ΕΡΓΑΣΙΑ 3η

(Παράδοση 13 – 3 – 2005)

<u>Άσκηση 1 (Μονάδες 10)</u>

Σώμα κινείται κατά μήκος του άξονα των x ακολουθώντας το νόμο $x=(16t - 6t^2)$ m.

α) Βρείτε τη θέση του σώματος σε χρόνο t =1 s.

β) Πότε περνάει από την αρχή των αξόνων;

γ) Υπολογίστε τη μέση ταχύτητά του το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 2s$.

δ) Ποια είναι η στιγμιαία ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t= 0 s.

ε) Πότε μηδενίζεται η ταχύτητά του;

στ) Πότε η επιτάχυνσή του είναι μηδέν;

ζ) Σχεδιάστε ποιοτικά τις συναρτήσεις x(t), υ(t) και α(t).

η) Πότε το σώμα επιταχύνεται και πότε επιβραδύνεται.

Λύση:

α) Για t=1s x=10m

β) Στην αρχή των αξόνων x=0. Αρα $16t_o-6t_o^2=0$. Η εξίσωση έχει 2 ρίζες t=0 και t=8/3s.

γ) Η μέση ταχύτητα δίνεται από τη σχέση $υ= Δx / Δt = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$

Εδώ έχουμε $t_1=0$, $x_1=0m$, $t_2= 2s$, $x_2=8m$. υ= 8/2 = 4 m/s

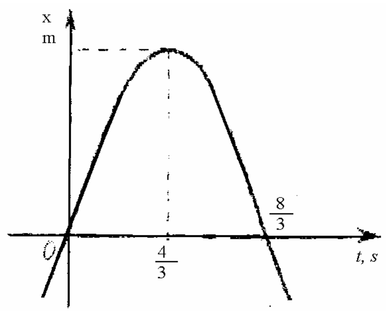
δ) Από τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας υ=dx/dt βρίσκουμε υ=16-12t m/s για t=0 $υ_0=16$ m/s

ε) Το σώμα σταματά όταν υ=0, 16-12t=0 => t=4/3 s.

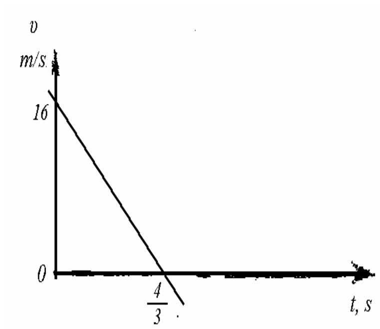
στ) Η επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση a=du/dt => a= -12 m/s^2.

Άρα η επιτάχυνση είναι σταθερή και δεν μηδενίζεται ποτέ.

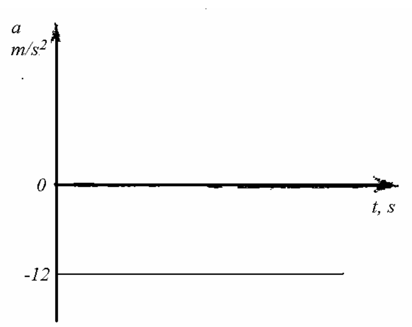
ζ)



Η καμπύλη x(t)



Η καμπύλη υ(t)



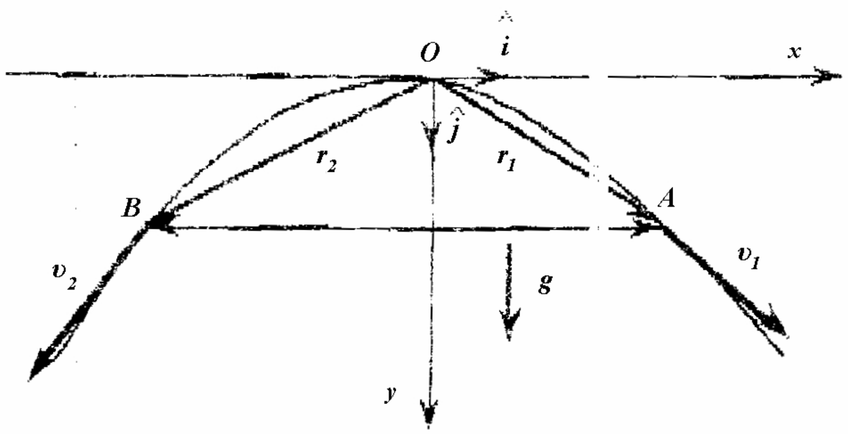
Η καμπύλη a(t)

η) Η επιτάχυνση είναι σταθερή και αρνητική, δηλαδή το σώμα επιβραδύνεται συνεχώς ως την χρονική στιγμή t = 4/3. Από την στιγμή αυτή και μετά επιταχύνεται αλλά με αντίθετη φορά, δηλ. το σώμα γύρισε προς τα πίσω και κινείται προς την αρχική του θέση.

Άσκηση 2 (Μονάδες 10)

Δύο σωματίδια κινούνται στο πεδίο βαρύτητας. Τη χρονική στιγμή t=0s τα σωματίδια βρίσκονταν στο ίδιο σημείο και είχαν ταχύτητες υ_1 και υ_2 οριζόντιες και με αντίθετες φορές. Να βρεθεί η απόσταση ανάμεσα στα σωματίδια τη χρονική στιγμή που τα ανύσματα των ταχυτήτων τους θα είναι κάθετα.

