3^{η} ΕΡΓΑΣΙΑ

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Όπου απαιτείται δίνεται η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας ως $g=9.8 m/sec^2$.

Ημερομηνία Παράδοσης: 26/2/2006

ΘΕΜΑ 1:

Α. Σχεδιάστε τα διαγράμματα θέσης-χρόνου, ταχύτητας-χρόνου και επιτάχυνσης-χρόνου, για ένα σώμα που εκτελεί:

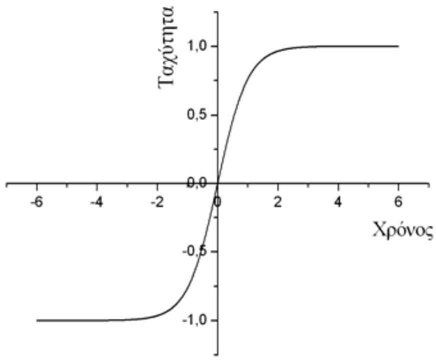
α) Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

β) Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

γ) Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση

Υποθέστε ότι, σε όλες τις περιπτώσεις, η θέση και η ταχύτητα του σώματος για t=0 είναι θετική.

Β.



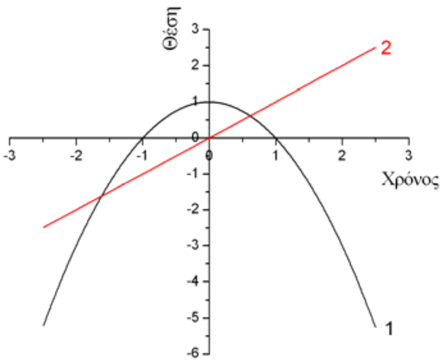
Η ταχύτητα ενός υλικού σημείου συναρτήσει του χρόνου δίνεται από το παραπάνω σχεδιάγραμμα.

α) Σε ποια χρονική στιγμή έχουμε μέγιστη στιγμιαία επιτάχυνση;

β) Στο χρονικό διάστημα [-2,2] ή στο [-6,6] έχουμε μεγαλύτερη μέση επιτάχυνση;

γ) Να σχεδιασθούν τα αντίστοιχα διαγράμματα θέσης – χρόνου και επιτάχυνσης - χρόνου.

Γ.



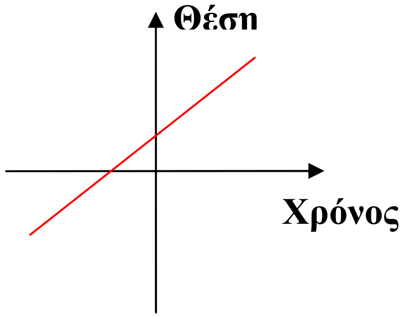
Η θέση συναρτήσει του χρόνου για δύο υλικά σώματα 1, 2 φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. Για το σώμα 1 η καμπύλη αντιστοιχεί σε παραβολή. α) Υπάρχει χρονικό σημείο για το οποίο τα δύο σώματα έχουν την ίδια (στιγμιαία) ταχύτητα; Εάν ναι, που περίπου βρίσκεται αυτό; Υπολογίστε γραφικά.

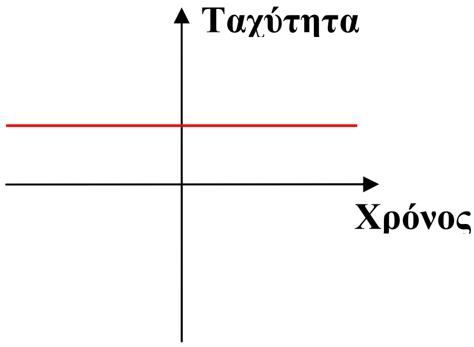
β) Ποια είναι η μέση ταχύτητα των σωμάτων στο διάστημα [-1, 1], στο [0, 1] και στο [-1, 0];
γ) Σχεδιάστε τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου και επιτάχυνσης χρόνου για τα δύο σώματα.

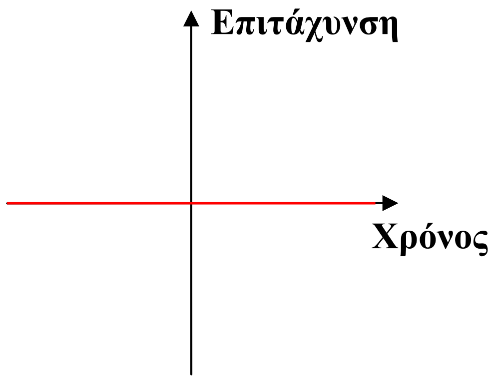
ΛΥΣΗ:

Α.

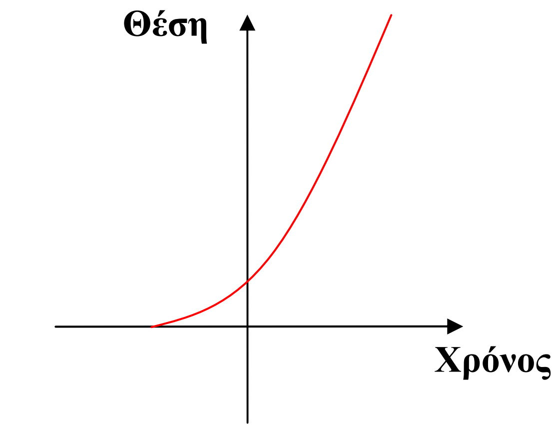
α) Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

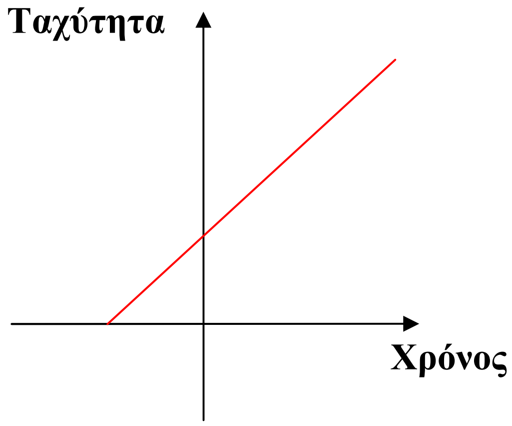


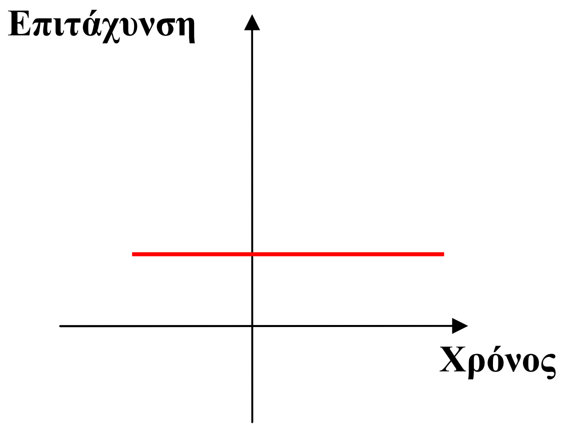




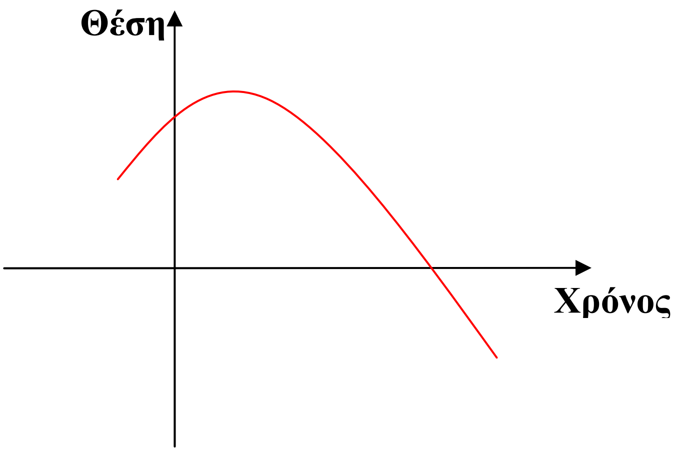
β) Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

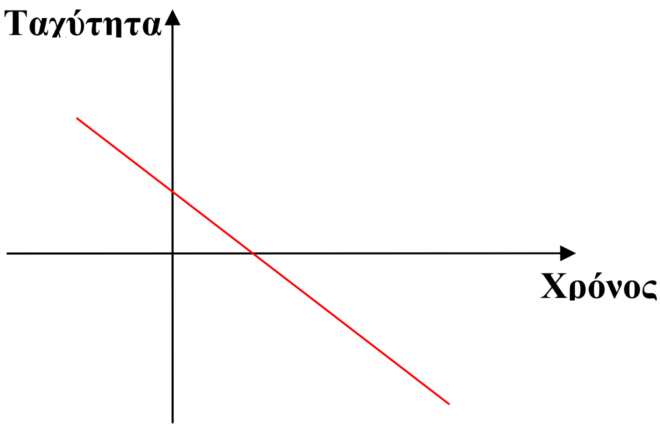


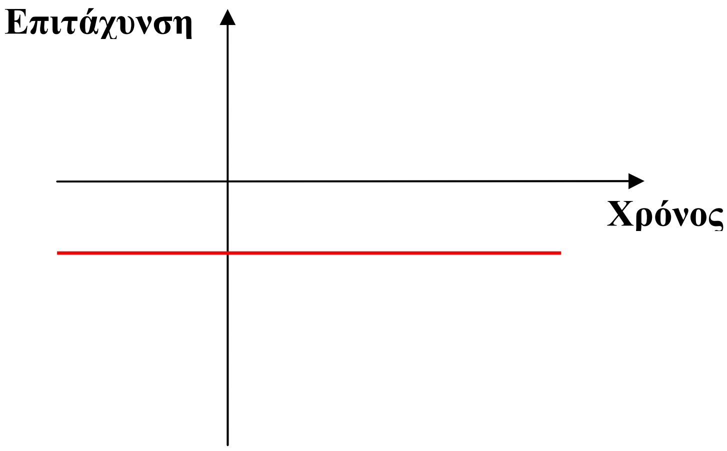




γ) Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση







Β.

