Άσκηση 1.

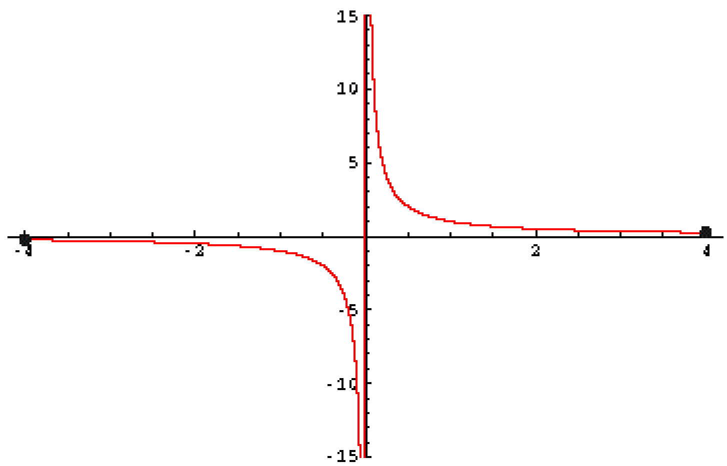
Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων συναρτήσεων σε χαρτί μιλιμετρέ αφού πρώτα φτιάξετε τους πίνακες των τιμών τους.

α) $y=\frac{1}{x}$, β) $y=\frac{1}{x-1}$, γ) $y=\frac{x}{x-1}$, δ) $y=-\frac{1}{(x-1)^2}$, ε) $y=\frac{x^2}{x-1}$

Να προσδιοριστούν γραφικά και με υπολογισμό οι ασύμπτωτες που υπάρχουν.

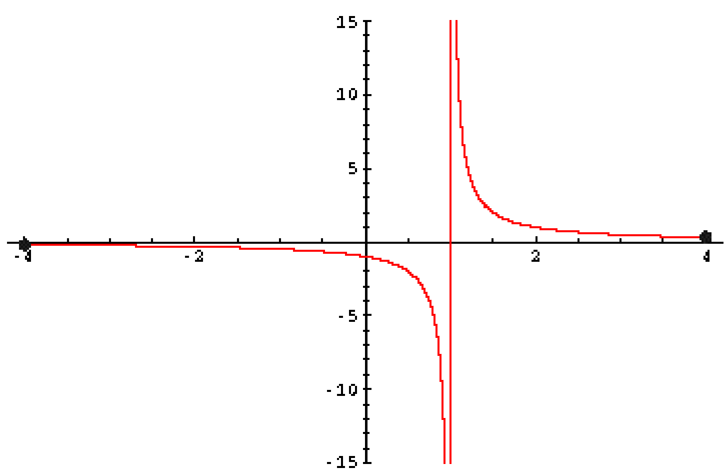
(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ



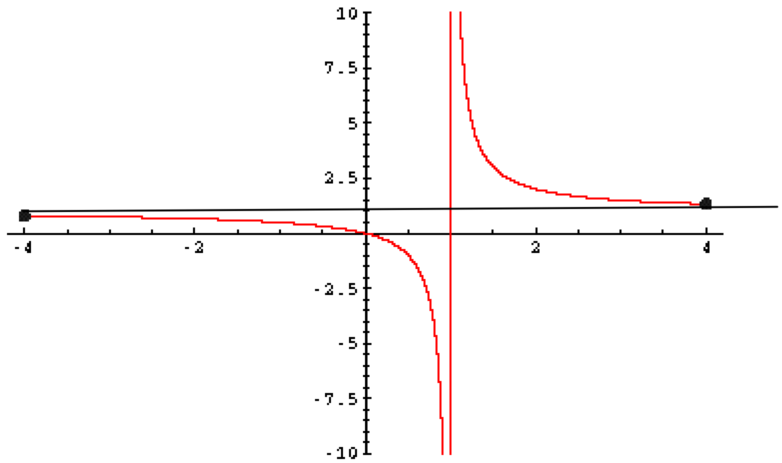
α) Επειδή $y=\frac{1}{x}$, ο παρονομαστής μηδενίζεται στο x=0 , ο άξονας των y είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη. Ακόμα, επειδή $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, ο άξονας των x είναι η οριζόντια ασύμπτωτη.

β). Έχουμε $y=\frac{1}{x-1}\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$. Συνεπώς υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο x=1 (σημείο μηδενισμού του παρονομαστή της συνάρτησης). Επειδή $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$ ο άξονας των x είναι η οριζόντια ασύμπτωτη.

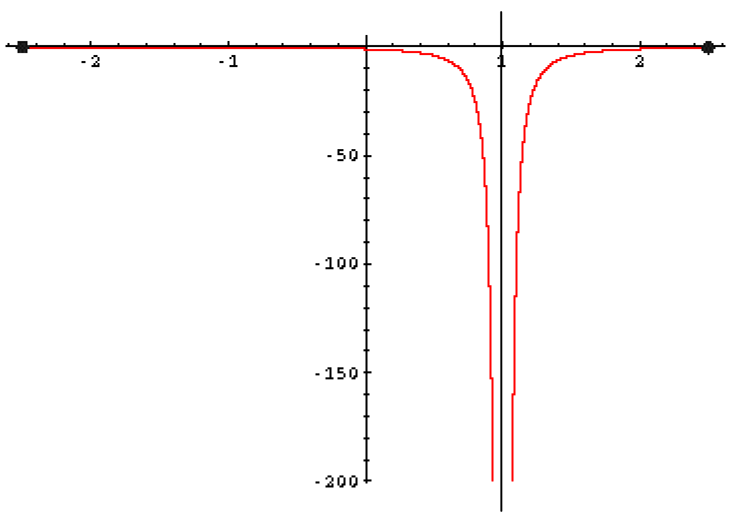


γ) Ομοίως βρίσκουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο x=1 και οριζόντια ασύμπτωτη από το

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1$$ στο σημείο y=1



δ) Ο παρονομαστής μηδενίζεται στο x=1 επομένως εκεί υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Επειδή και $\lim_{x\to\infty} y=0$ ο άξονας των x είναι οριζόντια ασύμπτωτη.



