4^{η} Εργασία – Λύσεις

1

Δυο σωματίδια με ίσες μάζες συγκρούονται ελαστικά (η ολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων διατηρείται). Δείξτε ότι αν αρχικά το ένα είχε ταχύτητα μηδέν, τότε μετά την κρούση αν και τα δύο σώματα κινούνται, οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων σχηματίζουν γωνία 90^o .
(Βαθμοί 4)

Λύση:

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε :

$$m\vec{v}_1 + 0 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2'$$
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \tag{1}$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_2'^2$$
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1^2 = \vec{v}_1'^2 + \vec{v}_2'^2 \tag{2}$$

Από την (1) έχουμε :

$$v_1^2 = (\vec{v}_1' + \vec{v}_2') \cdot (\vec{v}_1' + \vec{v}_2') = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας την (2) συμπεραίνουμε ότι:

$$\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0$$

Άρα οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων μετά την κρούση είναι κάθετες $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$.

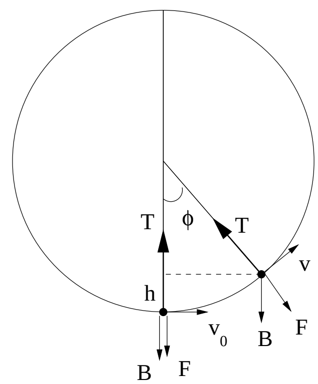
2

Ένα σώμα μάζας $m = 0,1\,kg$ κρεμιέται από την άκρη ενός νήματος μήκους $0,9\,m$. Το σώμα αποκτά οριζόντια ταχύτητα $v_0 = 6\,m/s$ και διαγράφει τροχιά πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογιστεί η τάση στο νήμα σε συνάρτηση με τη γωνία πού σχηματίζει με την κατακόρυφο. Για ποια γωνία το σώμα εγκαταλείπει την κυκλική του τροχιά;
(Βαθμοί 4)

Λύση:

Έστω ότι βρισκόμαστε πάνω στο σώμα που κινείται. Σε μια τυχαία θέση που η ακτίνα σχηματίζει γωνία ϕ με την κατακόρυφη πάνω στο σώμα ενεργούν οι δυνάμεις του βάρους, $\vec{B}$, της τάσης, $\vec{T}$ και η φυγόκεντρος δύναμη, $\vec{F}$. Όπως φαίνεται στο σχήμα το βάρος μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, την ακτινική $\vec{B}_1$ και την εφαπτομενική $\vec{B}_2$. Από την ισορροπία του σώματος κατά την διεύθυνση της ακτίνας έχουμε:

$$T = B_1 + F = B\cos\phi + F \tag{4}$$



Σχήμα 2:

Αλλά

$$F = \frac{mv^2}{R}. \tag{5}$$

Την ταχύτητα v την υπολογίζουμε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R - R\cos\phi)$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 - 2gR(1-\cos\phi)$$

και αντικαθιστώντας στις (4) και (5) βρίσκουμε

$$T = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2 - 3\cos\phi) = \frac{0,1\times 36}{0,9} - 0,1\times 10(2-3\cos\phi) = 2 + 3\cos\phi \ N$$

Το σώμα θα εγκαταλείψει την κυκλική τροχιά στο σημείο όπου $T = 0$

$$\Rightarrow \quad \cos\phi = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = 131,8^o$$

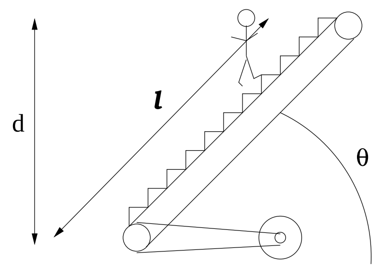
3

Να εξεταστεί το ποσό της ενέργειας πού καταναλώνει μία ηλεκτροκίνητη σκάλα πού έχει ταχύτητα v όταν (α) ο άνθρωπος πού ανεβαίνει στέκεται ακίνητος πάνω της ή (β) βαδίζει πάνω σ' αυτή με σχετική ταχύτητα V'. Ποια είναι η ισχύς και στις δύο περιπτώσεις;

(Βαθμοί 4)

Λύση:

(α)



Σχήμα 3:

Εφόσον ο άνθρωπος είναι ακίνητος πάνω στην σκάλα για να ανέβει σε ύψος $d = \ell \sin\theta$ καταναλώνεται ενέργεια $E = mgd$. Για να φτάσει στην κορυφή της χρειάζεται

$$t = \frac{d}{v \sin\theta}$$

και η ισχύς που καταναλώνεται είναι

$$P = \frac{E}{t} = mgv \sin\theta$$

(β)
Εφόσον ο άνθρωπος βαδίζει σε σχέση με την σκάλα με μια σχετική ταχύτητα V' ο χρόνος που χρειάζεται για να ανέβει στο τελικό ύψος d είναι

$$t' = \frac{d}{(v + V')\sin\theta}$$

Στην διάρκεια αυτού του χρόνου ένα σκαλοπάτι ανεβαίνει κατακόρυφα ένα ύψος

$$h = vt' \sin\theta = \frac{vd}{v + V'}$$

ενώ ο άνθρωπος ανεβαίνει βαδίζοντας ένα ύψος

$$d - h = V't' \sin\theta = \frac{V'd}{v + V'}.$$

Η ενέργεια που καταναλώνεται από την σκάλα είναι

$$mgh = mg\frac{vd}{v + V'}$$

ενώ ο άνθρωπος παράγει έργο ίσο με

$$mg(d - h) = mg\frac{V'd}{v + V'}$$

Η συνολική ενέργεια που απαιτείται για την μετακίνηση του ανθρώπου σε ύψος d είναι

$$mgh + mg(d - h) = mgd$$

που είναι ίση με την ενέργεια που χρειάζεται και στην περίπτωση **(α)**. Η ισχύς που παράγεται από την σκάλα είναι

$$P = \frac{mgh}{t'} = \frac{mg\frac{vd}{v+V'}}{\frac{d}{(v+V')\sin\theta}} = mgv \sin\theta$$

Ας σημειώσουμε ότι η ισχύς που απαιτείται από την σκάλα είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις ενώ το έργο που παράγεται από την σκάλα στην δεύτερη περίπτωση είναι μικρότερο από αυτό που παράγεται στην πρώτη περίπτωση.