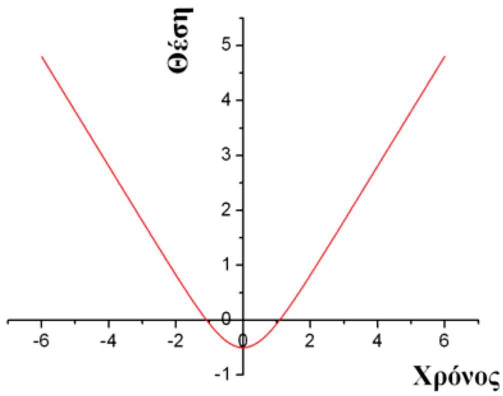
α)

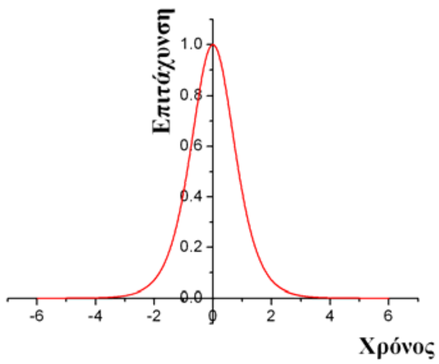
Μέγιστη στιγμιαία επιτάχυνση έχουμε για t = 0, εκεί δηλαδή που η κλίση της καμπύλης είναι μέγιστη.

β)

Η μέση επιτάχυνση είναι μεγαλύτερη στο διάστημα [-2, 2] διότι η μεταβολή της ταχύτητας είναι σχεδόν ίδια με αυτή του διαστήματος [-6, 6] αλλά η χρονική διαφορά είναι πολύ πιο μικρή (4 έναντι 12).

γ)





Γ.

α) Από το σχήμα φαίνεται ότι το σώμα 1 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ενώ το σώμα 2 ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με θετική ταχύτητα. Εφόσον η στιγμιαία ταχύτητα προσδιορίζεται από την κλίση της εφαπτομένης στο διάγραμμα θέσης χρόνου παρατηρείται ότι η στιγμιαία ταχύτητα των δύο σωμάτων είναι ίση για t = – ½ (κατά προσέγγιση). ($x=-t^2+1 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-2t=1 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$).

β) Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης ταχύτητας έχουμε ότι για το σώμα 1

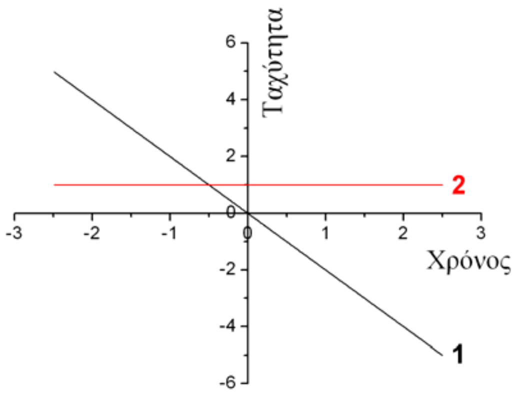
$$\overline{v}_1[-1,1]=\frac{x(1)-x(-1)}{1-(-1)}=\frac{0-0}{2}=0\,,\quad \overline{v}_1[-1,0]=\frac{x(0)-x(-1)}{0-(-1)}=\frac{1-0}{1}=1$$

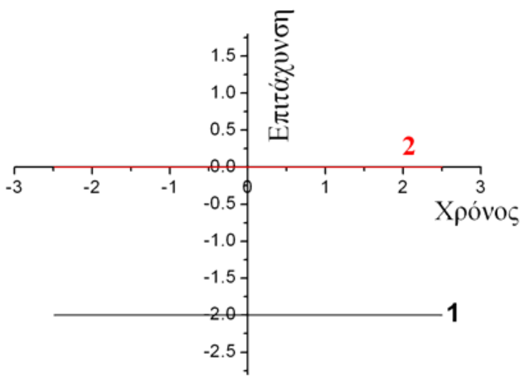
$$\overline{v}_1[0,1]=\frac{x(1)-x(0)}{1-0}=\frac{0-1}{1}=-1$$

ενώ για το σώμα 2 ισχύει ότι

$$\overline{v}_2[-1,1]=\overline{v}_2[-1,0]=\overline{v}_2[0,1]=1$$

γ)





ΘΕΜΑ 2:

Α. Ένα σωματίδιο κινείται στο επίπεδο xy έτσι ώστε $\upsilon_x = 4\cos t$, $\upsilon_y = 3\sin t$.
Εάν τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_0 = 3\vec{j}$
α) Βρείτε την επιτάχυνσή του $\vec{a}$ τη χρονική στιγμή t = π/4
β) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του

Β. Η ταχύτητα ενός αεροπλάνου σχετικά με τον αέρα είναι 150km/h προς τα δυτικά. Αν υπάρχει άνεμος με ταχύτητα 30 km/h προς το βορρά βρείτε την ταχύτητα του αεροπλάνου σχετικά με το έδαφος.

ΛΥΣΗ

Α

α) Η επιτάχυνση κατά τον άξονα x είναι $\alpha_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}(4\cos t) = -4\sin t$

Η επιτάχυνση κατά τον άξονα y είναι $\alpha_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}(3\sin t) = 3\cos t$

Επομένως $\vec{a} = -4\sin t\ \vec{\mathrm{i}}\ + 3\cos t\ \vec{\mathrm{j}}$

Άρα για t = π/4 $\vec{a} = -4\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \hat{\mathrm{i}}\ + 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \hat{\mathrm{j}} = -2\sqrt{2}\ \hat{\mathrm{i}}\ + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ \hat{\mathrm{j}}$

β) Ισχύει ότι

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon_x dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon_x dt \Rightarrow$$
$$x = x_0 + \int_0^t \upsilon_x dt = 0 + \int_0^t 4\cos t dt = \int_0^t 4\cos t dt = 4[\sin t]_0^t = 4\sin t \qquad (1)$$

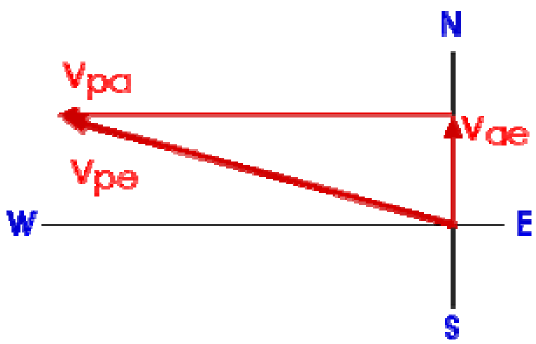
$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = \upsilon_y dt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t \upsilon_y dt \Rightarrow$$
$$y = y_0 + \int_0^t \upsilon_y dt = 3 + \int_0^t 3\sin t dt = 3 - 3[\cos t]_0^t = 3 - 3\cos t + 3 = 6 - 3\cos t \qquad (2)$$

Από την (1) προκύπτει ότι $\sin t = \dfrac{x}{4}$, ενώ από την (2) έχουμε $\cos t = \dfrac{6-y}{3}$

Εφόσον ισχύει $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, προκύπτει τελικά ότι η εξίσωση της τροχιάς είναι

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(6-y)^2}{9} = 1$ που αντιστοιχεί σε έλλειψη με κέντρο (0,6).

Β.



