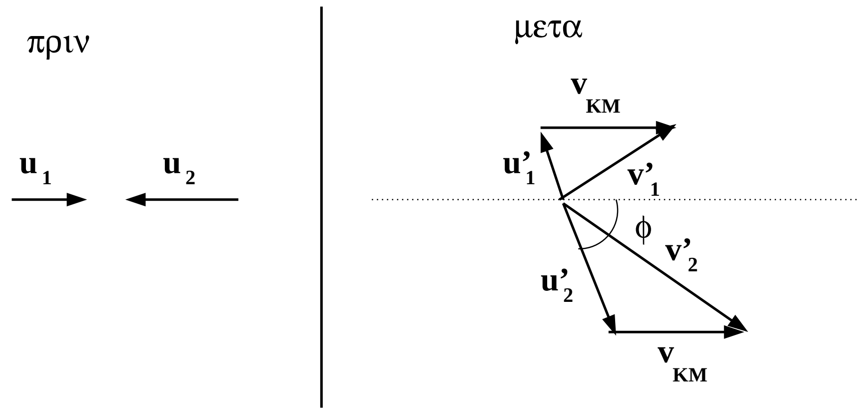
Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται στον άξονα x με ταχύτητα $\vec{v}_1$, συγκρούεται με ακίνητο σώμα του οποίου η μάζα m_2 δεν είναι γνωστή. Μετά την κρούση, το σώμα που έχει μάζα m_1 παρεκκλίνει από την πορεία του προς τα επάνω κατά 30^o, ενώ το δεύτερο σώμα κινείται υπό γωνία 30^o κάτω άπό τον άξονα x, όπως δείχνει το σχήμα. Η κρούση είναι ελαστική.

(α) Να βρείτε τη μάζα m_2 συναρτήσει της m_1 καθώς και τις τελικές ταχύτητες $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$.

(β) Να βρείτε τις ταχύτητες των δυο σωματιδίων πριν και μετά την κρούση στο σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας.



Λύση:



(α)
Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε :
στον άξονα των x:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos 30^o + m_2 v_2' \cos 30^o \Rightarrow m_1 v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(m_1 v_1' + m_2 v_2') \tag{1}$$

στον άξονα των y:

$$0 = m_1 v_1' \sin 30^o - m_2 v_2' \sin 30^o \Rightarrow \frac{m_1 v_1'}{2} = \frac{m_2 v_2'}{2} \Rightarrow v_2' = \frac{m_1}{m_2} v_1' \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας την (2) από την (1) βρίσκουμε:

$$m_1 v_1 = \sqrt{3} m_1 v_1' \Rightarrow v_1' = \frac{v_1}{\sqrt{3}} \tag{3}$$

Από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \tag{4}$$

Χρησιμοποιώντας την (3) από την (4) βρίσκουμε:

$$m_1 v_1^2 = \frac{m_1 v_1^2}{3} + m_2 \frac{m1^2}{m_2^2} \frac{v_1^2}{3} \Rightarrow m_2 = \frac{m_1}{2} \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε :

$$v_2' = 2 v_1' = \frac{2}{\sqrt{3}} v_1 \tag{6}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\vec{v_1'} = \frac{v_1}{\sqrt{3}} (\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y}) \tag{7}$$

$$\vec{v_2'} = \frac{2 v_1}{\sqrt{3}} (\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} - \frac{1}{2} \hat{y}) \tag{8}$$

(β)
Από την αρχή διατήρησης της ορμής μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος.

$$m_1\vec{v_1} + 0 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{KM} \Rightarrow \vec{v}_{KM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v_1} \overset{(5)}{\Rightarrow} \vec{v}_{KM} = \frac{2}{3}\vec{v_1} \tag{9}$$