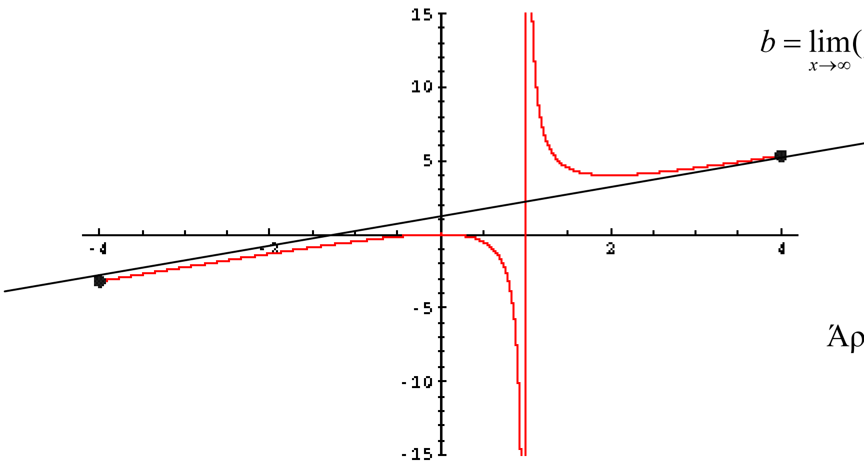
ε) Στο σημείο x=1 όπου μηδενίζεται ο παρανομαστής υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Όταν ο αριθμητής είναι πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του παρονομαστή, υπάρχει και πλάγια ασύμπτωτη της μορφής $y = ax + b$ όπου τα a, b προσδιορίζονται από τα όρια:

$$a = \lim_{x\to\infty} y', \quad b = \lim_{x\to\infty}(y - ax)$$

Εδώ έχουμε $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ και συνεπώς

$$a = \lim_{x\to\infty} y' = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{x^2-2x+1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2-x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = 1$$



Άρα η ασύμπτωτη είναι η $y = x + 1$

<u>Άσκηση 2.</u>

α) Να οριστεί το λ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x - 1 \ , & x < 2 \\ \lambda x^2 \ , & x \geq 2 \end{cases}$$

β) Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση $f(x)$ στο σημείο $x = -3$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{|x+3|} & , x \neq -3 \\ 1 & , x = -3 \end{cases}$$

γ) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^{x+1} + x, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta \sin x + \alpha \cos x + 1, & 0 \leq x \end{cases}$

Για ποιές τιμές των α, β η συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$;

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η *f* είναι συνεχής στο (-∞, 2) και στο [2, ∞) ως πολυωνυμική. Θα πρέπει να είναι και στο x=2, δηλαδή:

$$\lim_{x\to 2^+} \lambda x^2 = \lim_{x\to 2^-}(\lambda x - 1) \Rightarrow 2\lambda - 1 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

β) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{|x+3|} & , \ x\neq -3 \\ 1 & , \ x=-3 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x-3}{x+3} & , \ x<-3 \\ 1 & , \ x=-3 \\ \dfrac{x-3}{x+3} & , \ x>-3 \end{cases}$

Άρα: $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-}\left[-\dfrac{x-3}{x+3}\right] = \lim\limits_{x\to -3^-}\left[\dfrac{3-x}{x+3}\right] = \dfrac{6}{0} = +\infty$

Επίσης: $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+}\left[\dfrac{x-3}{x+3}\right] = \dfrac{-6}{0} = -\infty$

Και $f(-3)=1$ Οπότε: $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) \neq f(-3)=1$

Άρα η *f* είναι ασυνεχής στο σημείο $x=-3$.

γ) Η συνάρτηση *f*(x) είναι συνεχής στα διαστήματα:

$(-\infty, \quad -1), \quad (-1, \quad 0), \quad (0, \quad +\infty)$. Για να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι

συνεχής και στα σημεία –1 και 0.

Ελέγχουμε την συνέχεια στο σημείο $x=-1$.

Πρέπει να ισχύει: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Αλλά $f(-1) = 3\alpha e^{-1+1} + (-1) = 3\alpha e^0 - 1 = 3\alpha - 1$ (1)

Επίσης:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(3\alpha e^{x+1} + x) = 3\alpha - 1$ (2)

και $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}(2x^2 - \alpha x + 3\beta) = 2 + \alpha + 3\beta$ (3)

Από τις (1), (2) και (3) έχουμε: $3\alpha - 1 = 2 + \alpha + 3\beta \Rightarrow 2\alpha = 3 + 3\beta$ (4)

Ελέγχουμε την συνέχεια στο σημείο $x=0$.