$\mathbf{V}_{pe}$= ταχύτητα αεροπλάνου σχετικά με τη γη

$\mathbf{V}_{pa}$= ταχύτητα αεροπλάνου σχετικά με τον αέρα = 150 km/h

$\mathbf{V}_{ae}$= ταχύτητα αέρα σχετικά με τη γη = 30 km/h

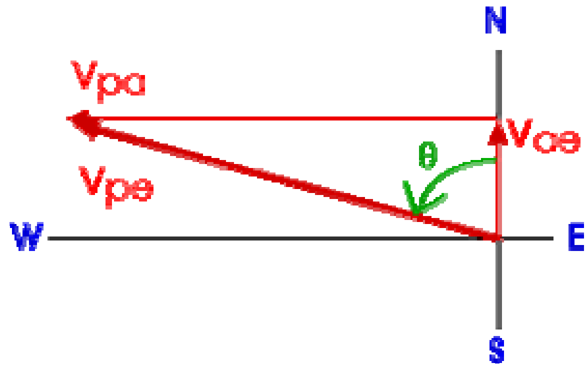
$$\mathbf{V}_{pe} = \mathbf{V}_{pa} + \mathbf{V}_{ae}$$

Η $\mathbf{V}_{pe}$ είναι υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, έτσι βρίσκουμε το μέτρο της ως

$$\mathbf{V}_{pe} = \sqrt{\mathbf{V}_{pa}^2 + \mathbf{V}_{ae}^2}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει $\mathbf{V}_{pe}$=**153 km/h**

Για τη διεύθυνση της $\mathbf{V}_{pe}$ θα βρούμε τη γωνία θ που φαίνεται στο σχήμα

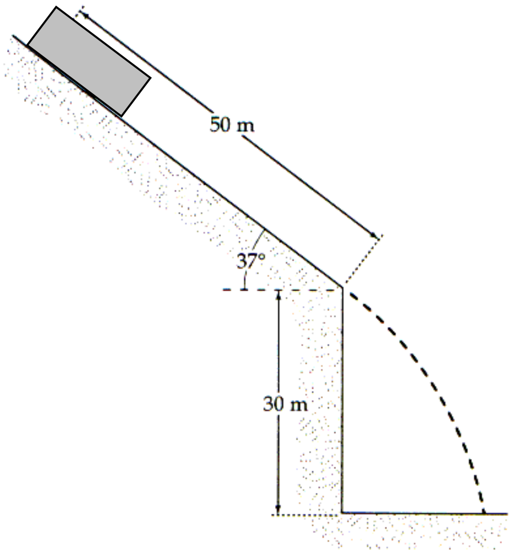


$$\tan\theta = {}^{150}\!/_{30} = 5$$

$$\boldsymbol{\theta = 78.7^{o}}$$

ΘΕΜΑ 3:

Σώμα αφήνεται ελεύθερο να ολισθήσει σε κατηφοριά μπροστά από γκρεμό προς τη θάλασσα. Η κατηφοριά έχει γωνία 37^o σε σχέση με τον ορίζοντα Το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση 4.0 m/s^2, και διανύει 50.0 m μέχρι την άκρη του γκρεμού. Ο γκρεμός έχει βάθος 30.0 m μέχρι τη θάλασσα.



Βρείτε
(α) την ταχύτητα του σώματος όταν φθάνει στην άκρη του γκρεμού και το χρόνο που χρειάζεται για να φθάσει εκεί.
(β) την ταχύτητα που έχει το σώμα όταν φθάνει στη θάλασσα.
(γ) το συνολικό χρόνο που κινείται το σώμα.
(δ) την απόσταση από τη βάση του γκρεμού όπου προσθαλασσώνεται το σώμα.
(ε) το συντελεστή τριβής ολίσθησης της κατηφοριάς

ΛΥΣΗ:

(α) Έχουμε ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Άρα

$$v^2 = v_o^2 + 2\ a\ s = 0 + 2\ (4.0\ m/s^2)\ (50\ m)$$

$$v^2 = 400\ m^2/s^2 \quad \text{ή} \quad \mathbf{v = 20\ m/s}$$

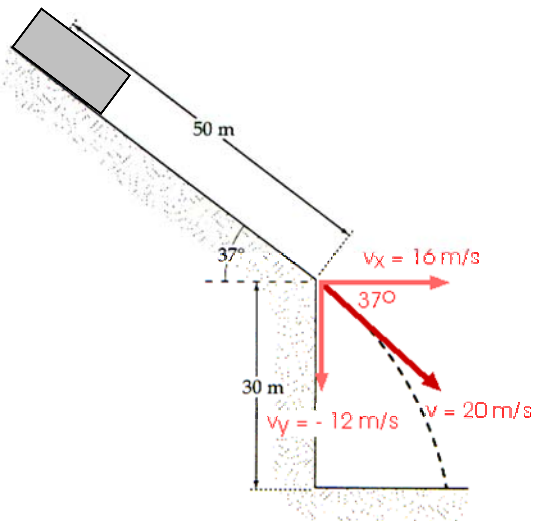
Για την εύρεση του χρόνου έχουμε:

$$v = v_o + a\ t$$

$$20\ m/s = 0 + (4.0\ m/s^2)\ t$$

$$\mathbf{t = 5\ s}$$

(β) Θα βρούμε την ταχύτητα τη στιγμή της προσθαλάσσωσης.



Πρώτα θα βρούμε το χρόνο πτήσης του σώματος. Έχουμε (δείτε σχήμα):

$$y = y_o + v_{yo}\, t + (1/2)\, a_y\, t^2 = y_o + v_{yo}\, t - (1/2)\, g\, t^2$$

$$0 = 30 \text{ m} + (-12 \text{ m/s})\, t - (1/2)\, (9.8 \text{ m/s}^2)\, t^2 \qquad (\text{αφού } 12 = 20 \cdot \sin(37^o))$$

που οδηγεί σε τριώνυμο

$$4.9t^2 + 12t - 30 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(4.9)(-30)}}{2(4.9)}$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{732}}{9.8}$$

$$\boldsymbol{t = 1.53 \text{ s}}$$

Υπάρχει και λύση με t<0 που απορρίπτεται ως μη φυσική.

Θα βρούμε τώρα την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας,

$v_y = v_{yo} + a_y\, t$

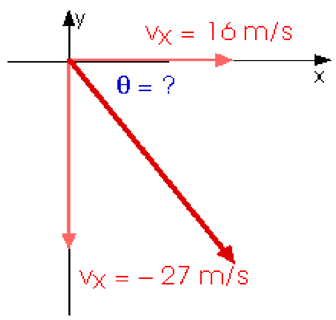
$v_y = -12 \text{ m/s} + (-9.8 \text{ m/s}^2)(1.53 \text{ s})$ ή $\mathbf{v_y = -27 \text{ m/s}}$

ενώ για την οριζόντια συνιστώσα έχουμε $\mathbf{v_x = 16 \text{ m/s}}$.

Και το μέτρο της ολικής ταχύτητας θα είναι,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \mathbf{31.4 \text{ m/s}}$$

Για τη διεύθυνση της ταχύτητας έχουμε:



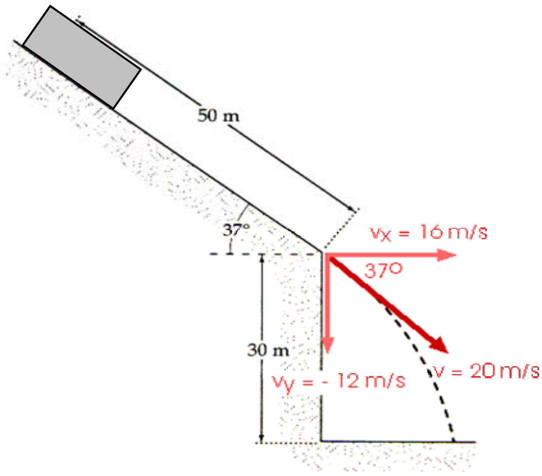
$$\tan\theta = 27/16 = 1.69 \text{ ή } \boldsymbol{\theta = 59.3^o}$$

(γ) Για τον ολικό χρόνο κίνησης έχουμε:

Η κίνηση στην κατηφοριά είχε διάρκεια t_1 = 5.0 s ενώ ο χρόνος πτήσης ήταν t_2 = 1.53 s. Έτσι ο ολικός χρόνος κίνησης ήταν

$$\mathbf{t_{ολ} = 6.53\ s}$$

(δ) Για τη θέση του σώματος τη στιγμή της προσθαλάσσωσης έχουμε:



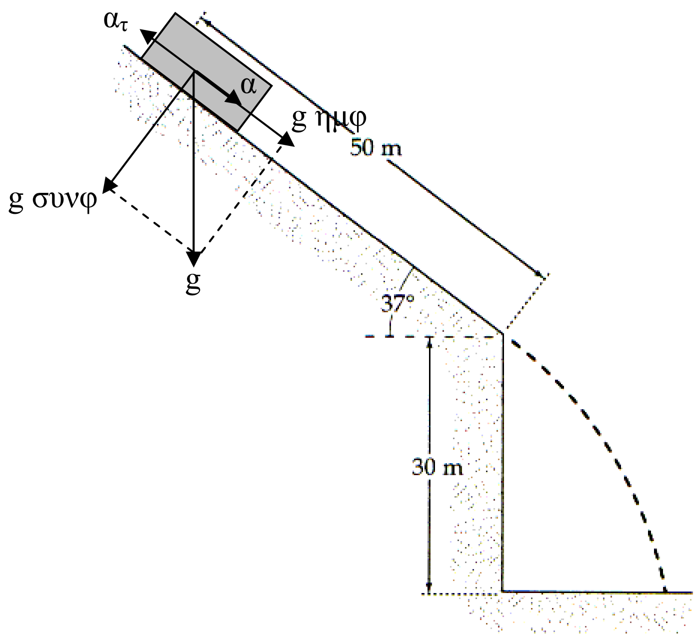
κατά τη διάρκεια των 1.53s της πτήσης η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας παραμένει σταθερή στα 16 m/s. Επομένως $x = v_x t$ ή x = (16 m/s)(1.53 s) = **24.5 m.**

