$1^η$ Εργασία 2004-2005
(Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής 16/11/2004)

Άσκηση 1 (7 μονάδες)

(Α) Ποιες είναι οι προϋποθέσεις ώστε να ισχύουν οι παρακάτω διανυσματικές σχέσεις:

(α) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ με $|\vec{A}|+|\vec{B}|=|\vec{C}|$

(β) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{A}-\vec{B}$

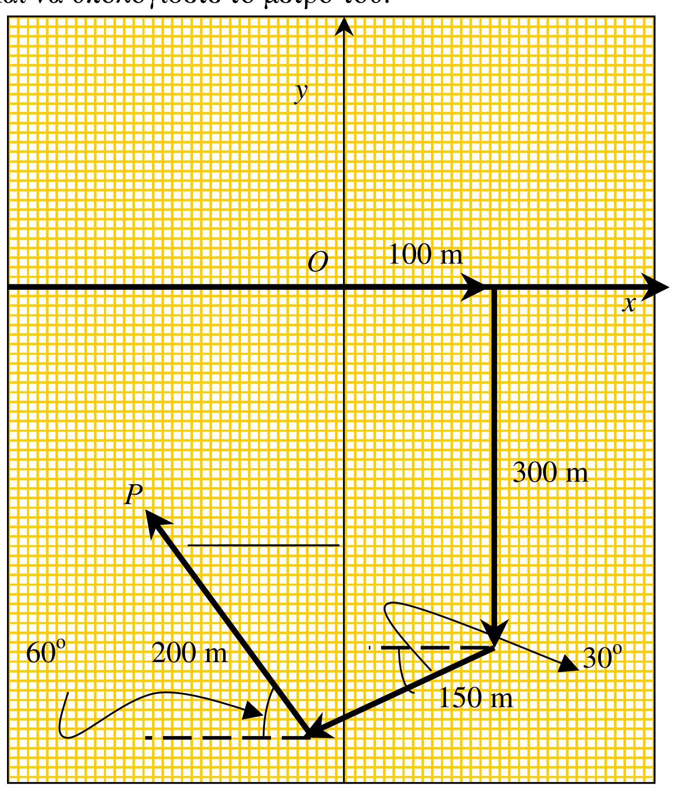
(γ) $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\perp\left(\vec{A}-\vec{B}\right)$

(δ) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ και $|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2=|\vec{C}|^2$

(Β) Δίδονται τα διανύσματα $\vec{a}=3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{c}=6\hat{k}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της βάσης του παραλληλεπίπεδου που σχηματίζουν τα τρία αυτά διανύσματα. Θεωρείστε ως βάση του παραλληλεπίπεδου το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Επίσης να υπολογιστεί ο όγκος του παραλληλεπίπεδου.

Άσκηση 2 (8 μονάδες)

Το παρακάτω σχήμα δείχνει την πορεία που ακολουθεί ένας άνθρωπος κατά τον περίπατό του. Ξεκινά από το σημείο O και καταλήγει στο σημείο P. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων που αντιστοιχούν σε κάθε τμήμα του περιπάτου. Επίσης, να εκφράσετε την συνολική μετατόπισή του με ένα διάνυσμα δίνοντας τις συντεταγμένες του και να υπολογίσετε το μέτρο του.



Άσκηση 3 (10 μονάδες)

(Α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$. Να δείξετε ότι η παράσταση $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$ είναι πάντοτε ίση προς μηδέν.

(Β) Υπολογίστε το μέτρο, τη διεύθυνση και την φορά του διανύσματος $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$ αν τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ σχηματίζουν γωνία θ μεταξύ τους. Θεωρείστε ότι τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ βρίσκονται στο επίπεδο *xy* και ότι το διάνυσμα $\vec{B}$ είναι συγγραμμικό με τον άξονα *x*.