Πρέπει να ισχύει: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Αλλά $f(0) = \beta \sin 0 + \alpha \cos 0 + 1 = \alpha + 1$ (5)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\beta \sin x + \alpha \cos x + 1) = \alpha + 1$ (6)

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x^2 - \alpha x + 3\beta) = 3\beta$ (7)

Από τις (5), (6) και (7) έχουμε: $\alpha + 1 = 3\beta$ (8)

Λύνω το σύστημα των (4) και (8) και προκύπτει: $\alpha = 4, \quad \beta = \frac{5}{3}$

Άρα για αυτές και μόνο τις τιμές η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.

Να υπολογιστούν τα κάτωθι όρια:

α) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 8}$

β) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{4x^3 - x^2 + x + 2}$

γ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$, για $x \neq 0$

δ) $\lim_{x\to 0} \frac{(x^4+1)^{\frac{1}{4}} - (x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$, για $x \neq 0$

ε). $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x}$

στ) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$ Εάν βάλουμε το x=2 στον αριθμητή και παρονομαστή τότε καταλήγουμε σε απροσδιοριστία 0/0. Κάνουμε αριθμητή και παρονομαστή γινόμενο παραγόντων:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+4)(x-2)}$$

και εάν $x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$ τότε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+4)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x+4)}=\frac{5}{6}$$

β) Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^3+2x^2+1}{4x^3-x^2+x+2}$$

Για $\boldsymbol{x}\to -\infty$ καταλήγουμε σε απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞.
Οπότε διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με την μεγαλύτερη δύναμη του x.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^3+2x^2+1}{4x^3-x^2+x+2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{3}{4}$$

$$\text{γ)}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+9)-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+9)}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

$$\text{δ)}\lim_{x\to 0}\frac{(x^4+1)^{\frac{1}{4}}-(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(x^4+1)^{\frac{1}{4}}-(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]}{x^2}\frac{\left[(x^4+1)^{\frac{1}{4}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[(x^4+1)^{\frac{1}{4}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-(x^2+1)}{x^2\left[\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{4}}+\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-(x^2+1)}{x^2\left[\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{4}}+\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]}\frac{\sqrt{x^4+1}+(x^2+1)}{\sqrt{x^4+1}+(x^2+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+1-x^4-2x^2-1}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

(για $x\neq 0$).

ε). $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2+3x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+3x+3)}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+3x+3)=3$

(για $x\neq 0$).

στ) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)x}{\left(\frac{a+b}{2}\right)x\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)x}\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)\right]=\frac{b^2-a^2}{2}$

Άσκηση 4.

Α) Να αποδειχθεί ότι: $\sin\theta\sin\phi=\frac{\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)}{2}$

Β) Να αποδειχθεί ότι: $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

Γ) Δίνεται η συνάρτηση: $I(\theta)=I_0\left[\frac{\sin\left([\pi a\sin\theta]/\lambda\right)}{[\pi a\sin\theta]/\lambda}\right]^2$, $0<\theta<\pi$

α) Για ποια τιμή του $\sin\theta$ προκύπτει $I(\theta)=0$ για πρώτη φορά; (η μικρότερη τιμή του $\sin\theta$)

β) Να βρείτε όλες τις τιμές της γωνίας $\theta>0$ για τις οποίες $I(\theta)=0$.

γ) Να επαληθεύσετε ότι $I(\theta)\to I_0$ όταν $[\pi a\sin\theta]/\lambda$ τείνει στο μηδέν.

Σημείωση: Η ανωτέρω συνάρτηση είναι πολύ χρήσιμη στη Φυσική γιατί δίνει την ένταση μονοχρωματικού φωτός μήκους κύματος λ όταν περιθλάται μέσω σχισμής πλάτους α ενώ θ είναι η γωνία διάδοσης του φωτός μετά την διέλευσή του από τη σχισμή, σε σχέση με την αρχική διεύθυνση διάδοσής του.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Α) Έχουμε:

$$\frac{\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)}{2}=\frac{\cos\theta cos\phi+\sin\theta\sin\phi-\cos\theta cos\phi+\sin\theta\sin\phi}{2}=$$

$$=\frac{2\sin\theta\sin\phi}{2}=\sin\theta\sin\phi.$$

Β)Έχουμε:

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})}{1+\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}.$$

Γ)

α) Πρέπει $\sin\left(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right)=0=\sin 0\Rightarrow\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}=2k\pi+0$ και $\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}=(2k+1)\pi-0$. Οπότε:

$$\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}=2k\pi \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}=(2k+1)\pi \quad (2)$$

και επειδή $0<\theta<\pi$, η μικρότερη τιμή προκύπτει για $k=0$ από την σχέση (2): $\sin\theta=\frac{\lambda}{a}$

β) Για $\theta>0$ και $k=0,1,2,3,4...$ η (1) δίνει $\sin\theta=\frac{2\lambda}{a},\frac{4\lambda}{a},\frac{6\lambda}{a},\frac{8\lambda}{a},...$ ενώ η (2) $\sin\theta=\frac{\lambda}{a},\frac{3\lambda}{a},\frac{5\lambda}{a},\frac{7\lambda}{a}....$ δηλ. όλες οι τιμές της θ δίνονται από τη σχέση: $\sin\theta=\frac{\lambda}{a},\frac{2\lambda}{a},\frac{3\lambda}{a},\frac{4\lambda}{a},\frac{5\lambda}{a},\frac{6\lambda}{a}....$

γ) Πράγματι, θέτοντας $\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}=X$ έχουμε: $I(\theta)=I_0\left(\frac{\sin X}{X}\right)^2$.