(ε) Για το συντελεστή τριβής ολίσθησης θεωρούμε ότι η επιτάχυνση a προκύπτει από την επιτάχυνση που θα είχε το σώμα χωρίς τριβή $g \cdot \sin 37^o$ μείον την επιβράδυνση που προκαλεί η τριβή. Έχουμε

$$a = g \cdot \sin 37^o - a_τ$$

και εξ΄ αυτού $\quad a_τ = g \cdot \sin 37^o - a = 5,9 - 4 = \mathbf{1.9\ m/s^2}$

Η $a_τ$ όμως είναι $a_τ = μ \cdot g \cdot \cos 37^o$ επομένως $μ = a_τ / (g \cdot \cos 37^o) =$ **0.243**



ΘΕΜΑ 4:

Α. Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή δίνεται από τη σχέση $\alpha = -\kappa\upsilon$ όπου κ μία σταθερά. Για t = 0, $\upsilon = \upsilon_0$ και χ=0. α) Βρείτε την ταχύτητα και την απομάκρυνση σαν συνάρτηση του χρόνου. β) Βρείτε επίσης την ταχύτητα σαν συνάρτηση της θέσης. γ) Κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις

Β. Μια σφεντόνα μπορεί να πετάξει με πλάγια βολή μια πέτρα σε μέγιστη απόσταση 40.0 m. Σε πόσο ύψος μπορεί να πετάξει την ίδια πέτρα με κατακόρυφη βολή προς τα επάνω;

ΛΥΣΗ:

Α.

α) Έχουμε ότι

$$\alpha = -\kappa\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\kappa\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\kappa dt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\kappa\int_0^t dt \Rightarrow \ln\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = -\kappa t$$

$$\Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 e^{-\kappa t}$$

Επίσης

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \upsilon dt \Rightarrow$$

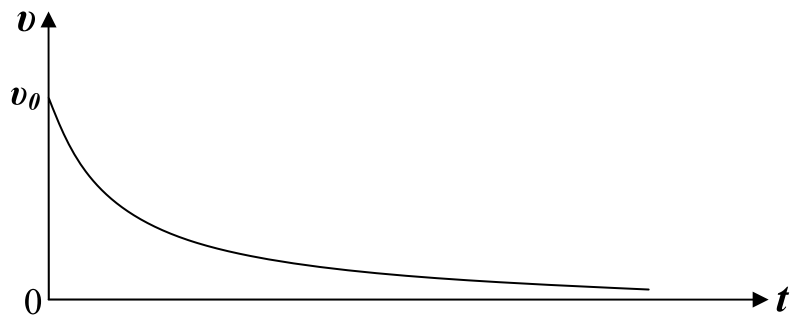
$$x = \int_0^t \upsilon_0 e^{-\kappa t} dt = \upsilon_0\left[\frac{e^{-\kappa t}}{-\kappa}\right]_0^t = \upsilon_0\left(-\frac{e^{-\kappa t}}{\kappa} + \frac{1}{\kappa}\right) = \frac{\upsilon_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)$$

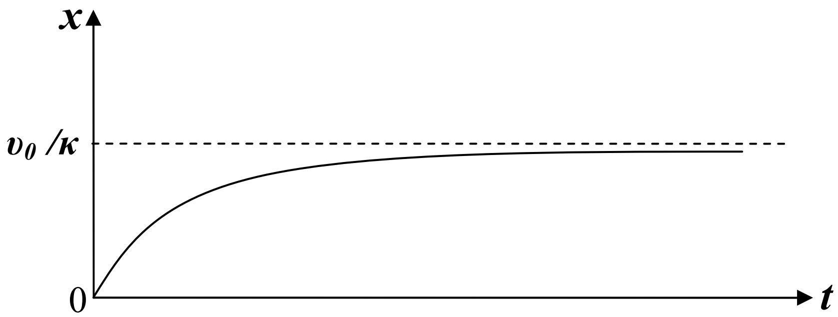
β) Από τη σχέση $\upsilon = \upsilon_0 e^{-\kappa t}$ προκύπτει ότι $e^{-\kappa t} = \dfrac{\upsilon}{\upsilon_0}$.

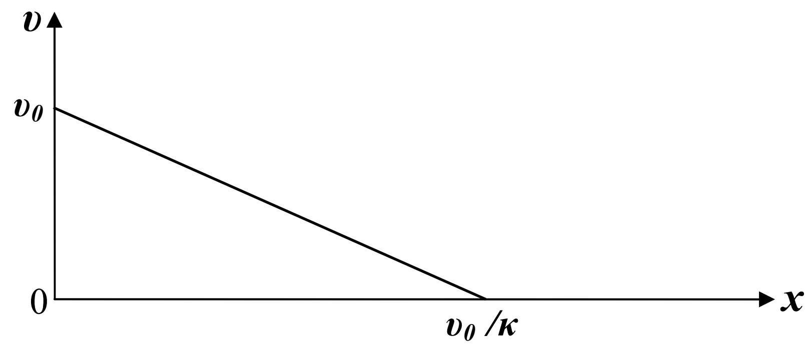
Επομένως η εξίσωση $x = \dfrac{\upsilon_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)$ γίνεται

$$x = \frac{\upsilon_0}{\kappa}\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right) = \frac{\upsilon_0}{\kappa} - \frac{\upsilon}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}\left(\upsilon_0 - \upsilon\right) \Rightarrow \kappa x = \upsilon_0 - \upsilon \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 - \kappa x$$

γ)







B.

Από την εξίσωση του βεληνεκούς έχουμε:

$X_{max} = v_o^2 \sin 2\theta / g$

Η μέγιστη τιμή του βεληνεκούς ($X_{max,max}$) επιτυγχάνεται για $\theta = 45^o$.

Από αυτή τη μέγιστη τιμή του βεληνεκούς βρίσκουμε την αρχική ταχύτητα v_o

$X_{max,max} = v_o^2 \sin (2 \times 45^o) / g = v_o^2 / g = v_o^2 / (9.8\ m/s^2) = 40\ m$

$v_o^2 = (9.8\ m/s^2)(40\ m) = 392\ m^2/s^2$ ή $\mathbf{v_o = 19.8\ m / s.}$

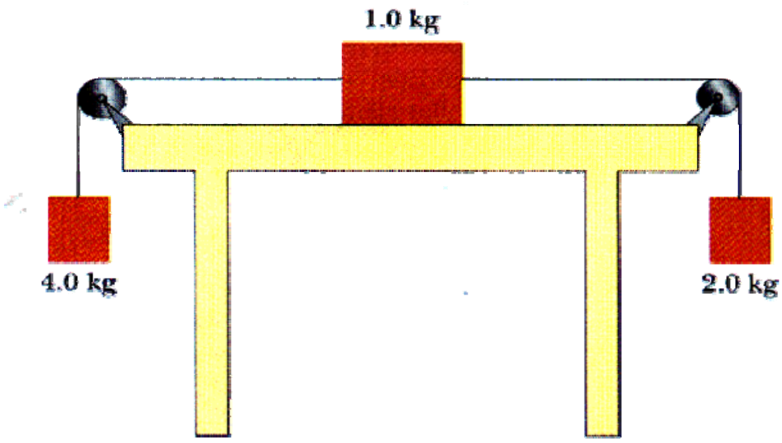
Το μέγιστο ύψος που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή ταχύτητα είναι (δείτε σχέση (2.53) στο βιβλίο που διανέμεται)

$h = v_o^2 \sin^2 \theta / 2g$

Για κατακόρυφη βολή έχουμε $\theta = 90^o$ και $\sin \theta = 1$. Άρα

$h_{max} = v_o^2 / 2g = (19.8\ m/s)^2 / 2(9.8\ m/s^2)$ ή $\mathbf{h_{max} = 20\ m.}$

ΘΕΜΑ 5: Τρεις μάζες συνδέονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Το τραπέζι έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.35. Οι τρεις μάζες είναι 4.0 kg, 1.0 kg, and 2.0 kg αντιστοίχως και οι τροχαλίες θεωρούνται ως αβαρείς και χωρίς τριβές.

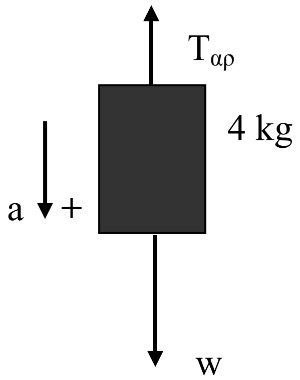


(α) Προσδιορίστε την επιτάχυνση κάθε μάζας.