Λύση:



Έστω ότι τη χρονική στιγμή t=0 τα σωματίδια βρίσκονται στο σημείο O το οποίο θεωρούμε αρχή των αξόνων. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t που οι ταχύτητες των σωματιδίων είναι κάθετες μεταξύ τους αυτά βρίσκονται στις θέσεις A και B. Τότε οι ταχύτητές τους θα είναι

$$\vec{v}_1 = \upsilon_1 \hat{i} + gt\,\hat{j}$$
$$\vec{v}_2 = \upsilon_2 \hat{i} + gt\,\hat{j}$$

Ξέρουμε όμως ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη καθετότητας δύο ανυσμάτων είναι $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$. *Δηλαδή* $v_1 v_2 = \upsilon_1 \upsilon_2 + g^2 t^2 = 0$

Άρα τα v_1 και v_2 είναι κάθετα τη χρονική στιγμή $t = \frac{\sqrt{\upsilon_1 \upsilon_2}}{g}$ *(1)*

Η απόσταση AB ορίζεται από το άνυσμα BA=r για το οποίο ισχύει $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \upsilon_1 t\,\hat{i} + \frac{1}{2} g t^2\,\hat{j} \\ \\ r_2 = -\upsilon_2 t\,\hat{i} + \frac{1}{2} g t^2\,\hat{j} \end{array}\right\}$$

Και από την εξίσωση τροχιάς βρίσκουμε

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\upsilon_1 + \upsilon_2)t\,\hat{i}$$

Δηλαδή το r θα είναι πάντα παράλληλο με τον άξονα Ox.
Αντικαθιστώντας τώρα το t από τη σχέση (1) βρίσκουμε

$$\vec{r} = (\upsilon_1 + \upsilon_2)\frac{\sqrt{\upsilon_1\upsilon_2}}{g}\hat{i}$$

<u>Άσκηση 3 (Μονάδες 10)</u>

Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης: F_1 = αt î, όπου α=σταθερά, και t≥0 και υποθέτουμε ότι ξεκινάει με μηδενική αρχική ταχύτητα από την αρχή των αξόνων. Τη στιγμή t = t_A προστίθεται μια δύναμη F_2 έτσι ώστε η συνισταμένη δύναμη να έχει σταθερή διεύθυνση πάνω στο μοναδιαίο διάνυσμα y και μέτρο το μισό της F_1 την χρονική στιγμή t_A. Προσδιορίστε την F_2, και βρείτε την θέση του σωματιδίου r(t) για t>t_A.

Λύση:

Η ολική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι :

$$\vec{F}_{o\lambda} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \alpha t\,\hat{i} + \vec{F}_2$$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{o\lambda}\right|\hat{j} = \alpha t\,\hat{i} + \vec{F}_2$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = \left|\vec{F}_{o\lambda}\right|\hat{j} - \alpha t\,\hat{i}$$

Το μέτρο της $F_{o\lambda}$ είναι

$$F_{o\lambda} = \frac{F_1}{2} = \frac{at_A}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{o\lambda} = \frac{at_A}{2}\hat{j} - \alpha t\,\hat{i}$$

Από το δεύτερο νόμο του Newton έχουμε

$$\vec{F}_{o\lambda} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{at_A}{2}\hat{j}$$

$$\Rightarrow m\frac{d\vec{\upsilon}_x}{dt} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad m\frac{d\vec{\upsilon}_y}{dt} = \frac{at_A}{2}$$

Άρα ολοκληρώνοντας στο χρονικό διάστημα από t_A μέχρι t βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης του σώματος είναι:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_A) + \frac{at_A}{2m}\frac{(t-t_A)}{2})\vec{j} + \vec{\upsilon}(t)(t-t_A) \qquad (1)$$

Από την κίνηση του σώματος πριν από την χρονική στιγμή t_A μπορούμε να βρούμε τα $r(t_A)$ και $\upsilon(t_A)$

Έχουμε : $$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = at\,\hat{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon} = \frac{at^2}{2m}\hat{i}$$

και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη θέση:

$$\vec{r}(t) = \frac{at^3}{6m}\hat{i}$$

άρα για την χρονική στιγμή $t = t_A$ έχουμε:

$$\vec{r}(t_A) = \frac{a t_A^3}{6m}\hat{i} \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}(t_A) = \frac{a t_A^2}{2m}\hat{i}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{a t_A^3}{6m} + \frac{a t_A^2 (t - t_A)}{2m}\right)\vec{i} + \frac{a t_A}{2m}\frac{(t - t_A)^2}{2}\vec{j}$$

Άσκηση 4Α (Μονάδες 5)

Σωματίδιο αρχίζει να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Όταν διανύσει απόσταση L αρχίζει να κινείται με επιβράδυνση α μέχρι να σταματήσει. Πόση πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου ώστε ο ολικός χρόνος κίνησης να είναι ελάχιστος.

Λύση:

Για την κίνηση στο διάστημα L ισχύει

$L = \upsilon t_1 \Rightarrow t_1 = L/\upsilon$

Για το διάστημα που επιβραδύνεται

$t_2 = \upsilon/\alpha$

Αρα ο ολικός χρόνος $t_o = t_1 + t_2 = (L/\upsilon) + (\upsilon/\alpha) = t(\upsilon)$

Για να είναι ο χρόνος ελάχιστος

$$\frac{dt_o}{d\upsilon} = 0 \Rightarrow -\frac{L}{\upsilon^2} + \frac{1}{\alpha} = 0 \Rightarrow \upsilon^2 = L\alpha \Rightarrow \upsilon = \sqrt{L\alpha}$$

Άσκηση 4Β (Μονάδες 5)

Σωματίδιο περιστρέφεται γύρω από ακίνητο άξονα έτσι ώστε για τη γωνιακή ταχύτητά του να ισχύει $\omega = \omega_0 - \kappa\varphi$ όπου φ η γωνία που έχει διαγράψει, ω_0 και κ γνωστές σταθερές. Για t=0 έχουμε φ=0. Να υπολογισθούν η γωνία περιστροφής και η γωνιακή ταχύτητα σαν συναρτήσεις του χρόνου.

