2η Εργασια

1. **(4 βαθμοί):** Το παρακάτω πρόβλημα σχετίζεται με κυματικά φαινόμενα. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$y_1(t) = C\ \sin(2\pi\nu_1 t)$$

$$y_2(t) = C\ \sin(2\pi\nu_2 t)$$

   (a) Να αποδείξετε ότι

$$\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} = 2\cos(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2})\sin(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2})$$

   (b) Να αποδείξετε ότι

$$(y_1(t) + y_2(t))^2 = C^2\,(1+\cos 2\pi(\nu_1-\nu_2)t)(1-\cos 2\pi(\nu_1+\nu_2)t) \tag{1}$$

   Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τις χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις στην σελίδα 208 του βιβλίου σας και τη σχέση

$$\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} = 2\cos(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2})\sin(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2})$$

   (c) Για ποιές τιμές του χρόνου t μηδενίζεται ο πρώτος όρος της (1);

2. **(4 βαθμοί):** Να εκφραστεί η συνάρτηση

$$f(x) = \sin(3x)\cos(3x)$$

   ως ανάπτυγμα δυνάμεων των $\sin x$ και $\cos x$.

3. **(4 βαθμοί):** Δύο αριθμοί α και β ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{\alpha}{\beta} = 0.000001$$

   (a) Να βρεθεί η διαφορά των λογαρίθμων τους (με βάση 10) ($\log\alpha - \log\beta$) χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

   (b) Σε ένα πείραμα Χημείας έγιναν οι παρακάτω μετρήσεις:

Ογκος $(\mathrm{cm})^3$	Συγκέντρωση C (g/l)	$-\log C$
0.0	1.0	
5.0	1.0×10^{-2}	
10.0	1.0×10^{-3}	
15.0	1.0×10^{-4}	
20.0	1.0×10^{-6}	
25.0	1.0×10^{-7}	

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση ογκου (αξονας x) – συγκέντρωσης C (αξονας y).

ii. Να συμπληρώσετε τον πίνακα και κατόπιν να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση όγκου–$\log C$.

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, να σχολιάσετε το πότε, κατά τη γνώμη σας, είναι αναγκαία η χρήση λογαριθμικής απεικόνισης δεδομένων στις Φυσικές Επιστήμες.
Παρατηρηση: Σημειωνεται οτι $\beta - \alpha \approx \beta$. Μπορειτε να αποδειξετε την σχεση αυτη;

4. **(5 βαθμοί):** Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} = 2 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις στην σελίδα 208 του βιβλίου σας, καθώς και τη σχέση $\lim_{a \to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$.

5. **(3 βαθμοί):** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} \qquad g(x) = (1 + 2x)^{\frac{3}{x}}\,.$$

Να διερευνήσετε με την αριθμομηχανή σας τις τιμές που παίρνουν οι παραπάνω συναρτήσεις για τιμές του x κοντά στο 0 φτιάχνοντας ένα μικρό πίνακα και να προβλέψετε, αν υπάρχουν, τις τιμές των ορίων

$$\lim_{x \to 0} f(x) \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x)\,.$$

Στη συνέχεια, να υπολογίστε τα παραπάνω όρια χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του βιβλίου σας.
Υπόδειξη: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

6. **(6 βαθμοί):** Να υπολογιστούν οι παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 e^{2x^2+3x+2} \\ g(x) &= \sin(2x+3)\cos(5x-1) \\ h(x) &= \ln\ln x \end{aligned}$$

7. **(3 βαθμοί):** Στα πλαίσια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας του Einstein, η μετατόπιση x ενός σώματος μάζας m_0 πάνω στο οποίο δρα μία σταθερή δύναμη $\vec{F}$ δίδεται από τη σχέση

$$x(t) = \frac{m_0 c^2}{F}\left[\sqrt{1+(\frac{F}{m_0 c})^2 t^2} - 1\right]$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός.

(a) Να δείξετε ότι η ταχύτητα $v(t)$ του σώματος δίδεται από τη σχέση

$$v(t) = c\frac{\frac{F}{m_0 c}t}{\sqrt{1+(\frac{F}{m_0 c})^2 t^2}}$$

(b) Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος στο όριο $t \to \infty$.

Παρατήρηση: Στο όριο $t \to \infty$ η δύναμη F έχει επιδράσει στο σώμα για ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Εξαρτάται σε αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα που βρήκατε στο ερώτημα (b) από την μάζα m_0 του σώματος; από τη δύναμη F; Ποιά είναι κατά τη γνώμη σας η φυσική σημασία του αποτελέσματος αυτού; **(Bonus: 1 βαθμός)**

8. **(13 βαθμοί):** Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται στις Φυσικές Επιστήμες για να περιγράψουν περιοδικά φαινόμενα, φαινόμενα δηλαδή τα οποία επαναλαμβάνονται μετά την πάροδο ενός χρονικού διαστήματος το οποίο καλείται περίοδος. Παράδειγμα περιοδικού φαινομένου αποτελεί η διαταραχή η οποία δημιουργείται όταν π.χ. διαταράσεται με μία ακίδα η επιφάνεια του νερού μιας λίμνης 50 φορές το δευτερόλεπτο. Εστω ότι η τριγωνομετρική συνάρτηση

$$x(t) = 5\sin(100\pi t) \qquad (2)$$

δίνει την απόσταση (σε cm) ενός σημείου A της διαταραγμένης επιφάνειας του νερού από την ελεύθερη επιφάνεια της λίμνης την χρονική στιγμή t sec.