$$\lim_{x\to 0}I(\theta)=\lim_{x\to 0}\left[I_0\left(\frac{\sin X}{X}\right)^2\right]=I_0\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin X}{X}\right)^2\right]=I_0 1^2=I_0$$

<u>Άσκηση 5.</u>

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης: $y=\sin(x^2)+\sin^2 x$

β) Επίσης της : $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

γ) Άν $y=f(x)$ να υπολογίσετε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ αν

I) $xy^3-3x^2=xy+5$ και II) $e^{xy}+y\ln x=\cos 2x$

δ) Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της: $y=f(x)=(\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}$

ε) Να δείξετε ότι η $y = xe^{-\frac{x}{2}}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης:
$4y''' - 12y'' - 15y' - 4y = 0$.
<u>Υπόδειξη:</u> Υπολογίστε την πρώτη, δεύτερη και τρίτη παράγωγο και αντικαταστήστε στην εξίσωση.

<u>(Μονάδες 15)</u>

ΛΥΣΗ

α)

$$y'(x) = \left[\sin(x^2) + \sin^2 x\right]' = \left(\sin(x^2)\right)' + (\sin^2 x)' =$$
$$= \cos x^2 (x^2)' + 2\sin x(\sin x)' = 2x\cos(x^2) + 2\cos x \sin x$$

β)

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{3}-1}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) \text{ και}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-\frac{4}{3}}(2x + 1)$$

γ) (Ι)

$$\frac{d}{dx}(xy^3) - \frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(5) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y^3\frac{dx}{dx} + x\frac{d}{dx}(y^3) - 3\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{dx}{dx}y + x\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} - 6x = y + x\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (3xy^2 - x)\frac{dy}{dx} = y + 6x - y^3 \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + 6x - y^3}{3xy^2 - x}$$

(ΙΙ)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{e}^{\mathrm{xy}}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{y}\ln \mathrm{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\cos 2\mathrm{x})$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{xy}}(\mathrm{xy}' + \mathrm{y}) + \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} + (\ln \mathrm{x})\mathrm{y}' = -2\sin 2\mathrm{x}$$
$$\mathrm{y}' = -\frac{2\mathrm{x}\sin 2\mathrm{x} + \mathrm{xye}^{\mathrm{xy}} + \mathrm{y}}{\mathrm{x}^2\mathrm{e}^{\mathrm{xy}} + \mathrm{x}\ln \mathrm{x}}$$

δ). $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \left[\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{x}}}\right]'$ Αλλά $\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(x^{-1}\right) = -\frac{1}{x}\ln x$

$$\ln f(x) = \ln y = -\frac{1}{x}\ln x$$

$$[\ln y]' = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]' \Rightarrow \frac{1}{y}y' = \left(-\frac{1}{x}\right)'\ln x + \left(-\frac{1}{x}\right)(\ln x)' \Rightarrow$$

Άρα $\Rightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{1}{x^2}\ln x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2}(\ln x - 1) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\ln x - 1}{x^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

Για τη δεύτερη παράγωγο έχουμε:

$$y'' = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right]' \frac{\ln x - 1}{x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\ln x - 1}{x^2}\right)' \quad \text{ή}$$

$$y'' = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \frac{\ln x - 1}{x^2}\right]\frac{\ln x - 1}{x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{3x - 2x\ln x}{x^4}\right) \quad \text{ή}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left[\left(\frac{\ln x - 1}{x^2}\right)^2 + \frac{3x - 2\ln x}{x^4}\right] \quad \text{ή}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^4}\left[(\ln x - 1)^2 + x(3 - 2\ln x)\right] = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^4}\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 1 + 3x - 2x\ln x\right] \text{ και τελικά:}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^4}\left[(\ln x)^2 - 2(1 + x)\ln x + 3x + 1\right]$$

ε).

$$y' = \left(xe^{-\frac{x}{2}}\right)' = (x)'e^{-\frac{x}{2}} + x\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = e^{-\frac{x}{2}} + x\left(\frac{-x}{2}\right)'e^{\frac{-x}{2}} = e^{\frac{-x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{-x}{2}} = e^{\frac{-x}{2}}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$y'' = \left[e^{\frac{-x}{2}}\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right]' = \left(e^{\frac{-x}{2}}\right)'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + e^{\frac{-x}{2}}\left(1 - \frac{x}{2}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\left(1 - \frac{x}{2}\right) + e^{\frac{-x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{x}{2} - 1 - 1\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{x}{2} - 2\right)$$

$$y''' = \left[\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{x}{2}-2\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{x}{2}-2\right)+\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}e^{\frac{-x}{2}}\left(3-\frac{x}{2}\right)$$

Αντικαθιστούμε και επαληθεύεται.