(β) Προσδιορίστε την τάση στα δύο τμήματα του σχοινιού.

ΛΥΣΗ:

Η μάζα των 4.0 kg θα επιταχυνθεί προς τα κάτω. Η μάζα των 2.0 kg πρέπει να επιταχυνθεί προς τα επάνω. Η μάζα του 1.0 kg θα επιταχυνθεί προς τα αριστερά. Θα σχεδιάσουμε τρία διαγράμματα ελεύθερου σώματος ένα για κάθε μια από τις τρεις μάζες.



Για την κίνηση της μάζας των 4.0 kg θα θεωρήσουμε ως θετική την προς τα κάτω διεύθυνση (όπως στο παραπάνω σχήμα)

Η συνισταμένη δύναμη πάνω στην μάζα θα είναι

$$F_{ολ} = w - T_{αρ} = m\,a,$$

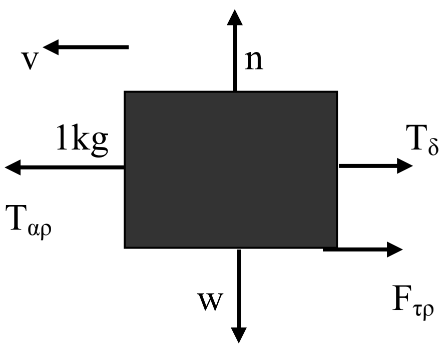
όπου w το βάρος της μάζας και $T_{αρ}$ η τάση του σχοινιού. Συνεπώς,

$$m\,g - T_{αρ} = m\,a$$

$$(4.0\ \text{kg})\ (9.8\ \text{m/s}^2) - T_{αρ} = (4.0\ \text{kg})\ a$$

$$39.2\ \text{N} - T_{αρ} = (4.0\ \text{kg})\ a$$

Για τη μάζα του 1.0 kg αναμένουμε να ολισθήσει προς τα αριστερά και συνεπώς η δύναμη τριβής ολίσθησης ($F_{τρ}$) που ασκείται σ' αυτή θα έχει διεύθυνση προς τα δεξιά (όπως στο παρακάτω σχήμα).



Η συνισταμένη κατά τον κατακόρυφο άξονα (άξονας y) θα είναι

$$F_{ολ,y} = n - w = m\, a_y = 0$$

$$n = w = (1.0\ kg)\ (9.8\ m/s^2) = 9.8\ N$$

Συνεπώς,

$$F_{τρ} = μ\, n = (0.35)\ (9.8\ N) = 3.43\ N$$

Η συνισταμένη δύναμη κατά τον οριζόντιο άξονα (άξονας x) θα δίνεται από την έκφραση

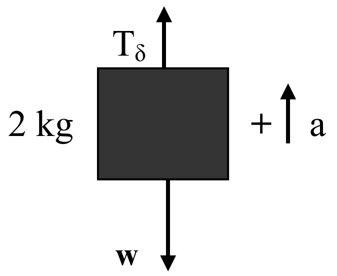
$$F_{ολ,x} = T_δ + F_{τρ} – T_{αρ} = m\,(– a)$$

όπου $T_δ$ και $T_{αρ}$ η τάση του σχοινιού στην δεξιά και αριστερή πλευρά της μάζας αντιστοίχως (όπως στο παραπάνω σχήμα). Σημειώστε ότι δεν είναι απαραίτητο οι τιμές της τάσης του σχοινιού εκατέρωθεν της μάζας να είναι ίσες. Σημειώστε επίσης ότι η επιτάχυνση υπεισέρχεται στην παραπάνω εξίσωση με αρνητικό πρόσημο γιατί θεωρήσαμε ως θετικό τον άξονα x προς τα δεξιά ενώ αναμένουμε η μάζα να επιταχυνθεί προς τα αριστερά.

Συνεπώς,

$$T_δ + 3.43\ N – T_{αρ} = (1.0\ kg)\ (– a)$$

Για τη μάζα των 2 kg το διάγραμμα ελεύθερου σώματος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Επειδή η μάζα των 2.0 kg αναμένουμε να επιταχυνθεί προς τα πάνω θεωρούμε ως θετική την προς τα πάνω κατακόρυφη διεύθυνση. Η συνισταμένη δύναμη κατά την κατακόρυφη διεύθυνση δίνεται από την σχέση,

$$F_{ολ} = T_δ – w = m\, a$$

Συνεπώς

$$T_δ – m\, g = m\, a$$

$$T_δ = m\, g + m\, a = (2.0\ kg)\ (9.8\ m/s^2) + (2.0\ kg)\ a$$

$$T_δ = 19.6\ N + (2.0\ kg)\ a$$

Έχουμε τώρα το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους: a, $T_δ$, και $T_{αρ}$.

$$39.2\ N - T_{αρ} = (4.0\ kg)\ a$$

$$T_δ + 3.43\ N - T_{αρ} = (1.0\ kg)\ (-\ a)$$

$$T_δ = 19.6\ N + (2.0\ kg)\ a$$

Επιλύουμε ως προς $T_{αρ}$ την πρώτη εξίσωση,

$$T_{αρ} = 39.2\ N - (4.0\ kg)\ a$$

Από την τρίτη εξίσωση έχουμε επίσης την $T_δ$. Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές στη δεύτερη εξίσωση,

$$[19.6\ N + (2.0\ kg)\ a] + 3.43\ N - [39.2\ N - (4.0\ kg)\ a] = (1.0\ kg)\ (-a)$$

$$[19.6 + 2.0\ a] + 3.43 - [39.2 - 4.0\ a] = -\ a$$

$$(2 + 4 + 1)\ a = 39.2 - 3.43 - 19.6$$

Συνεπώς, $\mathbf{a = 2.31\ m/s^2}$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την τιμή της επιτάχυνσης που μόλις υπολογίσαμε μπορούμε να βρούμε τις τιμές της τάσης του σχοινιού. .

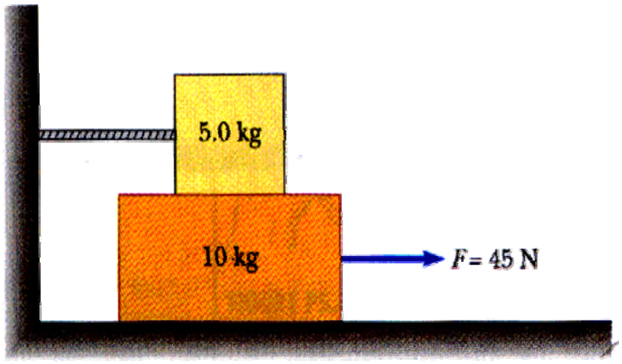
$$T_{αρ} = 39.2\ N - (4.0\ kg)\ (2.31\ m/s^2) = \mathbf{30.0\ N}$$

$$T_δ = 19.6\ N + (2.0\ kg)\ (2.31\ m/s^2) = \mathbf{24.2\ N}$$

ΘΕΜΑ 6:

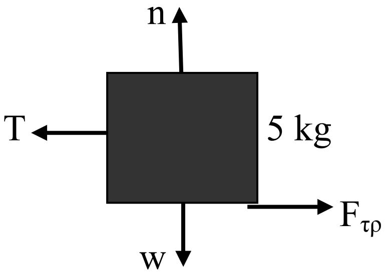
Ένα σώμα μάζας 5.0-kg τοποθετείται πάνω σε ένα σώμα μάζας 10-kg όπως στο επόμενο σχήμα. Μια οριζόντια δύναμη 45 N εφαρμόζεται στο σώμα των 10-kg, ενώ το σώμα των 5.0 kg είναι σταθερά προσδεδεμένο στον τοίχο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των κινούμενων επιφανειών είναι 0.20.

Σχεδιάστε ένα διάγραμμα ελεύθερου σώματος για κάθε σώμα και προσδιορίστε τα ζεύγη δυνάμεων δράσης – αντίδρασης μεταξύ των σωμάτων. Προσδιορίστε ακόμα την τάση του σχοινιού και την επιτάχυνση του σώματος μάζας 10 kg.



ΛΥΣΗ:

Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το σώμα μάζας 5 kg φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Η συνισταμένη δύναμη κατά τον οριζόντιο άξονα (άξονας x) είναι,

$$F_{ολ,x} = F_{τρ} - T = m\, a_x = 0$$

$$F_{τρ} = T$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι η $a_x = 0$, αφού το σώμα δεν κινείται λόγω της πρόσδεσής του στον τοίχο.