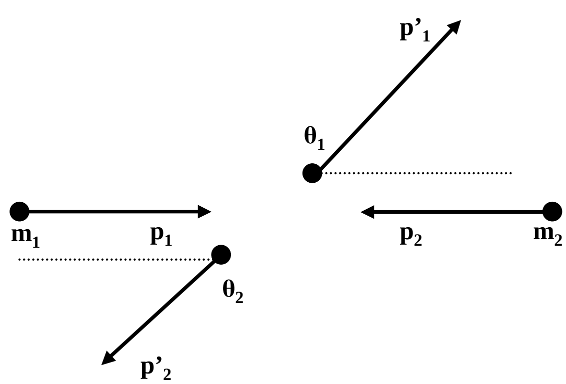
4

Σωματίδιο μάζας m_1 και ορμής p_1 συγκρούεται ελαστικά με άλλο σωματίδιο μάζας m_2 και ορμής p_2, ενώ αυτά κινούνται με αντίθετη κατεύθυνση. Αν το πρώτο σωματίδιο μετά την σύγκρουση σχηματίζει γωνία θ_1 με την αρχική του κατεύθυνση, γράψτε τις εξισώσεις διατήρησης της ενέργειας και ορμής και δείξετε ότι το μέτρο της ορμής του πρώτου σωματιδίου μετά τη κρούση είναι μια από τις ρίζες του τριωνύμου:

$$x^2(1+\gamma) - 2x(p_1 - p_2)\cos\theta_1 + (p_1 - p_2)^2 - (\gamma p_1^2 + p_2^2) = 0$$

όπου $\gamma = m_2/m_1$.
(Βαθμοί 5)

Λύση:



Σχήμα 4:

Από τη διατήρηση της ορμής στους άξονες x, y θα έχουμε:

$$\text{x-διεύθυνση}: \quad p_1 - p_2 = p_1' \cos\theta_1 - p_2' \cos\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad p_2' \cos\theta_2 = p_1' \cos\theta_1 - (p_1 - p_2)$$
$$p_2'^2 \cos^2\theta_2 = p_1'^2 \cos^2\theta_1 + (p_1 - p_2)^2 - 2(p_1 - p_2)p_1' \cos\theta_1 \tag{6}$$

$$\text{y-διεύθυνση}: \quad p_1' \sin\theta_1 = p_2' \sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad p_1'^2 \sin^2\theta_1 = p_2'^2 \sin^2\theta_2$$
$$\Rightarrow \quad p_2'^2 \cos^2\theta_2 = p_2'^2 - p_1'^2 \sin^2\theta_1 \tag{7}$$

και από τη διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1}p_1^2 + p_2^2 = \frac{m_2}{m_1}p_1'^2 + p_2'^2$$

$$\Rightarrow \quad \gamma p_1^2 + p_2^2 = \gamma p_1'^2 + p_2'^2 \Rightarrow p_2'^2 = \gamma p_1^2 + p_2^2 - \gamma p_1'^2 \tag{8}$$

Από τις εξισώσεις (6) και (7) θα έχουμε:

$$p_2'^2 - p_1'^2 \sin^2\theta_1 = p_1'^2 \cos^2\theta_1 + (p_1 - p_2)^2 - 2p_1' \cos\theta_1 (p_1 - p_2)$$

$$\Rightarrow \quad p_2'^2 = p_1'^2 + (p_1 - p_2)^2 - 2p_1' \cos\theta_1 (p_1 - p_2) \tag{9}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8) και (9) θα έχουμε:

$$\gamma p_1'^2 + p_1'^2 - 2p_1'(p_1 - p_2)\cos\theta_1 + (p_1 - p_2)^2 - (\gamma p_1^2 + p_2^2) = 0$$

5

Αφήνουμε μία σφαίρα να πέσει από ύψος $10m$. Αν το 80% της μηχανικής ενέργειας σε κάθε αναπήδηση της σφαίρας στο έδαφος μετατρέπεται σε θερμότητα, να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο θα ηρεμήσει η σφαίρα.

(Δίνεται ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

για $|x| < 1$)

(Βαθμοί 5)

Λύση:

Αρχικά η σφαίρα έχει μόνο δυναμική ενέργεια ίση με mgh.Ύστερα από την πρώτη αναπήδηση η σφαίρα θα φτάσει σε ύψος h_1 και η δυναμική της ενέργεια θα είναι

$$mgh_1 = 0,2mgh$$

$$\Rightarrow \quad h_1 = 0,2h$$

Στη δεύτερη αναπήδηση θα φτάσει σε ύψος $h_2 = 0,2h_1 = 0,2^2 h$, στην τρίτη σε ύψος $h_3 = 0,2h_2 = 0,2^3 h$ κλπ. Ο χρόνος της πρώτης αναπήδησης είναι

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{210}{10}} = 1,41$$

Από την πρώτη ως τη δεύτερη αναπήδηση μεσολαβεί χρόνος

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{\frac{0,4h}{g}} = 0,2^{\frac{1}{2}}\ 2t$$

Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε:

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 0,2\ 2t$$

$$t_3 = 2\sqrt{\frac{2h_3}{g}} = 0,2^{\frac{3}{2}}\ 2t$$

Ο συνολικός χρόνος που αναπηδά η σφαίρα είναι

$$t_{o\lambda} = t + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots = t + 2t(0,2^{\frac{1}{2}} + 0,2^{\frac{2}{2}} + 0,2^{\frac{3}{2}} + \ldots) =$$

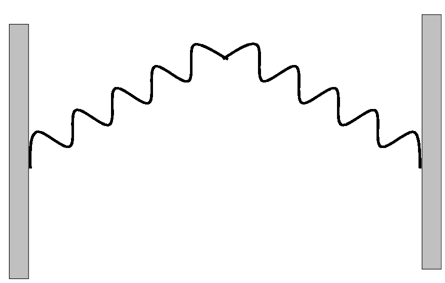
$$t + 2t\frac{0,2^{\frac{1}{2}}}{1 - 0,2^{\frac{1}{2}}} = 2,612t = 3,69\, s$$

6

Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του συστήματος των δύο ελατηρίων του σχήματος 6, όταν η οριζόντια μετατόπιση x είναι μικρή σε σχέση με το αρχικό μήκος ℓ_0 των ελατηρίων. Η σταθερά κάθε ελατηρίου είναι k.