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του συστήματος έχουμε:

$$\text{πριν την κρούση} : \begin{cases} \vec{u_1} = \vec{v_1} - \vec{v}_{KM} = \vec{v_1} - \frac{2}{3}\vec{v_1} = \frac{v_1}{3}\hat{x} \\ \vec{u_2} = \vec{v_2} - \vec{v}_{KM} = 0 - \frac{2}{3}\vec{v_1} = -\frac{2v_1}{3}\hat{x} \end{cases} \tag{10}$$

$$\text{μετά την κρούση} : \begin{cases} \vec{u_1'} = \vec{v_1'} - \vec{v}_{KM} = (\frac{v_1}{2}\hat{x} + \frac{v_1}{2\sqrt{3}}\hat{y}) - \frac{2}{3}v_1\hat{x} = -\frac{v_1}{6}\hat{x} + \frac{v_1}{2\sqrt{3}}\hat{y} \\ \vec{u_2'} = \vec{v_2'} - \vec{v}_{KM} = (v_1\hat{x} - \frac{v_1}{\sqrt{3}}\hat{y}) - \frac{2v_1}{3}\hat{x} = \frac{v_1}{3}\hat{x} - \frac{v_1}{\sqrt{3}}\hat{y} \end{cases} \tag{11}$$

Για να βρούμε την γωνία μεταξύ των ταχυτήτων μετά την κρούση παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων :

$$\vec{u_1'} \cdot \vec{u_2'} = u'_{1x}u'_{2x} + u'_{1y}u'_{2y} = |\vec{u_1'}||\vec{u_2'}|\cos(\vec{u_1'}, \vec{u_2'}) \tag{12}$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι :

$$\cos(\vec{u_1'}, \vec{u_2'})0 = -1 \Rightarrow \vec{u_2'} \;//\; -\vec{u_1'} \tag{13}$$

Η γωνία στο κέντρο μάζας είναι:

$$\tan\phi = \frac{u'_{2y}}{u'_{2x}} = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \phi = -60^o \tag{14}$$

5

Μια κροτίδα εκρήγνυται μέσα σε μία καρύδα που σπάει σε 3 κομμάτια όπως φαίνεται στο σχήμα. Αυτά τα κομμάτια κινούνται χωρίς τριβή πάνω σε μία επιφάνεια. Το κομμάτι C έχει μάζα $m_C = 0.3M$ και ταχύτητα $v_C = 5m/s$. Το κομμάτι B έχει μάζα $m_B = 0.2M$. Υπολογίστε την ταχύτητα των τμημάτων A και B.

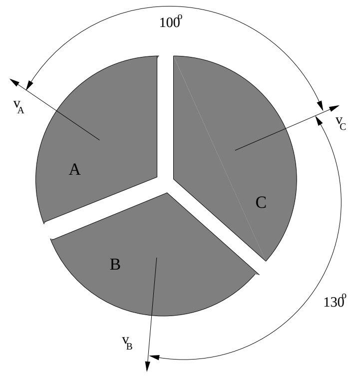
Λύση:

Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε η κατεύθυνση του κομματιού A να είναι κατά την αρνητική φορά του άξονα των x. Οι συντεταγμένες των ορμών των τριών κομματιών στον άξονα των y είναι :

$$p_A^y = 0 \tag{15}$$

$$p_B^y = -0.2Mv_B^y = -0.2Mv_B\sin 50^o \tag{16}$$

$$p_C^y = 0.3Mv_C^y = 0.3Mv_C\sin 80^o \tag{17}$$



Όταν η καρύδα ήταν σε ακινησία είχαμε:

$$p_A^y + p_B^y + p_C^y = 0 \tag{18}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $v_C = 5m/s$ βρίσκουμε:

$$v_B = 9.64m/s \tag{19}$$

Οι συντεταγμένες των ορμών των τριών κομματιών στον άξονα των x είναι :

$$p_A^x = -0.5Mv_A \tag{20}$$

$$p_B^x = -0.2Mv_B^x = -0.2Mv_B \cos 50^o \tag{21}$$

$$p_C^x = 0.3Mv_C^x = 0.3Mv_C \cos 80^o \tag{22}$$

Όταν η καρύδα ήταν σε ακινησία είχαμε:

$$p_A^x + p_B^x + p_C^x = 0 \tag{23}$$

Αντικαθιστώντας την v_C και v_B βρίσκουμε:

$$v_A = 3m/s \tag{24}$$

6

Η ταχύτητα διαφυγής ενός σωματιδίου, v_δ από την επιφάνεια της Γης είναι η ελάχιστη ταχύτητα που χρειάζεται να έχει το σωματίδιο για να διαφύγει από το βαρυντικό πεδίο της Γης. Παραλείψετε την αντίσταση του αέρα.