Λύση:

Εχουμε $\omega = \omega_0 - \kappa\varphi = d\varphi/dt$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - \kappa\phi \Rightarrow \int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\omega_0 - \kappa\phi} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{\kappa}\ln(\omega_0 - \kappa\phi)\Big|_0^{\phi} = t$$

$$\Rightarrow \ln\frac{\omega_0 - \kappa\phi}{\omega_0} = -\kappa t \Rightarrow \omega_0 - \kappa\phi = \omega_0 e^{-\kappa t} \Rightarrow \phi = \frac{\omega_0}{\kappa}(1 - e^{-\kappa t})$$

Για $\omega = \dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{\omega_0}{\kappa}(-e^{-\kappa t})(-\kappa) \Rightarrow \omega = \omega_0 e^{-\kappa t}$

Άσκηση 5 (Μονάδες 10)

Από ακίνητο σύννεφο πέφτουν 2 σταγόνες μάζας m με διαφορα χρόνου τ. Πώς θα μεταβάλλεται η μεταξύ τους απόσταση σαν συνάρτηση του χρόνου αν α) ο, τριβές είναι αμελητέες και β) η δύναμη της τριβής είναι F=-kυ όπυ υ η ταχύτητα της σταγόνας, και k γνωστή σταθερά.

Λύση:

α) Στην περίπτωση αυτή έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Επομένως σε χρόνο t από την πτώση της πρώτης σταγόνας θα έχουμε

$S_1= \frac{1}{2}gt^2$ και $S_2= \frac{1}{2} g(t-\tau)^2$

Οπότε $\Delta S= S_1 - S_2 = \frac{1}{2} g\,(2t\tau-\tau^2)$

β) Για κάθε σταγόνα ισχύει

m dυ/dt = mg –kυ

Ολοκληρώνοντας για την πρώτη σταγόνα

$$\int_0^{\upsilon_1} \frac{d\upsilon}{mg-k\upsilon} = \frac{1}{m}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{k}\ln\frac{mg-k\upsilon_1}{mg} = \frac{t}{m}$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 = \frac{mg}{k}(1-e^{-kt/m}) = \frac{dS_1}{dt}$$

και από εδώ

$$S_1 = \frac{mg}{k}\left[t - \frac{m}{k}(1-e^{-kt/m})\right]$$

Εντελώς ανάλογα

$$S_2 = \frac{mg}{k}\left[t-\tau - \frac{m}{k}(1-e^{-k(t-\tau)/m})\right]$$

και τελικά

$$\Delta S = \frac{mg}{k}\left[\tau - \frac{m}{k}e^{-kt/m}(e^{k\tau/m}-1)\right]$$

Άσκηση 6 (Μονάδες 10)

Ένα πυροβόλο στην ακτή βάλλει εναντίον πλοίου που έρχεται κατ' ευθείαν επάνω του με ταχύτητα $\upsilon_{\pi\lambda}$ = 40 km/h. Το βλήμα πετυχαίνει το πλοίο. Την στιγμή της βολής η απόσταση του πλοίου είναι L = 1500 m. Η ταχύτητα κάννης του βλήματος είναι $\upsilon_{\beta\lambda}$ = 700 m/s. Αγνοούμε την αντίσταση του αέρος, (α) Ποια είναι η γωνία βολής, θ του πυροβόλου (να βρεθεί η σχέση); (β) Πόσο είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ βολής και πρόσκρουσης (να βρεθεί η σχέση);

Λύση:

(α) Η ταχύτητα του πλοίου είναι $\upsilon_{\pi\lambda}$ = 40 km/h = 11.11 m/s. Η κίνηση του βλήματος περιγράφεται από την σχέση:

$$\vec{r}_{\beta\lambda} = \upsilon_{\beta\lambda} \cos\theta t\, \hat{i} + \left[\upsilon_{\beta\lambda} \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \right] \hat{j}$$

Η κίνηση του πλοίου περιγράφεται από την σχέση:

$$\vec{r}_{\pi\lambda} = (L - \upsilon_{\pi\lambda}\, t)\, \hat{i}$$

όταν το βλήμα κτυπά το πλοίο η y συντεταγμένη μηδενίζεται. Άρα:

$$\upsilon_{\beta\lambda} \sin\theta\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0 \qquad (1)$$

Επίσης η x συντεταγμένη του πλοίου και του βλήματος ταυτίζονται:

$$\upsilon_{\beta\lambda} \cos\theta\, t = L - \upsilon_{\pi\lambda}\, t$$

$$\Rightarrow t = L/(\upsilon_{\beta\lambda} \cos\theta + \upsilon_{\pi\lambda}) \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) βρίσκουμε:

$$700 \sin\theta = 15000 \,/\, (1400 \cos\theta + 22{,}22)$$

(β) Ο ολικός χρόνος της βολής είναι :