(Ισχύει ότι: Για μικρές τιμές του x μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $(1+x)^n \simeq 1 + nx$)

(Βαθμοί 6)



Σχήμα 6:

Λύση:

Η δύναμη επαναφοράς του κάθε ελατηρίου είναι

$$f = -k(\ell - \ell_0)$$

Η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ των δύο ελατηρίων έχει μέτρο

$$F = \sqrt{f^2 + f^2 + 2f^2 \cos(\pi - 2\phi)} = 2f \sin\phi$$

και διεύθυνση $-\hat{x}$. Άρα

$$\vec{F} = -2l(\ell - \ell_0) \sin\phi \hat{x} \tag{10}$$

Όμως

$$\sin\phi = \frac{x}{\ell} \qquad \text{και} \qquad \ell = \sqrt{\ell_0^2 + x^2}$$

και αντικαθιστώντας στην (10) έχουμε

$$\vec{F} = -2k\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}}\right) x\hat{x} \tag{11}$$

Για μικρό x έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{\ell_0^2 + x^2}} = \frac{1}{\ell_0} - \frac{x^2}{2\ell_0^3} + \dots$$

και η (11) γίνεται

$$\vec{F} = -2k\left[1 - \ell_0\left(\frac{1}{\ell_0} - \frac{x^2}{2\ell_0^3}\right)\right] x\hat{x} = -\frac{k}{\ell_0^2} x^3 \hat{x}$$

Όμως

$$dV = -F dx$$

$$\Rightarrow \quad V = \int -F dx + \text{σταθερά} = \frac{kx^4}{4\ell_0^2} + \text{σταθερά}$$

Επειδή για $x = 0$ η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν προφανώς η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μηδέν. Άρα

$$V = \frac{k}{4\ell_0^2} x^4$$

7

Σωματίδιο μάζας m βάλλεται κατά μήκος οριζόντιας επιφάνειας με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0. Το σωματίδιο υπόκειται σε ολική αντίσταση μέτρου $F = kmxv$, όπου v, x είναι το μέτρο της ταχύτητας και της θέσης του αντίστοιχα σε τυχούσα χρονική στιγμή και k θετική σταθερά. (α) Υπολογίστε την απόσταση, s, που διανύει το σωματίδιο μέχρι να ηρεμήσει ως συνάρτηση των γνωστών μεγεθών.
(β) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) στην περίπτωση που η ολική αντίσταση είναι της μορφής $F = kmxv^2$.
(Βαθμοί 6)

Λύση:

(α)

Η εξίσωση κίνησης για το σωματίδιο θα είναι:

$$m\frac{dv}{dt} = -mkvx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -kxv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -kxv$$

$$\Rightarrow \quad v\frac{dv}{dx} = -kxv$$

$$\Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} dv = -k\int_0^s xdx$$

$$\Rightarrow \quad v = v_0 - \frac{k}{2}s^2$$

Όταν το σώμα θα σταματήσει $v = 0$ και επομένως η σχέση της ταχύτητας και θέσης θα είναι:

$$0 = v_0 - \frac{k}{2}s^2$$

$$\Rightarrow \quad s = \sqrt{\frac{2v_0}{k}}$$

(β)
Στην περίπτωση που η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι $F = -mkxv^2$, η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$m\frac{dv}{dt} = -mkxv^2$$

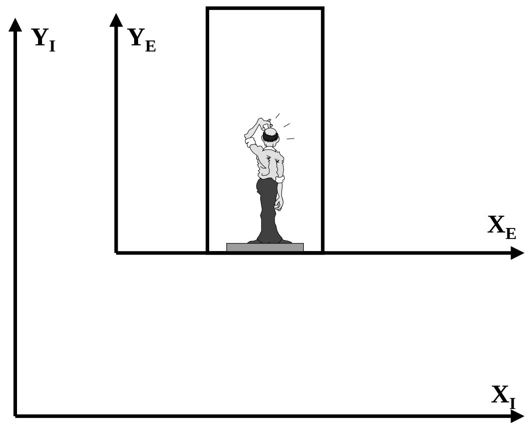
$$\Rightarrow \quad v\frac{dv}{dx} = -kxv^2$$

$$\Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^s xdx$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{k}{2}s^2$$

$$\Rightarrow \quad v = v_0 e^{-ks^2/2}$$

Για $v = 0$ έπεται ότι $s \to \infty$.



Σχήμα 8:

8

Ένας άνθρωπος με μάζα $70\,kg$ πατάει επάνω σε μια ζυγαριά η οποία βρίσκεται σε ασανσέρ που κινείται κατακόρυφα με κάποια επιτάχυνση. Πόσο βάρος θα δείξει η ζυγαριά αν η επιτάχυνση του ασανσέρ είναι: (α) $0\,m/s^2$, (β) $1,2\,m/s^2$, (γ) $-9,8\,m/s^2$.
Να περιγράψτε τις δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο αυτόν για ένα παρατηρητή που βρίσκεται (i) ακίνητος στο έδαφος και (ii) ακίνητος στο ασανσέρ.