Η συνισταμένη δύναμη κατά τον κατακόρυφο άξονα (άξονας y) είναι,

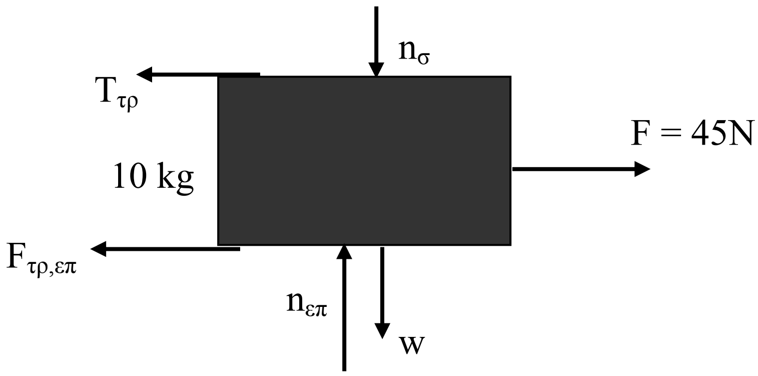
$$F_{ολ,y} = n - w = m\, a_y = 0$$

$$n = w = m\, g = (5.0 \text{ kg})\ (9.8 \text{ m/s}^2) = 49 \text{ N}$$

$$F_{τρ} = \mu\, n = (0.20)\ (49 \text{ N}) = 9.8 \text{ N}$$

Συνεπώς, **T = 9.8 N**

Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το σώμα μάζας 10 kg είναι το ακόλουθο.



Οι δύο δυνάμεις τριβής που ασκούνται από το ένα σώμα στο άλλο $F_{τρ}$ είναι ένα ζεύγος δυνάμεων δράσης-αντίδρασης. Υπολογίσαμε ήδη την αριθμητική τιμή αυτών των δυνάμεων,

$$\mathbf{F_{τρ} = 9.8\ N}$$

Οι δύο κάθετες δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα από το άλλο είναι επίσης ένα ζεύγος δυνάμεων δράσης – αντίδρασης. Υπολογίσαμε ήδη την αριθμητική τιμή αυτών των δυνάμεων,

$$\mathbf{n_σ = 49\ N}$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον $2^ο$ νόμο του Newton στην μάζα των 10 kg,

$$F_{ολ,y} = n_{επ} – w – n_σ = 0$$

$$n_{επ} – (10\ kg)\ (9.8\ m/s^2) – 49\ N = 0$$

$$\mathbf{n_{επ} = 147\ N}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη τριβής που εξασκείται από το επίπεδο πάνω στη μάζα των 10 kg, $F_{τρ,επ}$

$$F_{τρ,επ} = μ\ n_{επ} = (0.2)\ (147\ N) = 29.4\ N$$

Γνωρίζοντας όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα των 10 kg, μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνσή της,

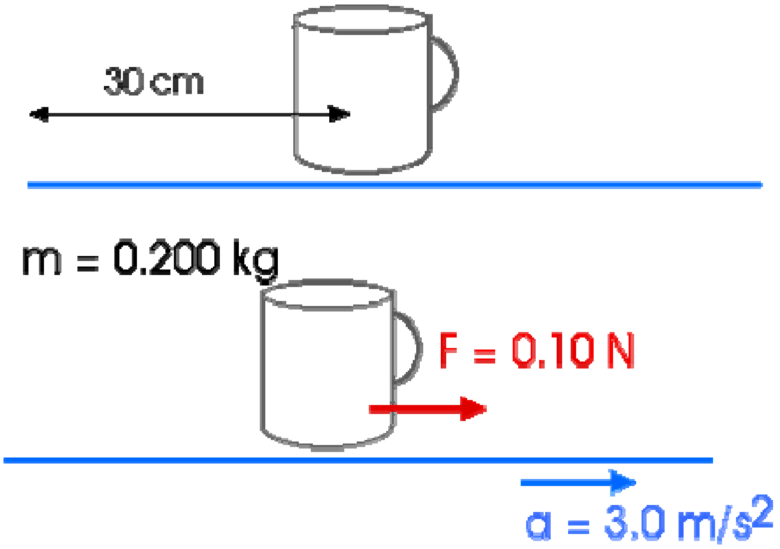
$$F_{ολ,x} = 45\ N – F_{τρ} – F_{τρ,επ} = m\ a$$

$$45\ N - 9.8\ N - 29.4\ N = (10\ kg)\ a$$

Συνεπώς, $\mathbf{a = 0.58\ m/s^2}$

ΘΕΜΑ 7:

Ένας ταχυδακτυλουργός προσπαθεί να τραβήξει ένα τραπεζομάντιλο κάτω από μια κούπα του καφέ μάζας 200 g που βρίσκεται 30 cm από την άκρη του τραπεζομάντιλου. Εάν το τραπεζομάντιλο ασκεί δύναμη τριβής ίση με 0.10 N πάνω στην κούπα, και εάν το τραπεζομάντιλο σύρεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου 3.0 m/s^2, πόσο μετακινείται η κούπα πάνω στο τραπεζομάντιλο πριν αυτό φύγει εντελώς κάτω από την κούπα; (Υπόδειξη: το τραπεζομάντιλο μετακινείται κατά περισσότερο από 30 cm πριν βγει τελείως κάτω από την κούπα!)



ΛΥΣΗ:

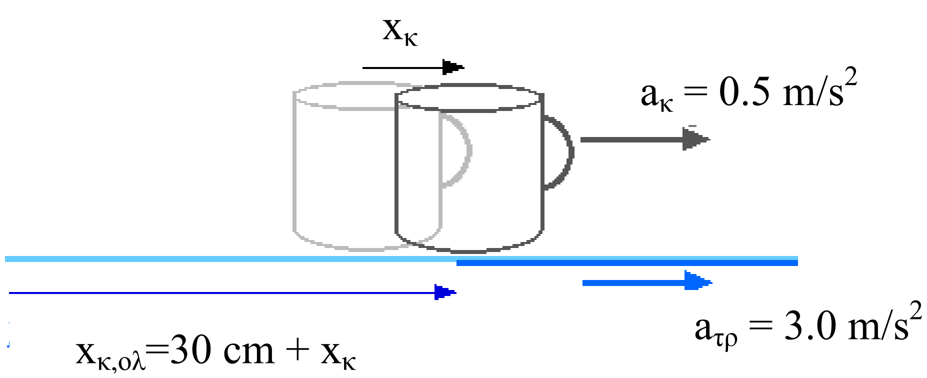
Η επιτάχυνση της κούπας ικανοποιεί τη σχέση,

$$F = m\, a_\kappa$$

$$0.10\ \text{N} = (0.200\ \text{kg})\ a_\kappa$$

$$\mathbf{a_\kappa = 0.5\ m/s^2}$$

Μετά από χρόνο t, η κούπα βρίσκεται στη θέση



(όπου θεωρούμε ως αρχή την άκρη του τραπεζομάντιλου την t=0) με

$$x_\kappa = (^1/_2)\, a_\kappa\, t^2 = (0.5)\,(0.5\ \text{m/s}^2)\, t^2 = (0.25\ \text{m/s}^2)\, t^2 = 0.25\, t^2$$

Κατά το ίδιο χρονικό διάστημα t, η άκρη του τραπεζομάντιλου μετακινείται στη θέση,

$$x_{τρ} = (^1/_2)\, a_{τρ}\, t^2 = (0.5)\,(3.0\ m/s^2)\, t^2 = (1.5\ m/s^2)\, t^2 = 1.5\, t^2$$

Τη στιγμή που η κούπα φθάνει στην άκρη του τραπεζομάντιλου έχουμε

$$x_{κ,ολ} = x_{τρ} = 0.30 + x_κ$$

Μπορούμε τώρα να λύσουμε ως προς τη χρονική διάρκεια και να επιστρέψουμε για να υπολογίσουμε το $x_κ$.

$$x_{τρ} = 0.30 + x_κ$$

$$1.5\, t^2 = 0.30 + 0.25\, t^2$$

$$\mathbf{t = 0.49\ s}$$

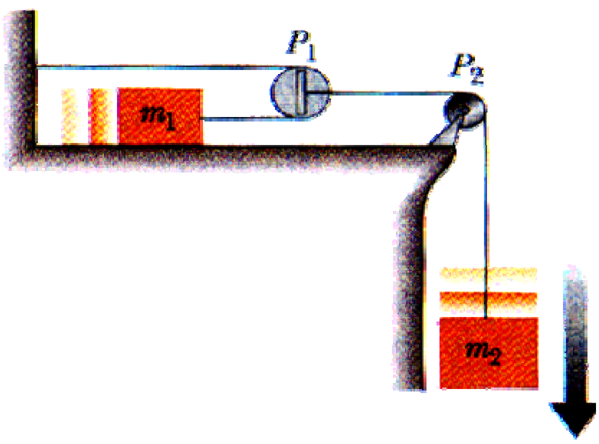
Συνεπώς,

$$x_κ = 0.25\, t^2 = 0.25\,(0.49)^2 = 0.06\ m$$

ή τελικώς $\mathbf{x_κ = 6\ cm}$.

ΘΕΜΑ 8:

Μια μάζα m_1 πάνω σε οριζόντιο τραπέζι χωρίς τριβές συνδέεται με τη μάζα m_2 μέσω της αβαρούς τροχαλίας P_1 και της στερεωμένης αβαρούς τροχαλίας P_2, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



(α) Εάν a_1 και a_2 είναι τα μέτρα των επιταχύνσεων των μαζών m_1 και m_2, αντιστοίχως, ποια είναι η σχέση μεταξύ των δύο αυτών μεγεθών;

(β) Εκφράστε τις επιταχύνσεις a_1 και a_2 σαν συνάρτηση των m_1, m_2, και g και προσδιορίστε την έκφραση για την τάση του σχοινιού στα διάφορα τμήματά του.