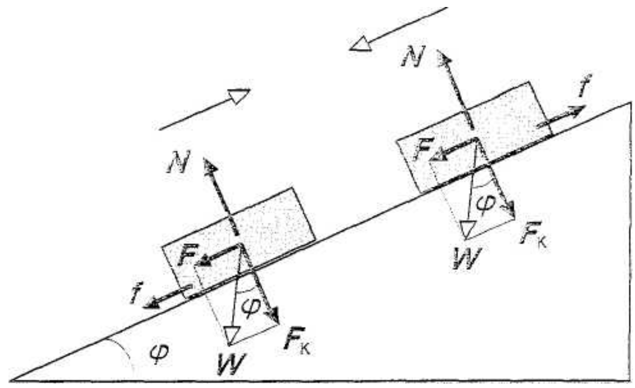
$$t = 1500 / (700 \cos\theta + 11{,}11)$$

Άσκηση 7 (Μονάδες 10)

(α) Ένα σώμα ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα προς τα κάτω , πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ . Εάν μ_s και μ_κ είναι οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής αντίστοιχα, να υπολογιστεί η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου.

(β) Το ίδιο σώμα βάλλεται προς τα πάνω στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα υ_o. Πόσο διάστημα θα διατρέξει; Είναι δυνατή πάλι η κάθοδός του κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου: (γενικά ισχύει $\mu_s > \mu_\kappa$)

Λύση:



Η κινούσα δύναμη είναι η συνιστώσα F του βάρους η παράλληλη προς την επιφάνεια του επιπέδου. Η ισοταχής κάθοδος συνεπάγεται την ύπαρξη τριβής ολίσθησης f αντίθετης της F. Συνεπώς είναι

$f = F = W \sin\varphi$

Αλλά $f = \mu_\kappa N = \mu_\kappa F_\kappa = \mu_\kappa W \cos\varphi$

Οπότε ο συντελεστής τριβής ολίσθησης προκύπτει ίσος με $\mu_\kappa = \tan\varphi$

Κατά την άνοδο η τριβή ολίσθησης έχει αλλάξει φορά, διατηρεί όμως την τιμή της. Συνεπώς η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με επιτάχυνση (

$a = (F+f)/m = 2mg \sin\varphi /m = 2g \sin\varphi$

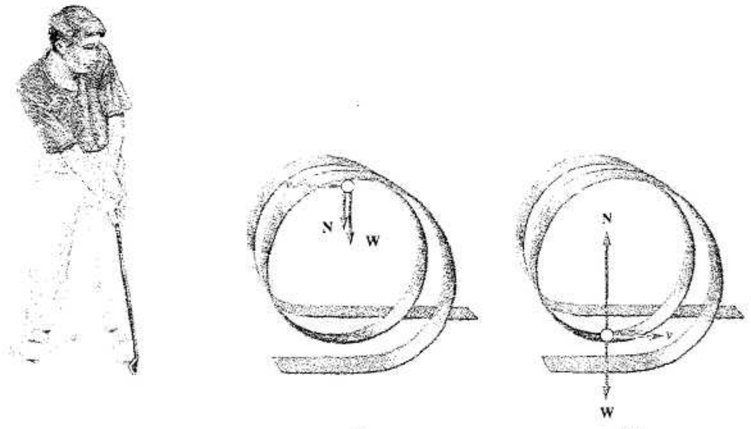
Το σώμα ανέρχεται μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του, οπότε έχει διατρέξει διάστημα

$S = \upsilon_o^2/2a = \upsilon_o^2/ 4g \sin\varphi$

Μετά την ακινητοποίηση του σώματος αναπτύσσεται στατική τριβή. Αν δεχθούμε ότι γενικώς ο συντελεστής στατικής τριβής μs είναι μεγαλύτερος του συντελεστή τριβής ολίσθησης μ_κ, *τότε η συνιστώσα F του βάρους δεν μπορεί να κινήσει εκ νέου το σώμα προς τα κάτω. Αν το κεκλιμένο επίπεδο είχε μεταβλητή γωνία κλίσης, αύξηση της γωνίας φ θα μπορούσε να προκαλέσει κάθοδο του σώματος.*

Άσκηση 8A (Μονάδες 6)

Ο παίκτης του golf αρχίζει το παιχνίδι του κτυπώντας το μπαλάκι μάζας 0.046 kg το οποίο πρέπει να περάσει από την διπλή κυκλική κατακόρυφη τροχιά ακτίνας 0.6 m όπως φαίνεται στο σχήμα. Αγνοώντας τις δυνάμεις τριβής να καθοριστεί α) η δύναμη που ασκεί η επιφάνεια της τροχιάς στη μπάλα στο ανώτατο σημείο της πρώτης κυκλικής τροχιάς όπου η μπάλα κινείται με 3.00 m/s (Σχήμα (a)). β) Ποια είναι η ταχύτητα που πρέπει να έχει η μπάλα στο ανώτατο σημείο της δεύτερης κυκλικής τροχιάς έτσι ώστε να είναι απλώς σε επαφή. γ) Βρείτε τη δύναμη που ασκεί η επιφάνεια της τροχιάς στη μπάλα στο κατώτατο σημείο της πρώτης τροχιάς όπου η ταχύτητα της μπάλας είναι 5.50 m/s (Σχήμα (b))



Λύση:

α) *Στην περίπτωση α το βάρος W και η δύναμη που ασκεί τροχιά στη μπάλα έχουν διεύθυνση προς τα κάτω.*