(Βαθμοί 6) **<u>Λύση:</u>**

Ας θεωρήσουμε ότι $\vec{a}_I$, $\vec{a}$ είναι η επιτάχυνση μετρούμενη στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S, και στο σύστημα του ασανσέρ S' αντίστοιχα. Από τον μετασχηματισμό των επιταχύνσεων θα έχουμε:

$$\vec{a}_I = \vec{a} + \vec{a}_0 \tag{12}$$

όπου $\vec{a}_0$ είναι η επιτάχυνση του ασανσέρ. Αν πολλαπλασιάσουμε με την μάζα m και τις δυο πλευρές της εξίσωσης (12) θα έχουμε:

$$m\vec{a}_I = m\vec{a} + m\vec{a}_0$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{a} = m\vec{a}_I - m\vec{a}_0$$

Αν $\vec{N}$ είναι η δύναμη που εξασκεί το δάπεδο στον άνθρωπο, τότε η συνολική δύναμη στον άνθρωπο μέσα στο ασανσέρ θα είναι μηδέν (ώστε να υπάρχει ισορροπία):

$$\vec{F} = \vec{N} + m(\vec{a}_I - \vec{a}_0) = 0 \tag{13}$$

(α)
Αν η επιτάχυνση στο ασανσέρ είναι $\vec{a}_0 = 0$, τότε θα έχουμε:

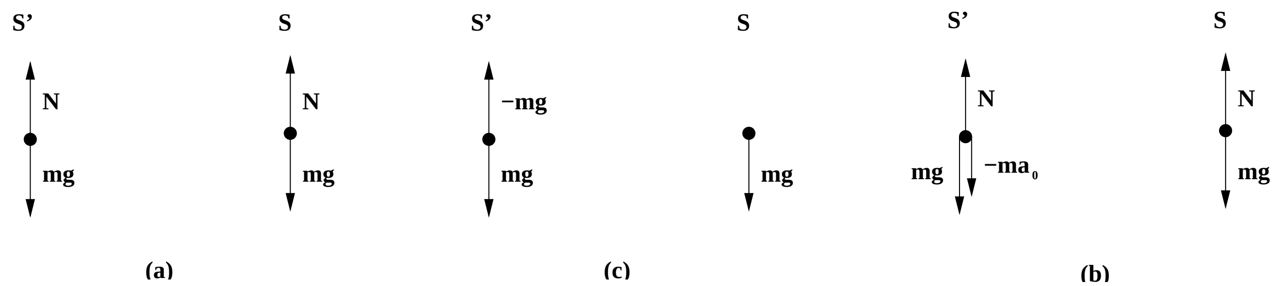
$$\vec{a}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}_I$$

$$\Rightarrow \quad \vec{N} + m\vec{a}_I = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{N} = -m\vec{a}_I$$
$$\Rightarrow \quad N\hat{y} = mg\hat{y}$$
$$\Rightarrow \quad N = 686\,N$$

όπου $\vec{a}_I = -g\hat{y}$ είναι η επιτάχυνση μετρούμενη από έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στο έδαφος (δηλαδή είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, g). Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο για έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στο έδαφος και για έναν που είναι ακίνητος στο ασανσέρ δείχνονται στο σχήμα ($9a$), όπου θα έχουμε την δύναμη της βαρύτητας $m\vec{g}$ και την δύναμη του δαπέδου $\vec{N}$.



Σχήμα 9:

(β)
Αν $\vec{a}_0 = 1,2\hat{y}\,m/s^2$, θα έχουμε από την σχέση (12):

$$\vec{a} = \vec{a}_I - \vec{a}_0 = -(9,8+1,2)\hat{y} = -11\hat{y}$$

και επομένως η δύναμη $\vec{N}$ θα είναι:

$$\vec{N} = m\vec{a} = 770\hat{y}\,N$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο για έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στο ασανσέρ οι δυνάμεις είναι:

- η δύναμη $\vec{N}$ που ασκεί το δάπεδο του ασανσέρ,
- η δύναμη βαρύτητας $m\vec{g}$
- η υποθετική δύναμη $-m\vec{a}_0$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο για έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στο έδαφος θα είναι όπως φαίνονται στο σχήμα ($9b$), δηλαδή δεν θα υπάρχει η υποθετική δύναμη $-m\vec{a}_0$
(γ)
Αν $\vec{a}_0 = -9,8\hat{y}\,m/s^2$ δηλαδή έχουμε ελεύθερη πτώση, τότε η επιτάχυνση για τον άνθρωπο μέσα στο ασανσέρ θα είναι:

$$\vec{a} = \vec{a}_I - \vec{a}_0 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \vec{N} = 0$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο για έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στο έδαφος θα είναι όπως φαίνονται στο σχήμα ($9c$), δηλαδή δεν θα υπάρχει μόνο η δύναμη της βαρύτητας.

9

Δυο σωματίδια με ίσες μάζες m κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να είναι:

$$\vec{r}_1 = (t^2 + 3t - 5)\hat{x} + (3t + 7)\hat{y} + (21 - 2t^2)\hat{z}$$

και

$$\vec{r}_2 = (25 - t - t^2)\hat{x} + (5t + 1)\hat{y} + (2t^2 - 5t)\hat{z}$$

(α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και υπολογίστε πότε θα συμβεί η κρούση.
(β) Διατηρείται η ορμή του συστήματος;
(γ) Αν η κρούση είναι πλαστική, να βρείτε την ταχύτητά τους μετά την κρούση και την κατοπινή τους θέση συναρτήσει του χρόνου.
(Βαθμοί 9)

Λύση:

(α)
Για να συγκρουσθούν τα δύο σωματίδια θα πρέπει $\vec{r_1}(t_\Sigma) = \vec{r_2}(t_\Sigma)$ όπου t_Σ ο χρόνος της σύγκρουσης.
Για τις τρεις συντεταγμένες έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{x}: \quad & x_1(t_\Sigma) = x_2(t_\Sigma) \\ \Rightarrow \quad & t_\Sigma^2 + 3t_\Sigma - 5 = -t_\Sigma^2 - t_\Sigma + 25 \\ \Rightarrow \quad & t_\Sigma^2 + 2t_\Sigma - 15 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}: \quad & y_1(t_\Sigma) = y_2(t_\Sigma) \\ \Rightarrow \quad & 3t_\Sigma + 7 = 5t_\Sigma + 1 \\ \Rightarrow \quad & t_\Sigma = 3s \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \hat{z}: \quad & z_1(t_\Sigma) = z_2(t_\Sigma) \\ \Rightarrow \quad & -2t_\Sigma^2 + 21 = 2t_\Sigma^2 - 5t_\Sigma \\ \Rightarrow \quad & 4t_\Sigma^2 - 5t_\Sigma - 21 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

$$(14) \quad \Rightarrow \quad t_\Sigma = \begin{cases} 3s \\ -5s \quad \text{Μη φυσική λύση} \end{cases} \tag{17}$$

$$(16) \quad \Rightarrow \quad t_\Sigma = \begin{cases} 3s \\ -\frac{7}{4}s \quad \text{Μη φυσική λύση} \end{cases} \tag{18}$$

Άρα τα σωματίδια θα συγκρουσθούν μετά από $t_\Sigma = 3s$

(β)
Οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων είναι αντίστοιχα:

$$\vec{v}_1(t) = \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} = (2t + 3)\hat{x} + 3\hat{y} - 4t\hat{z} \tag{19}$$

$$\vec{v}_2(t) = \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} = (-2t-1)\hat{x} + 5\hat{y} + (4t-5)\hat{z} \tag{20}$$

Οι επιταχύνσεις και οι δυνάμεις που δρουν πάνω στα δύο σωματίδια είναι αντίστοιχα:

$$\vec{a}_1(t) = \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} = 2\hat{x} - 4\hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_1 = m\vec{a}_1 = m(2\hat{x} - 4\hat{z})$$

$$\vec{a}_2(t) = \frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} = -2\hat{x} + 4\hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_2 = m\vec{a}_2 = m(-2\hat{x} + 4\hat{z})$$

Από τις (9) και (9) έχουμε

$$\vec{F}_{\mathrm{O\Lambda}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Άρα δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη στο σύστημα των δύο σωματιδίων και επειδή

$$\vec{F}_{\mathrm{O\Lambda}} = \frac{\vec{P}_{\mathrm{O\Lambda}}}{dt} = 0$$

Άρα η ορμή του συστήματος είναι σταθερή.
Άλλος τρόπος:

$$\vec{P}_{\mathrm{O\Lambda}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

Αντικαθιστώντας τις ταχύτητες από τις (19) και (20) βρίσκουμε:

$$\vec{P}_{\mathrm{O\Lambda}} = m(2\hat{x} + 8\hat{y} - 5\hat{z})$$

Απ΄ όπου βλέπουμε ότι η ορμή είναι σταθερή.
(γ)
Από την διατήρηση της ορμής έχουμε :

$$\vec{P}_{\text{Πριν}} = \vec{P}_{\text{Μετα}}$$

Επειδή έχουμε πλαστική κρούση ισχύει:

$$\vec{P}_{\text{Μετα}} = 2m\vec{v}'$$

$$\Rightarrow \quad m(2\hat{x} + 8\hat{y} - 5\hat{z}) = 2m\vec{v}'$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}' = \hat{x} + 4\hat{y} - \frac{5}{2}\hat{z}$$

Στο σημείο της κρούσης έχουμε:

$$\vec{r}(3s) = \vec{r}_1(3s) = \vec{r}_2(3s) = 13\hat{x} + 16\hat{y} + 3\hat{z}$$

για το σύστημα των δύο σωματιδίων μετά την πλαστική κρούση ($t \geq 3s$) έχουμε :

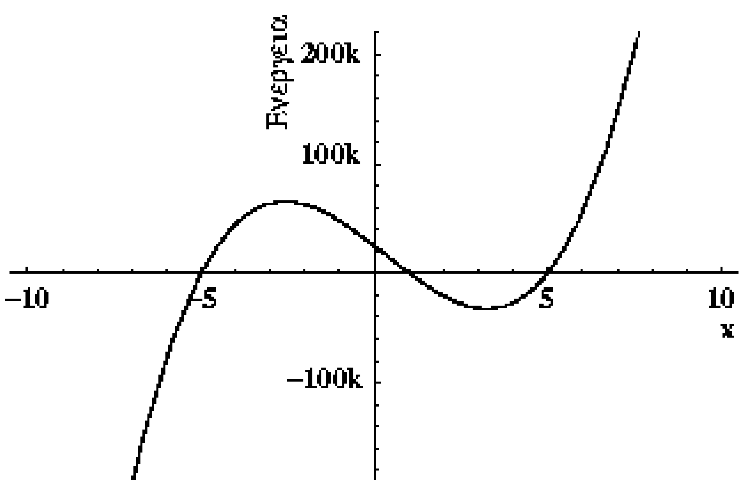
$$\vec{r}'(t \geq 3s) = \vec{r}(3s) + \vec{v}'(t-3) = (10+t)\hat{x} + 4(1+t)\hat{y} + \frac{1}{2}(21-5t)\hat{z}$$

10

Σώμα κινείται σε μια διάσταση με δυναμική ενέργεια που δίνεται από την σχέση:

$$U(x) = k(x^3 - x^2 - 25x + 25)$$

όπου k είναι μια θετική σταθερά. Βρείτε τη δύναμη ως συνάρτηση της θέσης. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας προσδιορίζοντας το είδος της. Αν κάποια χρονική στιγμή το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 2$ με ολική μηχανική ενέργεια $E = 25k$, βρείτε τα όρια της κίνησης του σώματος και περιγράψτε εν συντομία την κίνηση του.
(Βαθμοί 8)



Σχήμα 10:

<u>Λύση:</u>

Η δύναμη δίνεται από την σχέση:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Στην περίπτωσή μας το δυναμικό εξαρτάται μόνο από το x άρα έχουμε:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -(3x^2 - 2x - 25)k \tag{21}$$