Δείξτε ότι η ταχύτητα διαφυγής είναι: $v_\delta = 11.2Km/sec$.

Λύση:

Η ολική ενέργεια του μάζας, m στην επιφάνεια της Γης, είναι:

$$E_1 = T_1 + V_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{R}$$

όπου G είναι η σταθερά της βαρύτητας, και M, R είναι η μάζα και η ακτίνα της Γης αντίστοιχα. Η ολική ενέργεια του μάζας, m σε ένα τυχαίο σημείο στο χώρο σε απόσταση r_2 από το κέντρο της Γης, είναι:

$$E_2 = T_2 + V_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{r_2}$$

Η ταχύτητα διαφυγής $v_1 = v_\delta$ στην επιφάνεια της Γης αντιστοιχεί στην κατάσταση όπου η ταχύτητα $v_2 = 0$ και η αντίστοιχη θέση του σωματιδίου θα είναι στο άπειρο, $r_2 = \infty$.

Λόγω διατήρησης της ενέργειας, έχουμε:

$$v_\delta = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2gR}$$

όπου $g = 9,81m/s^2$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και $GM = gR^2$ που προκύπτει από την ισορροπία δυνάμεων ενός σώματος μάζας m στην επιφάνεια της γης (δύναμη βάρους = δύναμη $Newton$):

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2$$

Η ακτίνα της Γης είναι $R = 6400Km$, επομένως η ταχύτητα διαφυγής είναι:
$v_\delta = 11,2Km/s$

7

Βρείτε το έργο της δύναμης $\vec{F} = -k\vec{r}$ για την μετακίνηση σωματιδίου από την θέση $\vec{r}_0$ στη θέση $\vec{r}_1$.

Λύση:

Το έργο, $W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1)$ για την μετακίνηση σωματιδίου από την θέση $\vec{r}_0$ στη θέση $\vec{r}_1$ είναι:

$$W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -k\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

αλλά $\vec{r} \cdot d\vec{r} = rdr = (1/2)dr^2$, άρα το έργο μπορεί να εκφραστεί ως:

$$W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1) = -\frac{1}{2}k\int_{r_0}^{r_1} d(r^2) = -\frac{1}{2}k(r_1^2 - r_0^2).$$

8

Βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα v_0 που κάνει γωνία ϕ με την οριζόντια. Η κίνηση γίνεται κοντά στην επιφάνεια της Γης: θεωρήστε την επιτάχυνση της βαρύτητας g σταθερά. Βρείτε, κάνοντας εφαρμογή της αρχής της διατήρησης της ενέργειας, την κατακόρυφο συνιστώσα της ταχύτητας όταν το βλήμα ευρίσκεται στο μισό του μεγίστου ύψους της τροχιάς του

Λύση:

Όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο μισό του μεγίστου ύψους του $(h/2)$, η ολική ενέργεια του είναι το άθροισμα της κινητικής, $T = (1/2)mv^2 = (1/2)m(v_x^2 + v_y^2)$ και δυναμικής, $U = mgh/2$:

$$E(\frac{h}{2}) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mg\frac{h}{2}$$

όπου η συνιστώσα v_x της ταχύτητας του σωματιδίου είναι ίση με την x-συνιστώσα της αρχική ταχύτητα, $v_x = v_0 \cos\phi$ (δεν υπάρχει δύναμη κατά την διεύθυνση του άξονα x). Το v_y είναι η $y-$συνιστώσα της ταχύτητας στο $h/2$.

Η ολική ενέργεια του σωματιδίου στο μέγιστο ύψος, h θα είναι:

$$E(h) = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgh$$

διότι η συνιστώσα της ταχύτητας στο άξονα του y είναι μηδέν.