$\Sigma F = ma$

$-W-N=ma$

$a=-\upsilon^2/r$, *κεντρομόλος επιτάχυνση*

$N=m\,\upsilon^2/r - W = 0.239\ N$

β) *Στην περίπτωση αυτή («απλώς σε επαφή») η N=0 οπότε*

$0=m\,\upsilon^2/r - mg$

$\upsilon=(rg)^{1/2} = 2.42\ m/s$

γ) *Όπως φαίνεται στο σχήμα b,*

$+N - W = ma = m\,(+\upsilon^2/r)$

……

$N=2.77\ N$

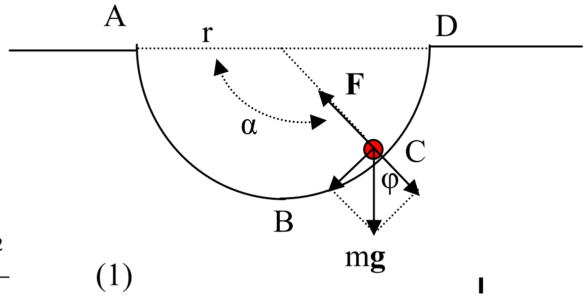
Άσκηση 8Β (Μονάδες 4)

Μία μικρή μπάλα μάζας m, αρχικά στο A, ολισθαίνει στην λεία εσωτερική επιφάνεια μίας ημισφαιρικής επιφάνειας ABD. Όταν η μπάλα βρίσκεται στο σημείο C, δείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα και η δύναμη που ασκείται από την επιφάνεια είναι

$\omega = \sqrt{2g\sin\alpha / r}$ και $F = 3mg\sin\alpha$

Λύση:

Στο σώμα ασκείται το βάρος mg και η αντίδραση από την επιφάνεια F. Αναλύουμε τις δυνάμεις σε εφαπτομενική και ακτινική συνιστώσα. Γράφουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτονα για την ακτινική διεύθυνση

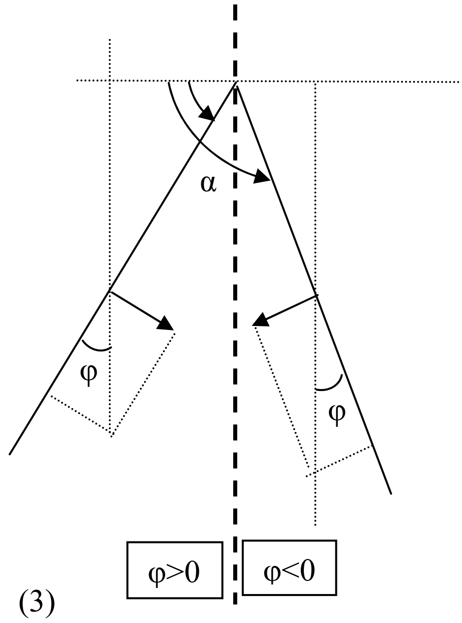


$$F - mg\cos\varphi = \frac{m\upsilon^2}{r} \Rightarrow F - mg\sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{r} \qquad (1)$$

και για την εφαπτομενική διεύθυνση

$$F_T = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow mg\sin\varphi = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow g\cos a = \frac{d\upsilon}{dt} \qquad (2)$$

Οι γωνίες φ και α συνδέονται με την σχέση α=π/2-φ. Η α μεταβάλλεται από 0 έως π ενώ η φ από π/2 έως -π/2. Η γωνιακή ταχύτητα ορίζεται ω=da/dt. Ακόμα ισχύει ότι υ=ωr,. Με τα παραπάνω η (2) γράφεται



$$\frac{d\upsilon}{dt} = g\cos a \Rightarrow \frac{d(\omega r)}{da}\cdot\frac{da}{dt} = g\cos a \Rightarrow r\frac{d\omega}{da}\cdot\omega = g\cos a \qquad (3)$$

Από την (3) μπορούμε να υπολογίσουμε την ω συναρτήσει της γωνίας α αν χωρίσουμε τις μεταβλητές (ω αριστερά, α δεξιά) και ολοκληρώσουμε

$$\frac{r}{g}\omega d\omega = \cos a da \Rightarrow \frac{r}{g}\int_0^{\omega}\omega d\omega = \int_0^{a}\cos a da \Rightarrow \frac{r}{g}\frac{1}{2}\omega^2\Big|_0^{\omega} = \sin a\Big|_0^{a}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2g}\omega^2 = \sin a \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{r}\sin a} \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την (4) η γραμμική ταχύτητα δίνεται από

$$\upsilon = \omega r \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gr\sin a} \qquad (5)$$

Τέλος χρησιμοποιώντας την (5), η (1) γίνεται

$$F = mg\sin\alpha + \frac{m(2gr\sin a)}{r} \Rightarrow F = 3mg\sin a$$

<u>Άσκηση 9 (Μονάδες 10)</u>

Παίκτης του μπάσκετ κέρδισε φάουλ και εκτελεί δύο ελεύθερες βολές. Το κέντρο του καλαθιού είναι σε οριζόντια απόσταση 4,21 m από το σημείο εκτέλεσης του φάουλ και σε ύψος 3,05 m από το δάπεδο. Στην πρώτη προσπάθεια ο παίκτης ρίχνει την μπάλα υπό γωνία 35° πάνω από την οριζόντια διεύθυνση και με ταχύτητα υ_0 = 4,88 m/s. Η μπάλα ρίχνεται από ύψος 1,83 m πάνω από το δάπεδο. Αυτή η βολή αποτυγχάνει.

(α) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα;

(β)Σε τι οριζόντια απόσταση στο πάτωμα από το σημείο ελεύθερης βολής κτυπά η μπάλα το πάτωμα;

Για την δεύτερη βολή η μπάλα περνά από το κέντρο του καλαθιού. Σε αυτή την βολή ο παίκτης ρίχνει την μπάλα πάλι υπό γωνία 35° και από ύψος 1,83 m από το δάπεδο.