<u>Άσκηση 6.</u>

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \sin x \sin 3x dx$

β) $\int \frac{2x-3}{x^2-x-2}dx$

γ) $\int \frac{2x^3-8x^2+9x+1}{x^2-4x+4}dx$

δ) $\int e^x \cos x dx$

ε) $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x^3 \cos(x^2)dx$

στ) $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$

ζ) $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

<u>(Μονάδες 15)</u>

ΛΥΣΗ:

α)

$$\int \sin x \sin 3x dx = -\int (\cos x)' \sin 3x dx = -\cos x \sin 3x + \int (\sin 3x)' \cos x dx =$$

$$= -\cos x \sin 3x + 3\int \cos 3x \cos x dx = -\cos x \sin 3x + 3\int \cos 3x (\sin x)' dx =$$

$$= -\cos x \sin 3x + 3\cos 3x \sin x - 3\int \sin x (\cos 3x)' dx =$$

$$= -\cos x \sin 3x + 3\cos 3x \sin x + 9\int \sin x \sin 3x dx$$

Οπότε έχουμε:

$$\int \sin x \sin 3x dx = -\cos x \sin 3x + 3\cos 3x \sin x + 9\int \sin x \sin 3x dx \Rightarrow$$

$$\int \sin x \sin 3x dx - 9\int \sin x \sin 3x dx = -\cos x \sin 3x + 3\cos 3x \sin x \Rightarrow$$

$$-8\int \sin x \sin 3x dx = -\cos x \sin 3x + 3\cos 3x \sin x \Rightarrow$$

$$\int \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{8}\left(\cos x \sin 3x - 3\cos 3x \sin x\right) + c$$

$2^η$ Λύση

Στην άσκηση 4α έχουμε δείξει την ταυτότητα:

$2\sin\vartheta\sin\phi=\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)$

$$\int\sin x\sin 3x dx=\frac{1}{2}\int\cos(x-3x)\,dx-\frac{1}{2}\int\cos(x+3x)\,dx=$$

Για θ=x και φ=3x έχουμε: $=\frac{1}{2}\int\cos(-2x)\,dx-\frac{1}{2}\int\cos(4x)\,dx=$

$$=-\frac{1}{4}\sin(-2x)-\frac{1}{8}\sin(4x)=\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{8}\sin(4x)$$

Παρατήρηση: Οι δύο λύσεις είναι ταυτόσημες αφού από τη μία μπορεί να προκύψει η άλλη. Και οι δύο μπορούν να απλοποιηθούν με τους τύπους της διπλάσιας γωνίας οπότε καταλήγουν στην απλούστερη μορφή λύσης: $\sin^3 x\cos x$.

β) $\int\frac{2x-3}{x^2-x-2}dx$ Ο παρονομαστής είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού και έχει πραγματικές ρίζες τους αριθμούς –1 και 2. Επομένως:

$\int\frac{2x-3}{x^2-x-2}dx=\int\frac{2x-3}{(x+1)(x-2)}dx$ Αναλύουμε σε κλάσματα την παράσταση:

$$\frac{2x-3}{(x+1)(x-2)}=\frac{\mathrm{A}}{x+1}+\frac{\mathrm{B}}{x-2}\Rightarrow 2x-3=\mathrm{A}(x-2)+\mathrm{B}(x+1)\Rightarrow$$

$$2x-3=\mathrm{A}x-2\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{B}\Rightarrow 2x-3=(\mathrm{A}+\mathrm{B})x+\mathrm{B}-2\mathrm{A}\Rightarrow$$

$$2x=(\mathrm{A}+\mathrm{B})x$$

$$-3=\mathrm{B}-2\mathrm{A}$$

Από την λύση του συστήματος προκύπτει: $\mathrm{A}=\frac{5}{3}$ και $\mathrm{B}=\frac{1}{3}$

Οπότε:

$$\int\frac{2x-3}{x^2-x-2}dx=\int\frac{2x-3}{(x+1)(x-2)}dx=\int\frac{5/3}{x+1}dx+\int\frac{1/3}{x-2}dx=$$

$$=\frac{5}{3}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}dx=\frac{5}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+c$$

γ) $\frac{2x^3-8x^2+9x+1}{x^2-4x+4}=2x+\frac{x+1}{x^2-4x+4}$

Οπότε $x^2-4x+4=(x-2)^2$

$\frac{x+1}{x^2-4x+4}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}$ απ’ όπου A=1, B=3

Άρα: $\dfrac{x+1}{x^2-4x+4}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{(x-2)^2}$

$$\int \frac{2x^3-8x^2+9x+1}{x^2-4x+4}dx=\int 2xdx+\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{3}{(x-2)}dx=$$

$$\frac{2x^2}{2}+\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+C'= x^2+\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+C'$$

δ) $\int e^x\cos xdx$

$$\int e^x\cos xdx=\int e^x d(\sin x)=e^x\sin x-\int sinxd(e^x)=e^x\sin x-\int e^x\sin xdx$$

Το ολοκλήρωμα:

$$\int e^x\sin xdx=\int e^x d(-\cos x)=-e^x\cos x-\int(-\cos x)d(e^x)=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx$$

Οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int e^x\cos xdx=e^x\sin x-\left[-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx\right]=e^x(\sin x+\cos x)-\int e^x\cos xdx$$

Οπότε:

$$2\int e^x\cos xdx=e^x(\sin x+\cos x)+C'$$

$$\int e^x\cos xdx=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C'$$

ε) $f(x)=x^2$ $\quad f'(x)=2xdx$

$\mathrm{g(x)}=\frac{1}{2}\sin(\mathrm{x}^2)$ $\quad \mathrm{g}'(\mathrm{x})=\mathrm{x}\cos(\mathrm{x}^2)\mathrm{dx}$, και εφαρμόζοντας τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης: $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x^3\cos(x^2)dx=\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x^2 x\cos(x^2)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\sin(x^2)\right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}-\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}-\left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\approx 0.1312.$$

στ) $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$

Θέτω: $\sin x = t \Rightarrow dt = \cos x dx$. Οπότε:

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}t^{3/2} + c = \frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + c$$