Άσκηση 4 (10 μονάδες)

Εάν ισχύουν οι ισότητες

$$\vec{A}\,(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\vec{C} \qquad (1)$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B}) \qquad (2)$$

Αποδείξτε ότι ισχύει

i) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

ii) $(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\vec{C})(\vec{B}\vec{D}) - (\vec{A}\vec{D})(\vec{B}\vec{C})$

iii) $(\vec{A}\times\vec{B})\left[(\vec{B}\times\vec{C})\times(\vec{C}\times\vec{A})\right] = \left[\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C})\right]^2$

iv) Μπορεί η ισότητα (1) να γραφεί χωρίς παρενθέσεις;

Άσκηση 5 (15 μονάδες)

Δίνονται τα σημεία A, B και C στον τρισδιάστατο χώρο με συντεταγμένες A(2,-1,3), B(1,1,1), C(0,0,5). Τα σημεία αυτά αποτελούν τις κορυφές του τριγώνου ABC.

(α) Να σχεδιαστεί το τρίγωνο σε διάγραμμα *xyz*.

(β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{AC}$ και το μήκος κάθε πλευράς του τριγώνου.

(γ) να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.

(δ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου με χρήση του διανυσματικού λογισμού.

Άσκηση 6 (12 μονάδες)

Α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}$. Να δειχθεί ότι $A^3=0$.

Β) Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$.

Να δειχθεί ότι $A^2-5A+7I_2=0$ και $B^3-6B^2+11B-6I_3=0$

Γ) Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός τετραγωνικού πίνακα Α λέγεται ίχνος και συμβολίζεται με tr(A) (πχ αν $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ τότε $tr\left(A\right)=3+2=5$).

Δείξτε ότι αν Α και Β είναι τετραγωνικοί πίνακες και $\lambda\in R$:

- $tr(\lambda A)=\lambda\ tr(A)$
- $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
- $tr(AB)=tr(BA)$
- $tr\left(ABC\right)=tr(BCA)=tr(CAB)$

Δ) Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \delta\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & \gamma & \varepsilon\end{bmatrix}$ με α,β,γ,δ,ε $\in$ R. Για ποιες τιμές των α,β,γ,δ και ε ο πίνακας Α έχει αντίστροφο και ποιος είναι;

Άσκηση 7 (8 μονάδες)

Να λυθεί και να διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α,β $\in$ R, το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix}\alpha x+y+z=4\\ x+\beta y+z=3\\ x+2\beta y+z=4\end{matrix}\right\}$$

Άσκηση 8 (8 μονάδες)

Δίνεται το τριώνυμο: $(\lambda^2+\lambda-2)\,x^2+2(\lambda-1)\,x+4$

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ ώστε να έχει ρίζες:

α) ετερόσημες με απόλυτα μεγαλύτερη την αρνητική και

β) αντίστροφες

Άσκηση 9 (10 μονάδες)

Α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες το κλάσμα

$\dfrac{\lambda x^2+3x-4}{\lambda+3x-4x^2}$ μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές όταν $x\in R$

Β) Να βρείτε το λ ώστε οι ρίζες ρ_1και $\rho_2\in R$ της $x^2+x+\lambda=0$ να ικανοποιούν τη σχέση $\rho_1^3+2\rho_1\rho_2(\rho_1+1)+2\rho_2=1$

Άσκηση 10 (12 μονάδες)

Α) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=\sqrt{1-x}$, g(x)=sin2x με πεδία ορισμού $(-\infty,1]$, και [0,π] αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει η συνάρτηση $f \circ g$ και αν ναι, βρείτε το πεδίο ορισμού της τον τύπο της και το σύνολο εικόνων της.

Β) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to[-\frac{1}{2},1)$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι «1-1» και «επί». β) Να προσδιορίσετε την αντίστροφή της.

Γ) Δίνεται η συνάρτηση f(x) $=x^2-10x+15$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

β) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση είναι 1-1 και επί. Να βρεθούν οι κατάλληλοι περιορισμοί της που είναι αντιστρέψιμοι (πεδίο ορισμού, τιμών και τύπος που δίνει τις τιμές της συνάρτησης)