(γ) Τι αρχική ταχύτητα έδωσε ο παίκτης στην μπάλα στην δεύτερη προσπάθεια;

(δ) Για την δεύτερη προσπάθεια ποιο είναι το μέγιστο ύψος που έφτασε η μπάλα; Σ' αυτό το σημείο πόσο μακριά βρίσκεται η μπάλα από το καλάθι κατά την οριζόντια διεύθυνση;

Λύση:

Ο παίκτης ρίχνει την μπάλα και η ταχύτητα της μπάλας έχει τις εξής συντεταγμένες:

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos a_0 \qquad \text{και} \qquad \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin a_0$$

(α)

στο μέγιστο ύψος έχουμε $\upsilon_{0y} = 0$

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin a_0 = 4,88\ m/s\ \sin 35^\circ = 2,80\ m/s$$

$$a_y = -9,80\ m/s^2$$

$$\upsilon_y^2 = \upsilon_{0y}^2 + 2a_y(y-y_0)$$

$$y-y_0 = (\upsilon_y^2 - \upsilon_{0y}^2)/2a_y = 0.4\ m$$

Άρα το ύψος πάνω από το έδαφος είναι:

$$0.4\ m + 1.83\ m = 2.23\ m$$

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την κάθετη κίνηση για να βρούμε πόσο χρόνο βρίσκεται η μπάλα στον αέρα.

$$y - y_0 = \upsilon_{0y}t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$

$$\Rightarrow \quad -1{,}83m = (2{,}8m/s)t - (4{,}9m/s^2)t^2$$
$$\Rightarrow \quad 4,9t^2 - 2,8t - 1,83 = 0$$

από την δευτεροβάθμια εξίσωση έχουμε:

$$t = 0,286 \pm 0,675\ s$$

Το t πρέπει να είναι θετικό, άρα $t = 0,961\ 8\ s$.

Γι' αυτό το χρονικό διάστημα πρέπει να βρούμε την οριζόντια μετατόπιση :

$$x - x_0 = \upsilon_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = 3,84\ m$$

(γ) Δεν γνωρίζουμε ούτε τον χρόνο ούτε την ταχύτητα υ_0 *ώστε η μπάλα να φτάσει στο καλάθι. Από τις εξισώσεις κίνησης της μπάλας κατά την οριζόντια και την κάθετη κατεύθυνση έχουμε:*

$$x - x_0 = \upsilon_{0x}t$$
$$\Rightarrow 4{,}21\ m = (\upsilon_0 \sin 35^o)\ t$$
$$\Rightarrow \upsilon_0 t = 5.139\ m$$
$$y - y_0 = \upsilon_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$
$$\Rightarrow 1.22\ m = (\upsilon_0 \sin 35^o)t - (4.9\ m/s^2)t^2$$

Άρα έχουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους και βρίσκουμε:

$$t = 0{,}594\ s$$
$$\upsilon_0 = 8,65\ m/s$$

(δ) Στο μέγιστο ύψος η y συντεταγμένη της ταχύτητας είναι μηδέν. Άρα

$$\upsilon_y^2 = \upsilon_{0y}^2 + 2a_y(y-y_0)$$
$$\Rightarrow (y-y_0) = (\upsilon_y^2 - \upsilon_{0y}^2)/\ 2a_y = (0-4.96)^2/2(-9.8) = 1.26\ m$$

Άρα το μέγιστο ύψος είναι 1,83m + 1,26m = 3, 09 m. Μελετώντας την κάθετη μετατόπιση μπορούμε να βρούμε και τον χρόνο που χρειάστηκε η μπάλα για να φτάσει σ' αυτό το σημείο.

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t$$
$$\Rightarrow t = (\upsilon_y - \upsilon_{0y})/a_y = 0.506\ s$$

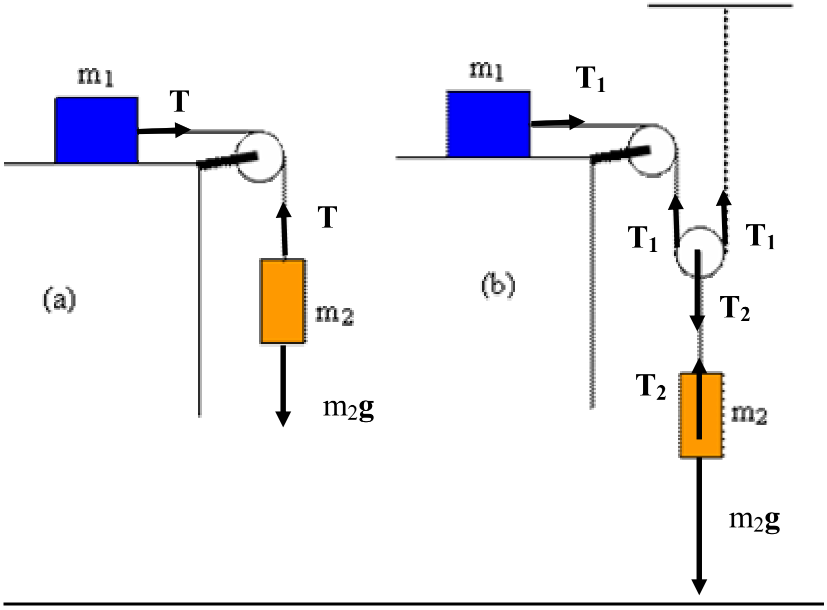
Γνωρίζοντας τον χρόνο μπορούμε να βρούμε την οριζόντια απόσταση που βρίσκετε το σημείο από τον παίκτη.