Λόγω της διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε:

$$E(\frac{h}{2}) = E(h) \Rightarrow$$

$$v_y = (gh)^{1/2}$$

όπου το μέγιστο ύψος στο πρόβλημα της βολής είναι:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\phi}{2g}$$

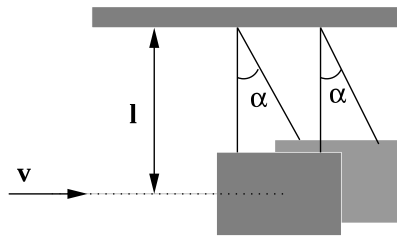
Άρα η v_y στο μισό του μεγίστου ύψους της τροχιάς θα είναι:

$$v_y = \frac{v_0 \sin\phi}{\sqrt{2}}$$

9

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός βλήματος $(m_1 = 12g)$, το πυροβολούμε σε ένα κρεμασμένο κουτί με άμμο $(m_2 = 20kg)$, $l = 1m$ που μπορεί να ταλαντώνεται. Εξαιτίας του πυροβολισμού το κουτί μετακινείται κατά μία γωνία $\alpha = 10^o$.

α) Πόση είναι η κινητική ενέργεια μετά την βολή σαν συνάρτηση της αρχικής κινητικής ενέργειας;



β) Ποια είναι η ταχύτητα της σφαίρας;

Λύση:
α)
Πριν την κρούση έχουμε :

$$E_{\text{κιν}}^{\text{πριν}} = \frac{m_1 v^2}{2}, \quad p_{\text{κιν}}^{\text{πριν}} = m_1 v \tag{25}$$

Μετά την κρούση έχουμε :

$$E_{\text{κιν}}^{\text{μετα}} = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2}, \quad p_{\text{κιν}}^{\text{μετα}} = (m_1+m_2)u \tag{26}$$

Από την διατήρηση της ορμής βρίσκουμε:

$$u = \frac{m_1}{m_1+m_2} v \tag{27}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$E_{\text{κιν}}^{\text{μετα}} = \frac{(m_1+m_2)}{2}\left(\frac{m_1 v}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_1 v^2}{2} \times \frac{m_1}{m_1+m_2} = E_{\text{κιν}}^{\text{πριν}} \times 6 \times 10^{-4} \tag{28}$$

Βλέπουμε ότι μόνο ένα πολύ μικρό της κινητικής ενέργειας του βλήματος μεταφέρεται στο κουτί σαν κινητική ενέργεια. Το υπόλοιπο μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια.
β)
Μετά το κτύπημα από το βλήμα το κουτί θα ανέβει ένα ύψος

$$h = l(1-\cos\alpha) = 0.0152m$$

Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

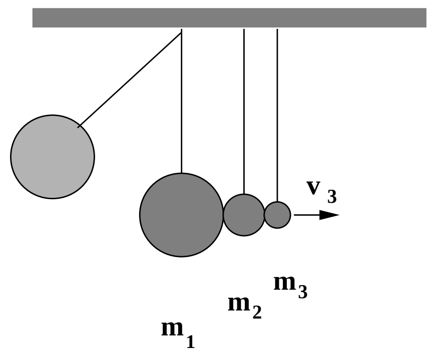
$$E_{\text{κιν}}^{\text{μετα}} = E_{\text{δυν}} \quad \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow u = \sqrt{2gh} \tag{29}$$

Χρησιμοποιώντας την (27) βρίσκουμε την ζητούμενη ταχύτητα του βλήματος:

$$v = \frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gh} = \frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 910.7m/s$$

10

Τρεις ελαστικές σφαίρες των οποίων οι μάζες έχουν αναλογία $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ είναι κρεμασμένες ώστε να εφάπτονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε την μία σφαίρα και την αφήνουμε ελεύθερη ώστε κτυπά τις άλλες δύο σφαίρες με μία ταχύτητα v_1. Για ποια ταχύτητα πετυχαίνουμε την απομάκρυνση της τελευταίας σφαίρας;



Λύση:

Η πρώτη σφαίρα αφού κτυπήσει την δεύτερη σφαίρα θα κινηθεί με ταχύτητα u_1 ενώ η δεύτερη θα κινηθεί με ταχύτητα u_2. Από την διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{30}$$

Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \tag{31}$$

Από τις (30) και (31) βρίσκουμε:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \tag{32}$$

αντικαθιστώντας το δεδομένο ότι $m_1 = 2m_2$ βρίσκουμε:

$$u_2 = \frac{4v_1}{3} \tag{33}$$

Στην συνέχεια υπάρχει η κρούση με την τρίτη σφαίρα. Ομοίως όπως με την δεύτερη σφαίρα βρίσκουμε :

$$v_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} u_2 \tag{34}$$

Χρησιμοποιώντας το δεδομένο $m_2 = 2m_3$ και εν συνεχεία την (33) βρίσκουμε:

$$v_3 = \frac{2m_2}{m_2 + \frac{m_2}{2}} u_2 = \frac{4u_2}{3} = \frac{16v_1}{9} \tag{35}$$

11

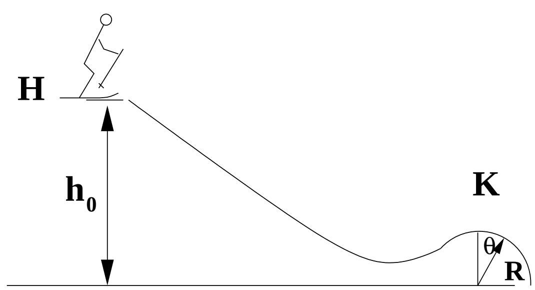
Σκιέρ ξεκινάει από τον λόφο H και κατευθύνεται προς τον λόφο K ο οποίος περιγράφεται από ένα κύκλο ακτίνας P.

α) **Υπολογίστε την ταχύτητα $v(\theta)$ του σκιέρ σαν συνάρτηση της γωνίας θ.**

β) **Σε ποια γωνία εγκαταλείπει ο σκιέρ την πίστα;**

γ) **Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι τουλάχιστο το ύψος h_0 ώστε ο σκιέρ να εγκαταλείψει την πίστα για $\theta = 0^o$;**

δ) **Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι τουλάχιστο το ύψος h_0 ώστε ο σκιέρ να φτάσει μέχρι το πιο ψηλό σημείο της κορυφής; Τι μπορείτε να πείτε για τα πιθανά σημεία θ που εγκαταλείπει ο σκιέρ την πίστα;**



Λύση:

(α)

Έστω ότι ο σκιέρ βρίσκεται πάνω στον λόφο και βρίσκεται σε ένα ύψος $h = R\cos\theta$. Από την διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv(\theta)^2 = mgh_0 \tag{36}$$

από την 36 έχουμε:

$$v(\theta) = \sqrt{2g(h_0 - R\cos\theta)} \tag{37}$$

(β)

Όσο ο σκιέρ είναι πάνω στον λόφο η δύναμη που τον κρατά πάνω στην πίστα είναι:

$$F_N = mg\cos\theta - \frac{mv(\theta)^2}{R} \tag{38}$$

Την στιγμή που εγκαταλείπει την πίστα η δύναμη F_N μηδενίζεται. Άρα η 38 γίνεται:

$$g\cos\theta = \frac{v(\theta)^2}{R} \tag{39}$$

αντικαθιστώντας την ταχύτητα από την σχέση 37 έχουμε:

$$g\cos\theta = \frac{2g(h_0 - R\cos\theta)}{R} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2h_0}{3R} \tag{40}$$

(γ)

Για $\theta = 0^o \Rightarrow \cos\theta = 1$ άρα από την 40 βρίσκουμε:

$$h_0 = \frac{3R}{2} \tag{41}$$

(δ)

για να φτάσει ο σκιέρ στην κορυφή θα πρέπει $h_0 > R$ άρα $\cos\theta \geq 2/3$ δηλαδή θα μπορούσε να εγκαταλείψει την πίστα για $\theta \leq 48.2^o$