Στα σημεία ισορροπίας έχουμε $F = 0$. Από την σχέση (21)έχουμε:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{304}}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3.24 \\ \\ x_2 = -2.57 \end{cases}$$

Από το σχήμα είναι προφανές ότι το σημείο x_2 είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας και το σημείο x_1 σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Η συνολική μηχανική ενέργεια του σώματος μας δίνεται ότι είναι $E = U + K = 25k$, όπου U είναι η δυναμική ενέργεια και K η κινητική. Στα όρια της κίνησης η κινητική ενέργεια μηδενίζεται άρα έχουμε $E = U$ άρα:

$$25k = (x^3 - x^2 - 25x + 25)k$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x^3 - x^2 - 25x = 0 \qquad (22) \\ &\Rightarrow \quad x(x^2 - x - 25) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \\ x^2 - x - 25 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

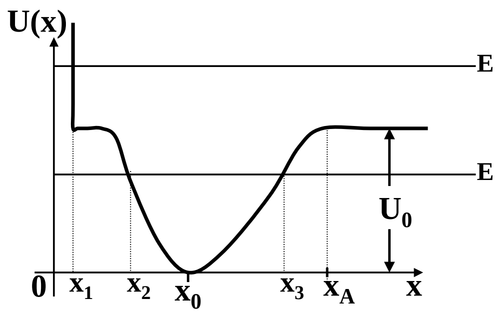
άρα οι λύσεις της (22) είναι:

$$(22) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{101}}{2} = 5,52 \\ \\ x_3 = \frac{1-\sqrt{101}}{2} = -4,52 \end{cases}$$

Επειδή το σώμα βρίσκεται στο σημείο $x = 2$ μπορεί να κινηθεί μόνο στην θετική περιοχή του x άρα μπορεί να κινηθεί μόνο μεταξύ των σημείων $x_1 = 0$ και $x_2 = 5,52$

11

(α) Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο δυναμικό πεδίο του σχήματος 11. Αρχικά ($t = 0$) βρίσκεται στη θέση x_A με ταχύτητα $-v_A\hat{x}$. Δείξτε ότι μετά πάροδο χρόνου t_π το σωματίδιο θα βρεθεί και πάλι στη θέση x_A με ταχύτητα $v_A\hat{x}$ όπου $v_A > 0$. Δείξτε ότι $t_\pi < 2(x_A - x_E)/v_A$, όπου x_E προσδιορίζεται από την σχέση $U(x_E) = E$, όπου E είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου. (β) Δείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου όταν η ολική του ενέργεια, E, είναι πολύ μικρή, $0 < E \ll U_0$, είναι αρμονική περιοδική. Ποια είναι η χωρική περιοχή και ποια η περίοδος της κίνησης; (γ) Έστω ότι η ολική ενέργεια του σωματιδίου είναι αρκετά μεγάλη αλλά μικρότερη του U_0, $0 \ll E < U_0$. Περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση του σωματιδίου. Δώστε ένα ακριβές κάτω όριο της περιόδου, και ένα πολύ προσεγγιστικό τύπο για το μέγεθος της.



Σχήμα 11:

(Βαθμοί 9)

Λύση:

(α)

Το σωματίδιο κινείται προς τ' αριστερά μέχρι το x_E, ανακλάται και επιστρέφει. Στην προκειμένη περίπτωση το $x_E \equiv x_1$. Στην θέση x_A έχει την αρχική κινητική ενέργεια αλλά θα κινείται με αντίθετη φορά. Η μέγιστη κινητική στην διαδρομή $x_A \rightarrow x_E \rightarrow x_A$ είναι:

$$\frac{1}{2}mv^2(x_0) = U_0 + \frac{1}{2}mv_A^2$$

και κυμαίνεται:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 < \frac{1}{2}mv^2 < U_0 + \frac{1}{2}mv_A^2$$

άρα ο χρόνος που χρειάζεται για την διαδρομή $x_A \rightarrow x_E \rightarrow x_A$ είναι

$$t < \frac{2(x_A - x_E)}{v_A}$$

(β)

Όταν $E \ll U_0$ το σωματίδιο κινείται κοντά στο x_0. Αν αναπτύξουμε το δυναμικό σε σειρά $Taylor$ γύρω από το σημείο x_0 και πάρουμε μόνο τους τρεις πρώτους όρους έχουμε:

$$U = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)(x - x_0)^2$$

Αλλά

$$U(x_0) = 0 \qquad \textbf{και} \qquad \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0} = 0$$

Άρα

$$U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \qquad \textbf{όπου} \qquad k = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)$$

που είναι το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή, άρα το σώμα θα εκτελεί ταλάντωση γύρω από το σημείο x_0. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{όπου} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi \left(\frac{U''(x_0)}{m} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ο χώρος κίνησης του σωματιδίου είναι:

$$-x_E < x < x_E$$

Η συνολική του ενέργεια είναι:

$$E = \frac{1}{2} U''(x_0) x_E^2$$

$$\Rightarrow \quad x_E = \sqrt{\frac{2E}{U''(x_0)}}$$

(γ)
Όταν $0 \ll E < U_0$ η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η ταχύτητα είναι $\sqrt{(2E)/m}$ άρα η ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$$0 < v < \sqrt{(2E)/m}$$

και η περίοδος για την κίνηση μεταξύ των σημείων x_2 και x_3 είναι:

$$T > \frac{2(x_3 - x_2)}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}$$

12

Ένα σώμα μάζας m μπορεί να κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο xy, χωρίς τριβές. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στο σημείο $(x = 0, \ y = 0)$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}(0) = v_0 \hat{y}$, όπου $v_0 > 0$. Πάνω στο σώμα ασκείται η δύναμη $\vec{F} = (\alpha - \beta t)\hat{x} - \beta t \hat{y}$, όπου $\alpha, \beta > 0$ σταθερές.
(α) Διατυπώσατε την εξίσωση κίνησης του σώματος.
(β) Υπολογίστε την ταχύτητα, $\vec{v}(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου.
(γ) Υπολογίστε τις συντεταγμένες $x(t), \ y(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου.
(δ) Βρείτε τη σχέση που πρέπει να συνδέει τις σταθερές $\alpha, \ \beta$ και v_0, ώστε να μπορέσει το σώμα να ξαναπεράσει από το σημείο $x = 0, \ y = 0$.
(Βαθμοί 10)