$$x - x_0 = \upsilon_{0x}t = 3,59\ m$$

Άρα η απόσταση από το καλάθι είναι 4, 21 m — 3, 59 m =062 m

Άσκηση 10A (Μονάδες 5)

Υπολογίστε την επιτάχυνση των σωμάτων m_1 και m_2 και την τάση των σχοινιών στις περιπτώσεις (a) και (b). Οι τροχαλίες είναι αβαρείς και λείες και τα σώματα ολισθαίνουν χωρίς τριβή. Ποια διαμόρφωση μπορεί να επιταχύνει το m_1 γρηγορότερα απ΄ ότι στην ελεύθερη πτώση;



(a) Το σώμα 1 επιταχύνεται υπό την επίδραση της τάσης του νήματος Τ. Το βάρος του και η αντίδραση του δαπέδου είναι κάθετα στην διεύθυνση της κίνησης και δεν μας απασχολούν.
Στο σώμα 2 ασκούνται η τάση του νήματος που είναι ίδια σε όλο το μήκος του, και το βάρος. Οι επιταχύνσεις των δύο σωμάτων είναι η ίδια α.
Γράφουμε λοιπόν το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τα δύο σώματα
$T = m_1 a$ (1) και $m_2 g - T = m_2 a$ (2)
Από τις εξισώσεις (1) και (2) συνάγουμε ότι

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (3)$$

(b) Πάλι βάζουμε στο σχήμα τις δυνάμεις. Στο σώμα 1 ασκείται μόνο η τάση του νήματος στην κατεύθυνση της κίνησης. Η τάση του νήματος είναι σταθερή σε όλο το μήκος του νήματος. Για το νήμα που περνάει από τις τροχαλίες η τάση είναι T_1 ενώ η τάση του νήματος από το οποίο κρέμεται το σώμα 2 είναι T_2. Η χαμηλότερη τροχαλία επιταχύνεται. Επειδή όμως είναι αβαρής, το άθροισμα των δυνάμεων πάνω της είναι μηδέν.

Έχουμε λοιπόν ότι $T_2 = 2T_1$ (4)
Επίσης έχουμε για τις επιταχύνσεις $a_1 = 2a_2$ (5)

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για τα δύο σώματα δίνει

$T_1 = m_1 a_1 \quad (6)$ και $m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad (7)$

Από τις εξισώσεις (4)-(7) παίρνουμε τελικά

$$a_1 = \frac{2m_2}{4m_1 + m_2} g \quad (8)$$

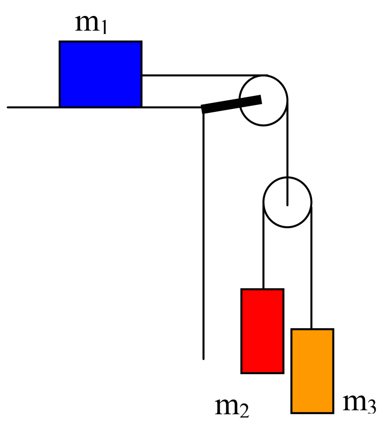
$$a_2 = \frac{m_2}{4m_1 + m_2} g \quad (9)$$

$$T_1 = \frac{2m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g \quad (10)$$

$$T_2 = m_2\left(1 - \frac{m_2}{4m_1 + m_2}\right) g = \frac{4m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g \quad (11)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3) και (8) φαίνεται ότι στην περίπτωση (a) η επιτάχυνση του m_1 μπορεί ποτέ να είναι μεγαλύτερη από g.
Στην περίπτωση (b), αν ισχύει ότι $2m_2 > 4m_1 + m_2$ δηλαδή $m_2 > 4m_1$ τότε $a_1 > g$.

<u>Άσκηση 10B (Μονάδες 5)</u>



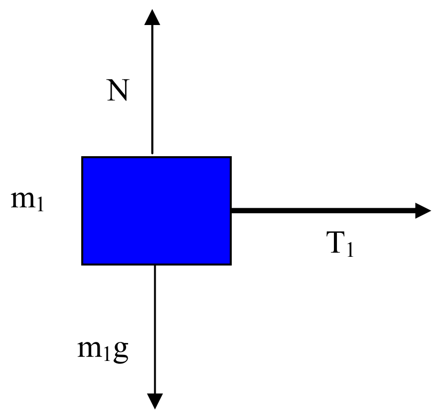
Αποδείξτε ότι οι επιταχύνσεις των τριών σωμάτων δίνονται από τις σχέσεις

$a_1 = 4m_2 m_3 P$
$a_2 = -(m_1 m_3 - m_1 m_2 - 4m_2 m_3)P$
$a_3 = (m_1 m_3 - m_1 m_2 + 4m_2 m_3)P$

όπου $P = g / (m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3)$
Οι τροχαλίες είναι αβαρείς και λείες και τα σώματα ολισθαίνουν χωρίς τριβή.

