

1^η Εργασία

ΠΑΡΑΔΟΣΗ:

1. Γράψτε και σχεδιάστε ποιοτικά στο ίδιο διάγραμμα καθένα από τα επόμενα διανύσματα στη μορφή $x\vec{i} + y\vec{j}$:

(α) Το διάνυσμα που συνδέει την αρχή του συστήματος συντεταγμένων με το σημείο P(2,-3).

(β) Το διάνυσμα που συνδέει τα σημεία P₁(2,3) και P₂(4,2) με πέρασ το P₂.

(γ) το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $3\vec{i} + 4\vec{j}$

(δ) το διάνυσμα που έχει μέτρο 6 και κατεύθυνση 60° (εντός του πρώτου τεταρτημορίου στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων).

(Μονάδες: 4)

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (6,-4)$ και $\vec{\beta} = (-2,2)$. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες: 6)

3. Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(α). Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει:

$$\lambda^2\vec{\alpha}^2 + 2\lambda\mu(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + \mu^2\vec{\beta}^2 \geq 0.$$

Πότε ισχύει το "=";

(β) Να αποδείξετε ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{u} = |\vec{\beta}| \vec{\alpha} + |\vec{\alpha}| \vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες: 8)

4. (α) Υπολογίστε το μήκος των διαγωνίων και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ και $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

(β) Αν $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ και $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ δείξτε ότι

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$
 Σχεδιάστε ποιοτικά το διάνυσμα $\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

(Μονάδες: 8)

5. Δίνονται τα σημεία P(3,1,-2) και Q(-1,3,4).

(α) Προσδιορίστε το διάνυσμα PQ και υπολογίστε το μέτρο του.

(β) Αν O είναι η αρχή των αξόνων, προσδιορίστε τα μέσα των πλευρών του τριγώνου OPQ.

(γ) Προσδιορίστε τα διανύσματα των διαμέσων του τριγώνου

(δ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

(Μονάδες: 6)

6. Δείξτε κατά πόσο οι παρακάτω σχέσεις είναι αληθείς ή ψευδείς για 2 επι 2 πίνακες.

(α). $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

(β). $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(γ). $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

(δ). $\det(A^T) = \det(A)$

(Μονάδες: 7)

7. Λύστε το σύστημα

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = -4$$

με χρήση του κανόνα του Cramer.

(Μονάδες: 6)

8. Βρείτε όλες τις τιμές των a,b,c, για τις οποίες ο A είναι συμμετρικός:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a - 2b + 2c & 2a + b + c \\ 3 & 5 & a + c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

(Μονάδες: 6)

9. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα A, όπου

$$A = \begin{bmatrix} x & a_1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ x & x & a_2 & 0 & \dots & \dots \\ x & x & x & a_3 & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & a_{n-1} \\ x & x & x & x & \dots & x \end{bmatrix}$$

(Υπόδειξη: Δοκιμάστε αρχικά έναν πίνακα 3x3 και γενικεύστε την διαδικασία)

(Μονάδες: 8)

10. (α). Πόσα στοιχεία είναι δυνατόν να ορισθούν ανεξάρτητα σε ένα συμμετρικό πίνακα τάξης n για τον οποίο ισχύει $\{a_{ij} = a_{ji}\}$;

(β) Πόσα στοιχεία είναι δυνατόν να ορισθούν ανεξάρτητα σε ένα αντισυμμετρικό πίνακα τάξης n για τον οποίο ισχύει $\{a_{ij} = -a_{ji}\}$;

(Υπόδειξη: Βρείτε το αριθμό των μη τετριμμένων σχέσεων μεταξύ των στοιχείων των πινάκων και αφαιρέστε τον από τον συνολικό αριθμό των στοιχείων των πινάκων)

(Μονάδες: 5)

11. (1.) Πιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ και

(β) $g(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

(2.) Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2\lambda x + 3}$... με ... $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι

τιμές του λ για τις οποίες το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το \mathbb{R} .

(Μονάδες: 6)

12. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $-x^2 + (2\mu - 1)x + 3\mu^2 + 5 = 0$ έχει δύο άνισες ρίζες, για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

(Μονάδες: 8)

13. Αν $f(x) = (2 + \alpha^2)x + a + 2\beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να προσδιορίσετε τα α, β ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $(f \circ f)(x) = 9x + 19$

(Μονάδες: 8)

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

(β) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

(Μονάδες: 6)

15. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} είναι 1-1, τότε η εξίσωση

$$f(x^3 - x^2) = f(-x):$$

I) έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0.

II) είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .

III) έχει τουλάχιστον δύο ρίζες άνισες στο \mathbb{R} .

Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε.

(Μονάδες: 8)