ζ)

$$\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx = \int \frac{1-x^2}{(1-x^2)^{3/2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}}dx =$$

$$= \int (1-x^2)^{1-(3/2)}dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}} = \int (1-x^2)^{-1/2}dx - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-3/2}d(1-x^2) =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-3/2}d(1-x^2) = \sin^{-1}x + c_1 - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-3/2}d(1-x^2).$$

Θέτω $1-x^2 = t$ Οπότε:

$$\sin^{-1}x + c_1 - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-3/2}d(1-x^2) = \sin^{-1}x + c_1 - \frac{1}{2}\int t^{-3/2}dt = \sin^{-1}x + c_1 - \frac{1}{2}\frac{t^{-3/2+1}}{\frac{-3}{2}+1} =$$

$$\sin^{-1}x + c_1 - \frac{1}{2}\frac{t^{-3/2+1}}{\frac{-3}{2}+1} + c_2 = \sin^{-1}x + c_1 - \frac{1}{2}\frac{t^{-1/2}}{-1/2} + c_2 = \sin^{-1}x + c_1 + t^{-1/2} + c_2 =$$

$$= \sin^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

Άσκηση 7.

α) Εάν $f(t)=\sin 2t\hat{i}+\cos 2t\hat{j}+\sqrt{t}\hat{k}$, να βρείτε την $f'(t)$ και την $f''(t)$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση : $f(t) = A\sin\omega t\hat{i} + B\cos\omega t\hat{j}$, ικανοποιεί την εξίσωση: $f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$

γ) Βρείτε τη διανυσματική συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$f'(t)=\hat{i}+t^3\hat{j}+(\frac{1}{1+t^2})\hat{k}$ και $f(0)=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α)

$$f'(x) = 2\cos 2t\hat{i} - 2\sin 2t\hat{j} + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\hat{k}$$

$$f''(x) = -4\sin 2t\hat{i} - 4\cos 2t\hat{j} - \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}\hat{k}$$

β)

$$f'(t)=\omega A\cos\omega t\hat{i}-\omega B\sin\omega t\hat{j}$$

$$f''(t)=-\omega^2 A\sin\omega t\hat{i}-\omega^2 B\cos\omega t\hat{j}$$

οπότε : $f''(t)+\omega^2 f(t)=\left[-\omega^2 A\sin\omega t\hat{i}-\omega^2 B\cos\omega t\hat{j}\right]+\omega^2\left[A\sin\omega t\hat{i}+B\cos\omega t\hat{j}\right]=0$

γ) Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$f(t)=\int f'(t)dt\Rightarrow f(t)=\int[\hat{i}+t^3\hat{j}+(\frac{1}{1+t^2})\hat{k}]dt\Rightarrow$$

$$f(t)=(t+c_1)\hat{i}+(\frac{t^4}{4}+c_2)\hat{j}+(\tan^{-1}t+c_3)\hat{k}$$

Για t=0 έχουμε:

$f(0)=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ Άρα: c_1= 2, c_2= -1, c_3= 3 και

$$f(t)=(t+2)\hat{i}+(\frac{t^4}{4}1)\hat{j}+(\tan^1 t+3)\hat{k}$$

<u>Άσκηση 8</u>.

Να μελετηθεί πλήρως η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

<u>(Μονάδες 5)</u>

ΛΥΣΗ

Πρέπει $x-3\neq 0\Rightarrow x\neq -3$. Από την

$f(x)=0$ προκύπτει: $\dfrac{x^2-5}{x-3}=0\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}.$

Η πρώτη παράγωγος είναι:

$f'(x)=\left(\dfrac{x^2-5}{x-3}\right)'=\dfrac{2x(x-3)-(x^2-5)}{(x-3)^2}=\dfrac{2x^2-6x-x^2+5}{(x-3)^2}=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$. Συνεπώς από

την $f'(x)=0$ έχουμε:

$\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=0\Rightarrow(x-5)(x-1)=0\Rightarrow x=5 \quad \eta' \; x=1$. Ομοίως:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)'=\frac{(2x-6)(x-3)^2-2(x-3)(x^2-6x+5)}{(x-3)^4}=$$

$=\dfrac{2x^2-6x-6x+18-2x^2+12x-10}{(x-3)^3}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{8}{(x-3)^3}$. Άρα $f''(x)\neq 0$

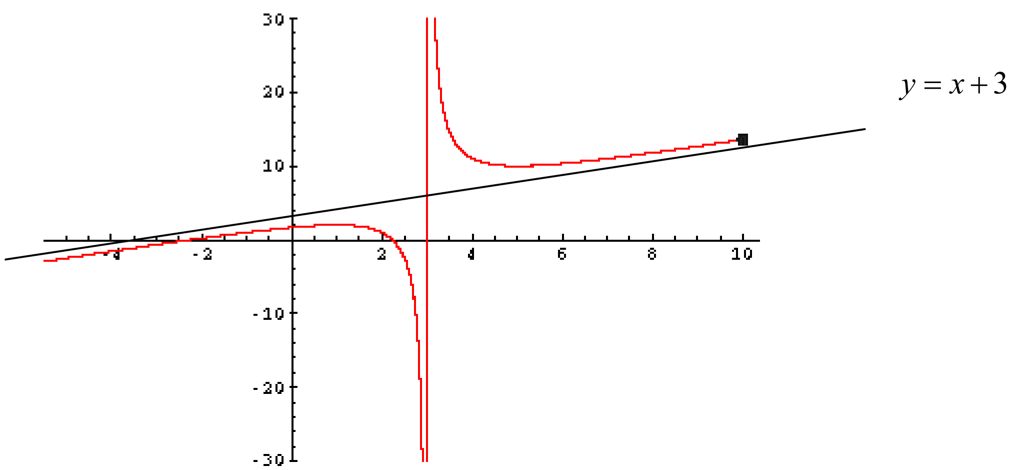
Επειδή ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή, εκτός από την κατακόρυφη ασύμπτωτη στο *x*=3 θα έχουμε και πλάγια ασύμπτωτη της μορφής:

$y = ax + b$. Προσδιορίζουμε το *α*: $a = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-6x+9} = 1$. Άρα *α*=1. Ομοίως,

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5}{x-3}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5-x^2+3x}{x-3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{x-3}\right) = 3.$$

Συνεπώς *b*=3 και η ασύμπτωτη είναι : $y = x + 3$. Για *χ*=0 , *y*=3 ενώ για *y*=0 *x*= -3. Δηλαδή η πλάγια ασύμπτωτη τέμνει των άξονα των x στο σημείο (-3,0) και τον άξονα των y στο (0,3). Συνεπώς έχουμε τον ακόλουθο Πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση:

x	-	$-\sqrt{5}$		0		1		$\sqrt{5}$		3		5	
f	-	0	+	5/3	+	2	+	0	-		+	10	+
f′	+		+		+	0	-		-		-	0	+
f″	-		-		-		-		-		+		+



<u>Άσκηση 9.</u>

1.) Να ευρεθεί το εμβαδόν των χωρίων που περικλείονται:

α) Από την $f(x) = 4x^2 + 2$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.

β) Από τις $f(x) = 2 - x^2$ και $g(x) = x^2$.

γ) Από την ευθεία $y = x + 2$ και την καμπύλη $y = x^2$.

δ) Από την $f(x)=x$ και $g(x)=\frac{x^3}{4}$ στο διάστημα $[-1,2]$.

2) Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να προσδιοριστούν τα α,β ώστε $\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{3}$ και $\int_1^2 f(x)dx=\frac{31}{3}$.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από τον άξονα των x, την καμπύλη f(x) και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

Σε κάθε περίπτωση να κάνετε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

1.) Υπολογίζουμε τα εμβαδά των χωρίων:

α) $E=\int_0^2 (4x^2+2)dx=[\frac{4x^3}{3}+2x]_0^2=\frac{44}{3}$ τετρ. μονάδες.

β) Το σύστημα $y=2-x^2$ και $y=x^2$ έχει λύσεις x_1 = -1 και x_2= 1. Άρα

$E=\int_{-1}^1 (2-x^2-x^2)dx=[2x-2\frac{x^3}{3}]_{-1}^1=\frac{8}{3}$ τετρ. μονάδες.

γ) Το σύστημα y=x+2 και $y=x^2$ έχει λύση x=2 και x=-1. Οπότε:

$E=\int_{-1}^2 (x+2\text{-}x^2)dx=[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}]_{-1}^2=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$ τετρ. μονάδες.

δ) Το σύστημα $y=x$ και $y=\frac{x^3}{4}$ έχει λύση x=0 και $x=\pm 2$. Οπότε:

$E=\int_0^2 (x-\frac{x^3}{4})dx+\int_{-1}^0 (\frac{x^3}{4}-x)dx=[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}]_0^2+[\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{2}]_{-1}^0=\frac{23}{16}$ τετρ. μονάδες.

2.)

α) Υπολογίζω το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^1 (\alpha x^2+\beta)dx=[\alpha\frac{x^3}{3}+\beta x]_0^1=\frac{\alpha}{3}+\beta \qquad (1)$$

Ομοίως υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα: $\int_1^2 (\alpha x^2+\beta)dx=[\alpha\frac{x^3}{3}+\beta x]_1^2=\frac{7\alpha}{3}+\beta$ (2)

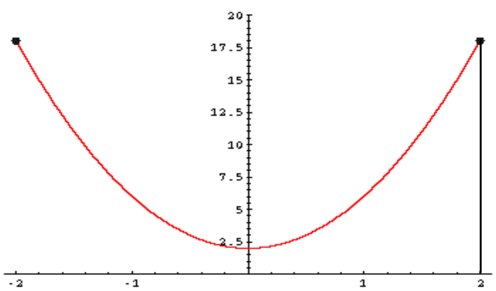
Οπότε: $\left.\begin{array}{l}\frac{\alpha}{3}+\beta=\frac{7}{3}\\ \frac{7\alpha}{3}+\beta=\frac{31}{3}\end{array}\right\}$ και λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε: $\alpha=4$ και $\beta=1$.

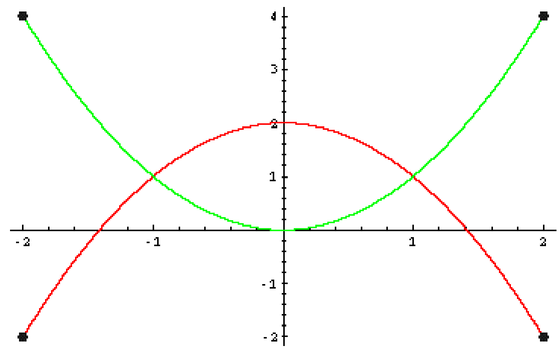
Επομένως η συνάρτηση είναι: $f(x)=4x^2+1$

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (4x^2+1)dx=[\frac{4x^3}{3}+x]_0^2=\frac{38}{3}$ τετρ. μονάδες.