Λύση:

(α)
Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = (\alpha - \beta t)\hat{x} - \beta t\hat{y} \tag{23}$$

(β)
Από την σχέση (23) έχουμε:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{(\alpha - \beta t)}{m}$$

$$\Rightarrow \quad v_x = \left(\frac{\alpha t}{m} - \frac{\beta t^2}{2m}\right) \tag{24}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\beta t}{m}$$

$$\Rightarrow \quad v_y = \left(v_0 - \frac{\beta t^2}{2m}\right) \tag{25}$$

(γ)
Ολοκληρώνοντας τις σχέσεις (24) και (25) βρίσκουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος θέσεως του σώματος :

$$x(t) = \frac{\alpha t^2}{2m} - \frac{\beta t^3}{6m} \tag{26}$$

$$y(t) = v_0 t - \frac{\beta t^3}{6m} \tag{27}$$

(δ)
Για να ξαναπεράσει το σώμα από το σημείο $(x, y) = (0, 0)$ πρέπει η (26) και η (27) να μηδενίζονται. Άρα:

$$x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\alpha}{2m} - \frac{\beta t}{6m}\right) t^2 = 0 \tag{28}$$

$$y(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(v_0 - \frac{\beta t^2}{6m}\right) t = 0 \tag{29}$$

Από τις (28) και (29) βλέπουμε ότι οι λύσεις είναι $t = 0$ (που είναι η ώρα εκκίνησης) και

$$t = \frac{3\alpha}{\beta} \tag{30}$$

αντικαθιστώντας την σχέση (30) στην (29) βρίσκουμε:

$$v_0 = \frac{3\alpha^2}{2\beta m}$$

13

Ένα σώμα μάζας m αφήνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα στην επιφάνεια μιας λίμνης (πολύ μεγάλου βάθους) και συνέχεια βυθίζεται κατακόρυφα προς τον πυθμένα της λίμνης. Στο σώμα εξασκούνται οι ακόλουθες δυνάμεις: το βάρος του $\vec{B} = mg\hat{z}$, η άνωση $\vec{A} = -A\hat{z}$ και μια δύναμη αντίστασης $-\gamma\vec{v}$, όπου γ είναι μία σταθερά και $\vec{v}$ η ταχύτητα του σώματος. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ έχει διεύθυνση κατακόρυφη προς τον πυθμένα της λίμνης. Υποθέτουμε ότι $A < mg$. (α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σώματος για $t > 0$. (β) Βρείτε τη θέση του σώματος (δηλ. την απόσταση από την επιφάνεια της λίμνης) για $t > 0$. (γ) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του σωματιδίου για $t \gg 1/\lambda$, όπου $\lambda \equiv \gamma/m$. (δ) Υπολογίστε το έργο της βάρους $\vec{B} = mg\hat{z}$ μέχρι την χρονική στιγμή t, υποθέτοντας ότι $t \gg 1/\lambda$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα των ερωτήσεων (γ) και (δ) σχετικά με τη διατήρηση της ολικής ενέργειας.

(Βαθμοί 12)

Λύση:

(α) Από τον δεύτερο νόμο του Newton λαμβάνοντας υπ΄ όψιν όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, θα έχουμε:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - A - \gamma v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = f - \lambda v$$

όπου $f \equiv g - A/m$ και $\lambda \equiv \gamma/m$.
Η εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί γράφοντας:

$$\frac{dv}{f - \lambda v} = dt$$

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{f - \lambda v} = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{v(t)} \frac{d(f - \lambda v)}{f - \lambda v} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{f - \lambda v}{f}\right) = -\lambda t$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{f}{\lambda} - \frac{f}{\lambda}e^{-\lambda t} = \frac{f}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \tag{31}$$

(β) Η θέση του σώματος, $z(t)$ μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας την σχέση (31):

$$\frac{dz}{dt} = v = \frac{f}{\lambda} - \frac{f}{\lambda}e^{-\lambda t} \Rightarrow$$

$$\int_0^z dz = \int_0^t \left(\frac{f}{\lambda} - \frac{f}{\lambda}e^{-\lambda t}\right) dt \Rightarrow$$

$$z(t) = \frac{f}{\lambda}t + \frac{f}{\lambda^2}e^{-\lambda t} - \frac{f}{\lambda^2}$$

(γ)

Για την συνθήκη $t \gg 1/\lambda$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & t \gg 1/\lambda \\ \Rightarrow \quad & \lambda t \gg 1 \\ \Rightarrow \quad & e^{-\lambda t} \ll 1 \\ \Rightarrow \quad & v(t) \simeq \frac{f}{\lambda} \end{aligned}$$

Άρα η κινητική ενέργεια, $T = (1/2)mv^2$ του σώματος εκφράζεται ως:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{f}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{mg - A}{\gamma}\right)^2$$

όπου αντικαταστήσαμε $f = g - A/m$ και $\lambda = \gamma/m$.
(δ)
Ομοίως για την θέση, $z(t)$ του σώματος όταν $t \gg 1/\lambda$ θα έχουμε:

$$z(t) \simeq \frac{f}{\lambda^2}\lambda t - \frac{f}{\lambda^2} = \frac{f}{\lambda^2}(\lambda t - 1)$$

$$\Rightarrow \quad z(t) \simeq \frac{f}{\lambda}t \simeq \left(\frac{mg - A}{\gamma}\right)t$$

Άρα το έργο της βαρυτικής δύναμης μέχρι κάποια χρονική στιγμή t θα είναι:

$$W = mgz(t) = \left(\frac{mgf}{\lambda}\right)t = mg\left(\frac{mgf}{\lambda}\right)t$$

και όπως βλέπουμε αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο, αντίθετα με την κινητική ενέργεια που παραμένει σταθερή.