Λύση:

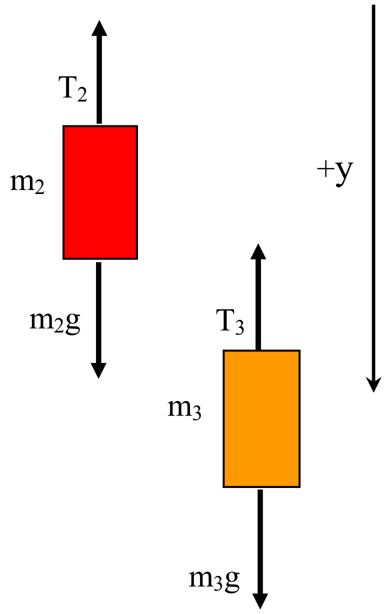
Για να διευκολυνθούμε στην μελέτη μας, χωρίζουμε το σχήμα μας στα επί μέρους στοιχεία του και κάνουμε ένα διάγραμμα ξεχωριστά για το κάθε ένα από αυτά με τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω τους. Αυτού του τύπου τα διαγράμματα λέγονται «διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος».



Ας δούμε πρώτα το σώμα m_1. Στον κατακόρυφο άξονα ασκούνται το βάρος του $m_1\mathbf{g}$ και η κάθετη αντίδραση του δαπέδου $\mathbf{N}$. Αυτές οι δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται και δεν θα μας απασχολήσουν άλλο. Στον οριζόντιο άξονα ασκείται η τάση του νήματος $\mathbf{T}_1$. ισχύει

$$\mathbf{T}_1 = m_1\mathbf{a}_1$$

Αφού η τάση και η επιτάχυνση είναι ομόρροπα διανύσματα μπορούμε να γράψουμε



$$T_1 = m_1 a_1 \qquad (1)$$

Στο σώμα m2 ασκείται το βάρος m2**g** η τάση του νήματος **T2**. Ισχύει

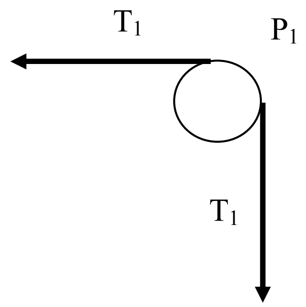
$$\mathbf{T}_2 + m_2\mathbf{g} = m_2\mathbf{a}_2 \qquad (2)$$

Αντίστοιχα για το σώμα m3 ισχύει

$$\mathbf{T}_3 + m_3\mathbf{g} = m_3\mathbf{a}_3 \qquad (3)$$

Αν θεωρήσουμε την θετική κατεύθυνση του άξονα y προς τα κάτω, οι (2) και (3) γίνονται αντίστοιχα

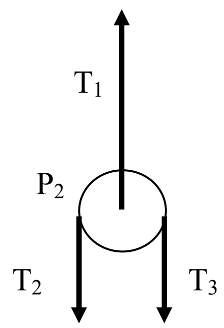
$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \qquad (2a)$$



και

$$m_3 g - T_3 = m_3 a_3 \qquad (3a)$$

Επειδή τα νήματα είναι αβαρή η τάση σε όλο το μήκος τους είναι σταθερή. Οι τροχαλίες επίσης επειδή δεν έχουν μάζα και είναι λείες απλά αλλάζουν την κατεύθυνση των δυνάμεων όπως στην περίπτωση της τροχαλίας P1 ή ισοκατανέμουν τις δυνάμεις όπως στην τροχαλία P2.
Η τροχαλία P2 επιταχύνεται αλλά επειδή έχει μηδενική μάζα ισχύει



$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 = 0 \qquad (4\alpha)$$

Ακόμα ισχύει

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_3 \qquad (4\beta)$$

Από τις 4α και 4β προκύπτει ότι (συνιστώσες)

$$T_1 - 2T_2 = 0 \qquad (4)$$

και με την βοήθεια της (1)

$$T_2 = \frac{m_1 a_1}{2} \qquad (4\alpha)$$

Οι επιταχύνσεις των τριών σωμάτων δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Οι y-συνιστώσες τους συνδέονται με την σχέση

$$a_1 = \frac{a_2 + a_3}{2} \qquad (5)$$

Δεν έχουμε κάνει καμμία παραδοχή σχετικά με την διεύθυνση της επιτάχυνσης. Ένα θετικό τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα δείχνει επιτάχυνση προς τα κάτω, ενώ το αντίθετο συμβαίνει με αρνητικό αριθμητικό αποτέλεσμα.

Από τις (2α), (3α) και (4β) έχουμε

$$(m_3 - m_2)g = -m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 \qquad (6)$$

Από (2α) και (4α) και (5)

$$m_2 g - \frac{m_1 a_1}{2} = m_2 a_2 \Rightarrow m_2 g - \frac{m_1}{2}\left(\frac{a_2 + a_3}{2}\right) = m_2 a_2 \qquad (7)$$

Μπορούμε να λύσουμε την (6) ως προς a_3 και παίρνουμε

$$a_3 = \frac{1}{m_3}\left[(m_3 - m_2)g + m_2 a_2\right] \qquad (8)$$

Από τις (6) και (7) ή (8) παίρνουμε τελικά

$$a_2 = -\frac{(m_1 m_3 - m_1 m_2 - 4m_2 m_3)}{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3)} g \;= -(m_1 m_3 - m_1 m_2 - 4m_2 m_3)P \qquad (9)$$

Αντικαθιστώντας την (9) μέσα στην (8) καταλήγουμε στην έκφραση

$$a_3 = \frac{(m_1 m_3 - m_1 m_2 + 4m_2 m_3)}{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3)} g \;= (m_1 m_3 - m_1 m_2 + 4m_2 m_3)P \qquad (10)$$

Τέλος χρησιμοποιώντας τις (9) και (10) στην (5) έχουμε

$$a_1 = 4m_2 m_3 P \qquad (11)$$