ΛΥΣΗ:

(α) Ας παρακολουθήσουμε την τροχαλία P_1. 'Όταν μετακινηθεί κατά απόσταση x (π.χ. κατά 1 cm) η μάζα m_2 μετακινείται επίσης κατά x (π.χ. 1 cm) αλλά η μάζα m_1 μετακινείται κατά διπλάσια απόσταση 2x (π.χ. 2 cm). Συνεπώς η απόσταση που κινείται η m_1 είναι διπλάσια της απόστασης που κινείται η m_2, ή

$$x_1 = 2\,x_2$$

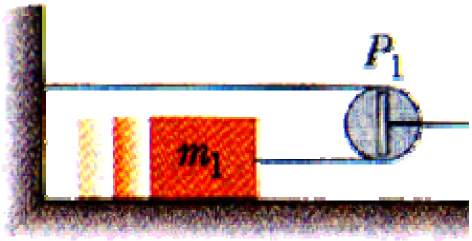
Συνεπώς η ταχύτητα της m_1 πρέπει να είναι διπλάσια της ταχύτητας της m_2,

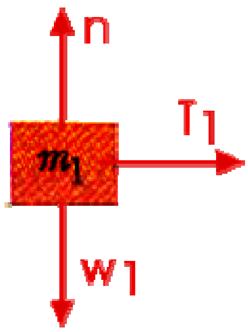
$$v_1 = 2\,v_2$$

και η επιτάχυνση της m_1 πρέπει να είναι διπλάσια της επιτάχυνσης της m_2,

$$a_1 = 2\,a_2$$

(β) Σχεδιάζουμε ευκρινή διαγράμματα ελευθέρου σώματος για κάθε μια από τις μάζες και την τροχαλία P_1.





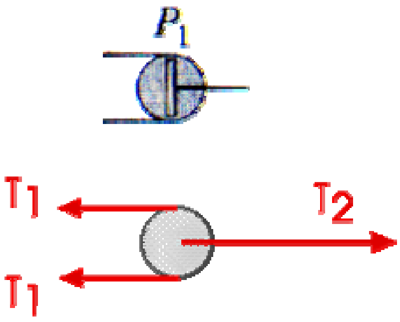
Από τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη μάζα m_1, προκύπτει

$$T_1 = m_1\,a_1$$

και

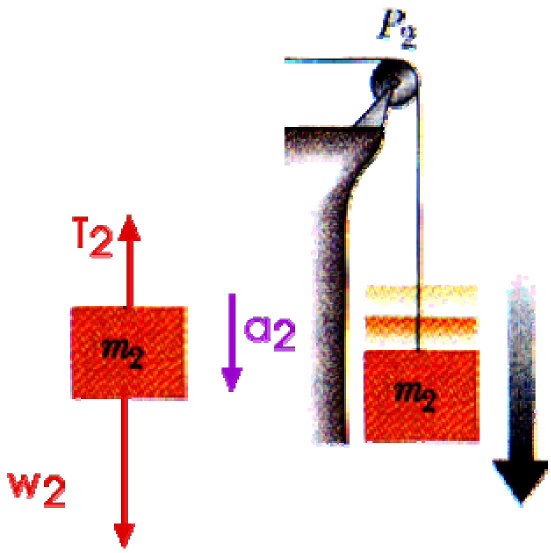
$$n = w_1 = m_1\,g$$

Από τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στην τροχαλία P_1 προκύπτει ότι



$$2\ T_1 = T_2$$

Αφού η μάζα m_2 επιταχύνεται προς τα κάτω ας θεωρήσουμε αυτή την διεύθυνση ως θετική. Από τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη μάζα m_2 προκύπτει ότι



$$\Sigma F = w_2 - T_2 = m_2\ a_2$$

$$m_2\ g - T_2 = m_2\ a_2$$

$$T_2 = m_2\ g - m_2\ a_2 = m_2\ (g - a_2)$$

$$2\ T_1 = m_2\ (g - a_2)$$

$$2\ m_1\ a_1 = m_2\ (g - a_2)$$

$$2\ m_1\ (2\ a_2) = m_2\ (g - a_2)$$

$$4\ m_1\ a_2 = m_2\ g - m_2\ a_2$$

ή τελικώς $\mathbf{a_2 = (m_2\ /\ (4\ m_1 + m_2))\ g}$. Γνωρίζουμε ήδη ότι $a_1 = 2a_2$. Συνεπώς προκύπτει ότι $\mathbf{a_1 = 2(m_2\ /\ (4\ m_1 + m_2))\ g}$.

Συνεχίζουμε με τον προσδιορισμό εκφράσεων για τις τάσεις στα διάφορα τμήματα του σχοινιού.

$$T_1 = m_1 \, a_1$$

$$\mathbf{T_1 = 2(m_2 / (4\, m_1 + m_2))\, m_1\, g}$$

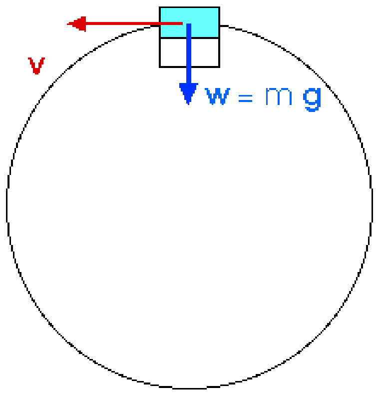
και

$$T_2 = 2\, T_1$$

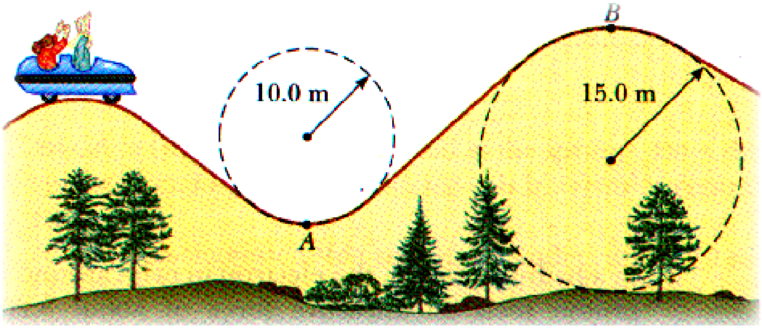
$$\mathbf{T_2 = 4(m_2 / (4\, m_1 + m_2))\, m_1\, g}$$

ΘΕΜΑ 9:

Α. Ένας κάδος νερού περιστρέφεται σ' ένα κατακόρυφο κύκλο ακτίνας 1.0 m. Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη ταχύτητα του κάδου στην κορυφή του κύκλου ώστε να μη χυθεί το νερό έξω;



Β. Ένα βαγονέτο που κινείται πάνω σε σιδηροτροχιά έχει μάζα m=500kg όταν είναι πλήρως φορτωμένο με επιβάτες.
α) Εάν το όχημα έχει ταχύτητα v=20m/sec στο σημείο Α (δες το σχήμα που ακολουθεί), ποια είναι η δύναμη που ασκείται από τη σιδηροτροχιά πάνω στο όχημα σε αυτό το σημείο;
β) Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει στο σημείο Β (δες το σχήμα που ακολουθεί) και να παραμένει ακόμη πάνω στη σιδηροτροχιά;



Γ. **Ένα σωμάτιο κινείται κατά μήκος της τροχιάς $y = x^2$ έτσι ώστε $x = 2t$. Υπολογίστε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ σαν συνάρτηση του χρόνου. Βρείτε επίσης την κεντρομόλο και την επιτρόχιο επιτάχυνση.**

ΛΥΣΗ:

Α. Στην κορυφή του κύκλου του σχήματος λόγω της βαρύτητας το νερό έλκεται προς τα κάτω (προς το κέντρο του κύκλου), με μια δύναμη w= m g (όπου w το βάρος του νερού). Εάν το νερό είναι ακριβώς στο όριο του να χυθεί έξω, η μόνη δύναμη πάνω στο νερό που θα το συγκρατεί είναι η φυγόκεντρη δύναμη F_φ (στο κινούμενο σύστημα αναφοράς του κάδου) που πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με την w δηλαδή.

$$F_\varphi = m\, v^2/r = w = m\, g$$

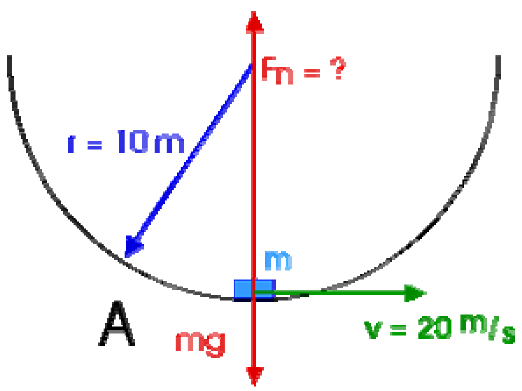
$$m\, v^2/r = m\, g$$

$$v^2 = g\, r = (9.8\ m/s^2)(1.0\ m)$$

$$\mathbf{v = 3.13\ m/s}$$

Β.