Η διαφορά οφείλεται στην ύπαρξη της άνωσης και της αντίστασης, μέσω των οποίων το έργο του βάρους μείων το έργο της άνωσης (W(βάρος - άνωση)) μεταβάλλεται σε θερμότητα.

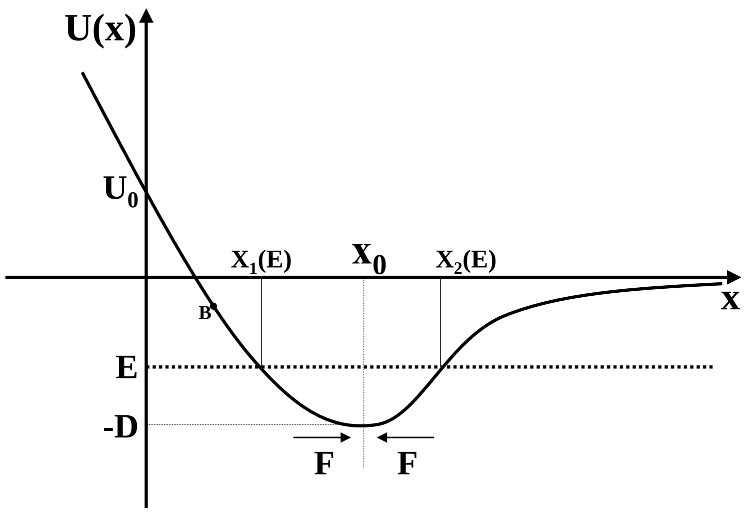
14

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε ένα μονοδιάστατο δυναμικό πεδίο. Η δυναμική του ενέργεια είναι:

$$U(x) = D\left[e^{-2a(x-x_0)} - 2e^{-a(x-x_0)}\right]$$

όπου x_0, D και a είναι θετικές ποσότητες.
(α) Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας και τη θέση που συμβαίνει.
(β) Υπολογίστε τις οριακές τιμές της $U(x)$ για $x \to -\infty$ και $x \to +\infty$, και σχεδιάστε ποιοτικά την $U(x)$.
(γ) Για ποιες τιμές της ολικής ενέργειας E το σωματίδιο θα παραμένει φραγμένο σε μια περιοχή του χώρου; Σχεδιάστε την αντίστοιχη περιοχή σε μια τυπική περίπτωση.
(δ) Για ποιες τιμές της ολικής ενέργειας το σωματίδιο διαφεύγει στο άπειρο; Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα (σε άπειρη απόσταση) από το θεώρημα της διατήρησης της ενέργειας.

(Βαθμοί 12)



Σχήμα 14:

Λύση:

(α)

Στο σημείο της ελάχιστης τιμής της δυναμικής ενέργειας θα πρέπει $dU/dx = 0$. Άρα

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2aD\left[e^{-a(x-x_0)} - e^{-2a(x-x_0)}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad -a(x-x_0) = -2a(x-x_0)$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0$$

Η τιμή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας θα είναι:

$$U(x_0) = -D$$

Στο σημείο αυτό $(x = x_0)$ η δύναμη, F θα είναι:

$$F = -\frac{dU}{dx} = 0$$

συνεπώς το σωματίδιο θα ισορροπεί.

(β)

Οι οριακές τιμές της δυναμικής ενέργειας θα είναι:

$$U(x \to +\infty) \to 0 \tag{32}$$

εφ΄ όσον οι εκθετικές συναρτήσεις δίνουν:

$$e^{-a(x-x_0)} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

και

$$e^{-2a(x-x_0)} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Στην περίπτωση που το $x \to -\infty$ έχουμε:

$$U(x) \cong De^{-2a(x-x_0)} \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Η δυναμική ενέργεια $U(x)$ μπορεί να παρασταθεί ποιοτικά όπως φαίνεται στο σχήμα (14), όπου το U_0 (το σημείο που η δυναμική ενέργεια τέμνει το κάθετο άξονα) είναι:

$$U(0) = D(e^{2ax_0} - 2e^{ax_0}) = De^{ax_0}(e^{ax_0} - 2) > 0$$

(γ)
Παρατηρούμε ότι αν η ενέργεια του σωματιδίου είναι:

$$-D < E < 0$$

το σωματίδιο θα είναι φραγμένο μεταξύ των σημείων $x_1(E)$ και $x_2(E)$. Αυτά τα δύο σημεία προσδιορίζονται από την συνθήκη

$$U(x) = E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E}{D} = \left[e^{-2a(x-x_0)} - 2e^{-a(x-x_0)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 2y - \frac{E}{D} = 0$$

όπου η νέα μεταβλητή y είναι:

$$y = e^{-a(x-x_0)}$$

Οι δυο ρίζες του τριωνύμου θα είναι τα σημεία $x_1(E)$ και $x_2(E)$:

$$x_1(E) = x_0 - \frac{1}{a}\ln\left(1 - \sqrt{1 + \frac{E}{D}}\right)$$

$$x_2(E) = x_0 - \frac{1}{a}\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{E}{D}}\right)$$

Για ένα τυχαίο σημείο B όπως φαίνεται στο Σχήμα (14) θα έχουμε $U > E$ και επομένως η κινητική ενέργεια, K του σωματιδίου θα είναι:

$$E - U < 0$$

$$\Rightarrow \quad K < 0$$

$$\Rightarrow \quad v^2 < 0$$

το οποίον είναι αδύνατον.
(δ)

Στην περίπτωση που η ενέργεια είναι θετική το σωματίδιο μπορεί να διαφύγει και η οριακή ταχύτητα διαφυγής θα βρεθεί με την βοήθεια του θεωρήματος της διατήρησης της ενέργειας:

$$E_\infty = K_\infty + U_\infty = E = \frac{1}{2} m v_\infty^2 + 0$$

όπου η E_∞ είναι η ενέργεια του σωματιδίου στο άπειρο. Επομένως η οριακή ταχύτητα θα είναι:

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$