<u>Γραφικές παραστάσεις Άσκησης 9</u>

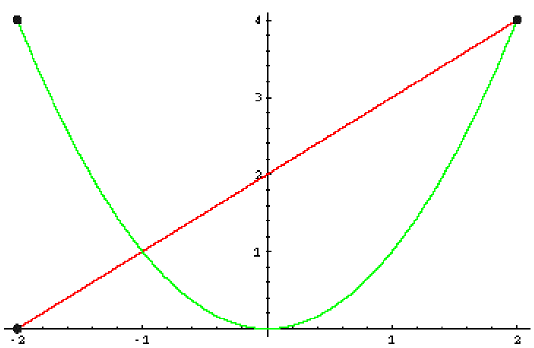
1)



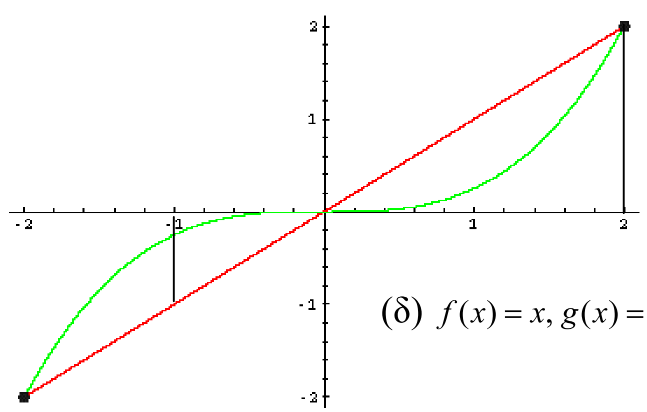


(β) $f(x)=2-x^2$
$g(x)=x^2$

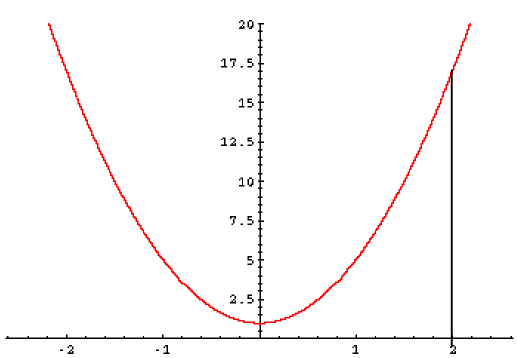
(α) $f(x)=4x^2+2$



γ) $y=x+2$, $y=x^2$



(δ) $f(x)=x,\ g(x)=\frac{x^3}{4}$



2)

(β) $f(x)=4x^2+1$

Άσκηση 10

A) Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που έχει κέντρο το σημείο K(2,4) και εφάπτεται της ευθείας 3x+4y-12=0.

Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του σημείου επαφής.

B) Δίδεται η έλλειψη: $9x^2+16y^2=576$. Να βρεθούν τα μήκη του μεγάλου και μικρού ημιάξονα, η εκκεντρότης, οι συντεταγμένες των εστιών.

Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μια κορυφή το σημείο A(6,0) και της οποίας μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση: $4x-3y=0$. Βρείτε επίσης την εστιακή απόσταση γ και την εκκεντρότητα της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

Λύση

A) Η εξίσωση κύκλου δίδεται από την σχέση:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ όπου (x_0,y_0) είναι οι συντεταγμένες του κέντρου K και R η ακτίνα του. Επομένως έχουμε:

$(x-2)^2+(y-4)^2=R^2$

Αρκεί να βρούμε την ακτίνα R του κύκλου που είναι η απόσταση του κέντρου K από την εφαπτομένη ευθεία. Οπότε:

$$R=\frac{Ax_0+By_0+\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2}}\Rightarrow R=\frac{3\cdot 2+4\cdot 4-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

Οπότε:

$(x-2)^2+(y-4)^2=4$

Για τις συντεταγμένες του σημείου επαφής πρέπει οι δύο εξισώσεις του κύκλου και της ευθείας βα συναληθεύουν. Άρα λύνω το σύστημα:

$(x-2)^2+(y-4)^2=4$

3x+4y-12=0

Οι λύσεις προκύπτουν **x=4/5** και **y=12/5**.

B) Η εξίσωση της έλλειψης γράφεται:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$$

Άρα: α=8 και β=6

Οπότε: $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=2\sqrt{7}$

Επομένως οι συντεταγμένες των εστιών είναι: ($2\sqrt{7}$,0) και (-$2\sqrt{7}$,0).

Η εκκεντρότης δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Γ) Η εξίσωση της υπερβολής είναι της μορφής:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Επειδή το σημείο Α(6,0) είναι κορυφή της υπερβολής έχουμε:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{6^2}{\alpha^2} - \frac{0^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 36 \Rightarrow \alpha = 6$$

Επειδή η ασύμπτωτη έχει εξίσωση: $4x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$ έχουμε:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta = \frac{4}{3}\alpha \Rightarrow \beta = \frac{4 \cdot 6}{3} \Rightarrow \beta = 8$$

Οπότε η εξίσωση της υπερβολής είναι :

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Η εστιακή απόσταση γ βρίσκεται από την σχέση:

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} \Rightarrow \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} = 10$$

Οπότε η εκκεντρότητα είναι: $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.