(α)



Οι δυνάμεις που εξασκούνται στη μάζα m (στο βαγονέτο) είναι το βάρος mg με φορά προς τα κάτω και η δύναμη Fn που ασκεί η σιδηροτροχιά με φορά προς τα επάνω. Έτσι η ολική δύναμη $F_{ολ}$ είναι:

$$F_{ολ} = F_n - m\, g$$

Αυτή όμως η δύναμη πρέπει να ισούται με την κεντρομόλο δύναμη $F_{c.} = m\, v^2 / r$.

Επομένως,

$$F_{ολ} = F_c$$

$$F_n - m\,g = m\,v^2 / r$$

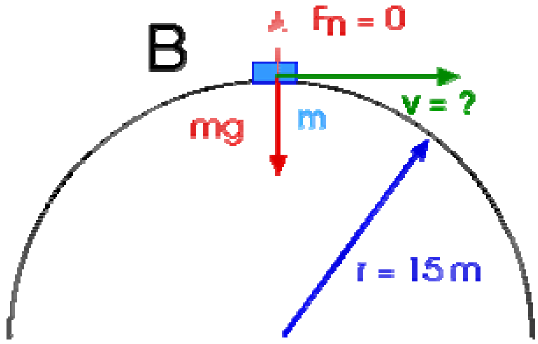
$$F_n = (m\,v^2 / r) + m\,g$$

$$F_n = m\,[(v^2 / r) + g\,] = (500\text{ kg})\,[(\,(20\text{ m/s})^2 / 10\text{ m}) + 9.8\text{ m/s}^2\,]$$

$$\mathbf{F_n = 24{,}900\ N}$$

Δηλαδή η δύναμη αυτή είναι περίπου πενταπλάσια του βάρους του (5,000 N).

β) Το «να παραμένει ακόμη πάνω στη σιδηροτροχιά» σημαίνει ότι η δύναμη F_n έχει γίνει μηδέν, δηλ. $F_n = 0$



Με τη δύναμη F_n ίση με το μηδέν, υπάρχει μόνο το βάρος mg που ισούται με την κεντρομόλο δύναμη F_c.

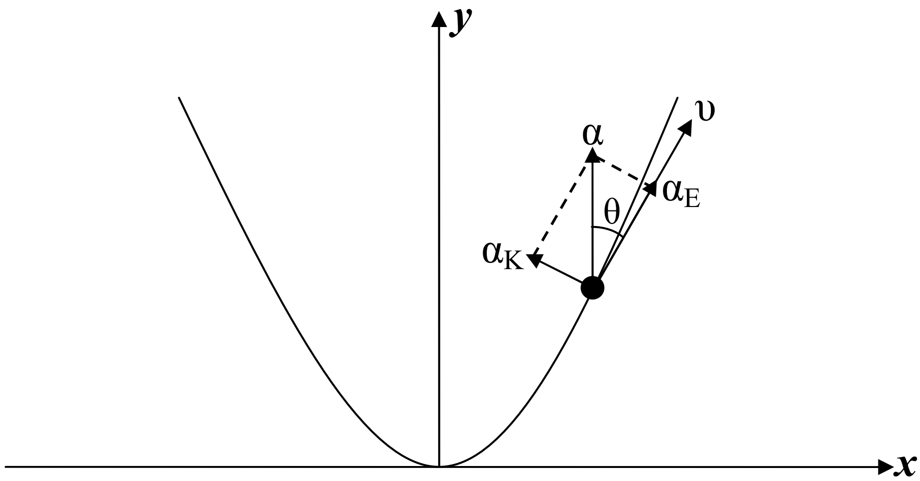
$$F_c = F_{ολ}$$

$$m\,v^2 / r = m\,g$$

$$v^2 = g\,r = (9.8\text{ m / s}^2\,)\,(15\text{ m}) = 147\text{ m}^2 / \text{s}^2$$

$$\mathbf{v = 12.12\ m/s}$$

Γ.



Έχουμε ότι $x=2t$ και $y=x^2=4t^2$. Επομένως $\upsilon_x=\dfrac{dx}{dt}=2$ και $\upsilon_y=\dfrac{dy}{dt}=8t$.

Άρα $\vec{\upsilon}=2\,\vec{i}+8t\,\vec{j}$ και $\vec{\alpha}=\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=8\vec{j}$.

Όπως φαίνεται στο σχήμα η ολική επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ αναλύεται στην επιτρόχιο $\left|\vec{\alpha}_E\right|=\left|\vec{\alpha}\right|\cos\theta=8\cos\theta$ και στην κεντρομόλο $\left|\vec{\alpha}_K\right|=\left|\vec{\alpha}\right|\sin\theta=8\sin\theta$. Η γωνία θ υπολογίζεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\upsilon}=\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\upsilon}\right|\cos\theta\Rightarrow 8\vec{j}\cdot\left(2\vec{i}+8t\,\vec{j}\right)=8\sqrt{4+64t^2}\cos\theta\Rightarrow 64t=16\sqrt{1+16t^2}\cos\theta\Rightarrow$$

$$\cos\theta=\frac{64t}{16\sqrt{1+16t^2}}=\frac{4t}{\sqrt{1+16t^2}}$$

ΘΕΜΑ 10:

Α. Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σωματίδιο μάζα m δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t από την $\vec{F}=a\cos\omega\;t\hat{i}+b\sin\omega\;t\hat{j}$. Αν το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά στην αρχή των αξόνων και ηρεμεί, βρείτε (α) τη θέση του και (β) την ταχύτητά του για οποιαδήποτε άλλη στιγμή.

Β. Σημείο κινείται επάνω σε κύκλο σύμφωνα με το νόμο $s=t^3+2t^2$, όπου s το μήκος της διαδρομής του σημείου επάνω στην περιφέρεια του κύκλου. Εάν το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης του σημείου για t = 2 είναι $\left|\vec{\alpha}_{ολ}\right|=16\sqrt{2}$ να υπολογισθεί η ακτίνα του κύκλου.

ΛΥΣΗ:

Α.

(β)

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα είναι $\vec{F}=m\dfrac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{a}{m}\cos\omega\;t\hat{i}+\dfrac{b}{m}\sin\omega\;t\hat{j}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^v d\vec{v} = \int_0^t \left(\frac{a}{m}\cos\omega\, t\hat{i} + \frac{b}{m}\sin\omega\, t\hat{j} \right) dt \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{a}{m\omega}\sin\omega\, t\hat{i} - \frac{b}{m\omega}\cos\omega\, t\hat{j} \right)\Bigg|_0^t$$

προκύπτει τελικά $\vec{v} = \frac{a}{m\omega}\sin\omega\, t\hat{i} + \frac{b}{m\omega}\left(1-\cos\omega\, t\right)\hat{j}$.

(α)

Είναι $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \int_0^r d\vec{r} = \int_0^t \left[\frac{a}{m\omega}\sin\omega\, t\hat{i} + \frac{b}{m\omega}\left(1-\cos\omega\, t\right)\hat{j} \right] dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \left[-\frac{a}{m\omega^2}\cos\omega\, t\hat{i} + \frac{b}{m\omega^2}\left(\omega t - \sin\omega\, t\right)\hat{j} \right]\Bigg|_0^t$ και επειδή $\vec{r}_0 = 0$ προκύπτει

τελικά $\vec{r} = \frac{a}{m\omega^2}\left(1-\cos\omega\, t\right)\hat{i} + \frac{b}{m\omega^2}\left(\omega t - \sin\omega\, t\right)\hat{j}$.

B.

Η ταχύτητα περιστροφής του σημείου είναι $\upsilon = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t$ και επομένως το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση $\left|\vec{\alpha}_E\right| = \frac{d\upsilon}{dt} = 6t + 4$

Ισχύει όμως ότι $\left|\vec{\alpha}_{o\lambda}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}_{\mathrm{E}}\right|^2 + \left|\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}_{o\lambda}\right|^2 - \left|\vec{\alpha}_{\mathrm{E}}\right|^2$ όπου $\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}$ η κεντρομόλος επιτάχυνση.

Άρα για t = 2 έχουμε

$$\left|\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}\right|^2 = \left(16\sqrt{2}\right)^2 - \left(6\cdot 2 + 4\right)^2 = 512 - 256 = 256 \Rightarrow \left|\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}\right| = 16$$

Επομένως από τη σχέση $\left|\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}\right| = \frac{\upsilon^2}{R}$ προκύπτει ότι

$$R = \frac{\upsilon^2}{\left|\vec{\alpha}_{\mathrm{K}}\right|} = \frac{\left(3\cdot 2^2 + 4\cdot 2\right)^2}{16} = \frac{20^2}{16} = \frac{400}{16} = 25$$