(a) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $x(t)$ από $t = 0.00\text{sec}$ έως $t = 0.10\text{sec}$ σε κατάλληλο μιλλιμετρέ χαρτί.

(b) **Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση που κατασκευάσατε**, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

   i. Ποιά είναι η μέγιστη απομάκρυνση του σημείου A από την ελεύθερη επιφάνεια της λίμνης;

   ii. Για ποιές χρονικές στιγμές στο διάστημα $[0.00\text{sec}, 0.10\text{sec}]$ εμφανίζει η συνάρτηση $x(t)$ ακρότατα σημεία;

   iii. Ποιά είναι η περίοδος T; (Περίοδος είναι ο χρόνος ο οποίος απαιτήται για την ολοκλήρωση ενός κύκλου του περιοδικού φαινομένου).

(c) Να απαντήσετε στις ερωτήσεις του προηγουμένου υποερωτήματος χρησιμοποιώντας τη μαθηματική έκφραση (2) και στοιχεία του αλγεβρικού και διαφορικού λογισμού.

(d) i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

   από $t = 0.00\text{sec}$ έως $t = 0.10\text{sec}$ σε κατάλληλο μιλλιμετρέ χαρτί. (Παρατήρηση: Η συνάρτηση $v(t)$ εκφράζει την ταχύτητα του σημείου την χρονική στιγμή t sec.

   ii. Για ποιές χρονικές στιγμές στο διάστημα $[0.00\text{sec}, 0.10\text{sec}]$ η συνάρτηση $x(t)$ μηδενίζεται;

   iii. Ποιες τιμές παίρνει η συνάρτηση $v(t)$ αυτές τις χρονικές στιγμές;

   iv. Ποιά είναι η φυσική σημασία των απαντήσεων σας στα υποερωτήματα ii και iii; **(Bonus: 1 βαθμός)**

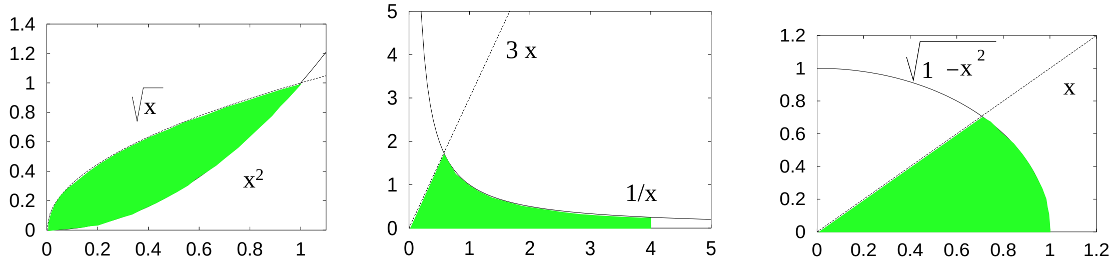
9. **(5 βαθμοί):** Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα με τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\int x^5 \sin x \, dx \qquad \int x^5 \mathrm{e}^x \, dx$$

10. **(6 βαθμοί):** Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\int \frac{\sin(2\mathrm{x})\, dx}{\cos^2 x - 7\cos x + 12} \qquad \int \frac{dx}{x \ln x} \qquad \int \frac{dx}{\mathrm{e}^{-x} + 2 + 2\mathrm{e}^x} \qquad \int \frac{(x^2 + 4x + 6)dx}{x^3 + x^2 - 2x}$$

11. **(10 βαθμοί):** Να υπολογίσετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων περιοχών από τα ολοκληρώματα των αντιστοίχων συναρτήσεων που τις ορίζουν:



Υπόδειξη: Διαβάστε την παράγραφο 7.1.2 (σελ. 359) του βιβλίου σας. Κατόπιν να χωρίσετε τις γραμμοσκιασμένες περιοχές των παραπάνω σχημάτων έτσι ώστε το ζητούμενο εμβαδόν να προκύπτει σαν άθροισμα ή διαφορά επιμέρους εμβαδών, τα οποία μπορούν να υπολογιστούν μέσω ορισμένων ολοκληρωμάτων των εικονιζομένων συναρτήσεων.

12. **(11 βαθμοί):** Εστω ένα σωμάτιο του οποίου το διάνυσμα θέσης δίδεται από την διανυσματική συνάρτηση του χρόνου t

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}\,.$$

(a) Να υπολογιστούν οι διανυσματικές συναρτήσεις $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{L}(t) = \vec{r}(t)\times\vec{v}(t)$, $\vec{\tau}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t)\times\vec{v}(t))$.

(b) Να επιβεβαιώσετε, υπολογίζοντας κάθε όρο της παρακάτω εξίσωσης και συγκρίνοντας με το παραπάνω αποτέλεσμα, ότι ισχύει

$$\vec{\tau}(t) = (\frac{d}{dt}\vec{r}(t))\times\vec{v}(t) + \vec{r}(t)\times(\frac{d}{dt}\vec{v}(t))$$

(c) Ζωγραφίστε την τροχιά του σωματιδίου για $0 < t < 2\pi$. Τοποθετήστε το σωμάτιο στη στην τροχιά αυτη για $t = 2\pi$ και ζωγραφίστε τα διανύσματα $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{L}(t)$.

(d) Υπολογίστε το μήκος S της τροχιάς που ζωγραφίσατε από τον τύπο

$$S = \int_{t=0}^{t=2\pi} |\frac{d\vec{r}(t)}{dt}|dt\,.$$

13. **(12 βαθμοί):** Εστω ένα σωματίδιο που κινήται με την επίδραση του βάρους του σε ένα υγρό. Η δύναμη $\vec{f}$ που το υγρό ασκεί επάνω του

είναι αντίθετη με το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v}$ κάθε χρονική στιγμή. Το σωματίδιο εκτινάσσεται με οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}(0) = V\,\vec{i}$. Μετά από μεγάλο χρόνο, το σωματίδιο κινήται με σταθερή κατακόρυφη ταχύτητα $\vec{v}(\infty) = \lim_{t\to\infty} \vec{v}(t) = w\,\vec{j}$. Αν m είναι η μάζα του σωματιδίου και g η επιτάγχυνση της βαρύτητας, τότε μπορεί να δειχθεί ότι

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{wV}{g}(1 - \mathrm{e}^{-gt/w}) \\
y(t) &= wt - \frac{w^2}{g}(1 - \mathrm{e}^{-gt/w}) \\
\vec{f}(t) &= -(\frac{mg}{w})\,\vec{v}(t)\,,
\end{aligned}
$$

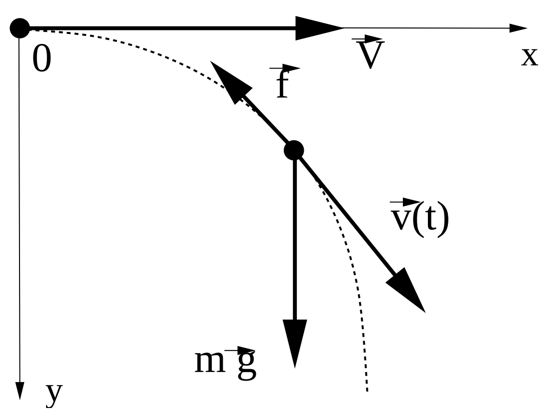
όπου $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$, $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j}$.

(a) Υπολογίστε την διανυσματική συνάρτηση της ταχύτητας $\vec{v}(t)$.

(b) Δείξτε ότι πράγματι $\vec{v}(0) = V\,\vec{i}$, $\lim_{t\to\infty} \vec{v}(t) = w\,\vec{j}$

(c) Υπολογίστε την διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(t) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$, τη συνολική δύναμη που δρα πάνω στο σωμάτιο.

(d) Δείξτε ότι $\vec{F}(0) = -mg\frac{V}{w}\,\vec{i} + mg\,\vec{j} =$ βάρος του σώματος και αρχική αντίσταση ενώ $\lim_{t\to\infty} \vec{F}(t) = \vec{0}$.



(e) Κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$.

14. **(4 βαθμοί):** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει εστία την αρχή των αξόνων και διευθετούσα την γραμμή $2x + y - 10 = 0$. Να σχεδιάσετε την παραβολή αυτή σε κατάλληλο μιλλιμετρέ χαρτί.

15. **(4 βαθμοί):** Δίδεται η εξίσωση

$$\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{64} = 1$$

η οποία παριστάνει μια υπερβολή με κέντρο το $(0,0)$.

(a) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών και των κορυφών και να υπολογίσετε την εκκεντρότητα της υπερβολής.

(b) Να σχεδιάσετε την υπερβολή αυτή σε κατάλληλο μιλλιμετρέ χαρτί.

16. **(6 βαθμοί):**

(a) Αποδείξτε ότι αν η ευθεία

$$\varepsilon : ax + by + c = 0$$

είναι εφαπτόμενη του κύκλου με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r, τότε

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(b) Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : 4x - 2y + 3 = 0$$

$$\varepsilon_2 : x + 2y + 4 = 0$$

που είναι εφαπτόμενες του κύκλου του οποίου το κέντρο βρίσκεται πάνω στην

$$\varepsilon_3 : x + y - \frac{1}{2} = 0$$

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου και τα σημεία επαφής με τις ε_1 και ε_2.