1^{η} Εργασία

Ημερομηνία αποστολής: 19 Νοεμβρίου 2006

1. α. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ και $\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

   β. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι ορθογώνια και μοναδιαία.

   $\vec{a} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})/3$

   $\vec{b} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})/3$

   $\vec{c} = (2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})/3$

   γ. Δείξτε ότι αν το άθροισμα και η διαφορά δύο μη μηδενικών διανυσμάτων έχουν το ίδιο μέτρο τότε τα διανύσματα είναι κάθετα και αντιστρόφως.

   (5 μοναδες)

Λύση

α.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|.|b|}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 12 - 6 - 2 = 4$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = 7$$

$$\cos\theta = \frac{4}{21} \Rightarrow \theta = 79.02^o$$

β.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = 2 + 2 - 4 = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 4 - 2 - 2 = 0$$

άρα είναι ορθογώνια και

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{3} = 1$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = 1$$

άρα είναι μοναδιαία.

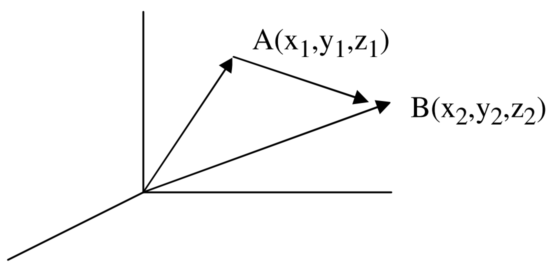
γ.

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta} = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

$$\Rightarrow 4ab\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \left|\vec{a}\pm\vec{b}\right| = \sqrt{a^2+b^2\pm 2\vec{a}\cdot\vec{b}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

2. α. Να υπολογιστεί το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και οι γωνίες του με τους άξονες x,y,z.



β. Αποδείξατε ότι το εμβαδόν ενός παραλληλόγραμμου με πλευρές $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι

$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$.

γ. Βρείτε την απόσταση μεταξύ του σημείου P(4,-1,5) και της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία P_1(-1,2,0) και P_2(1,1,4). **(5 μοναδες)**

Λύση

α.

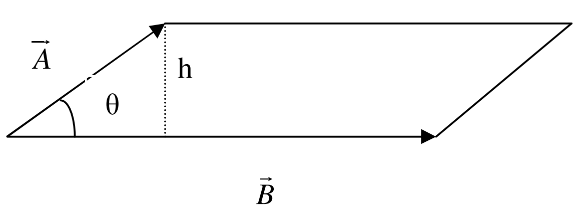
$$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{i} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\theta_1, \cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{i}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{x_2-x_1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{y_2-y_1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}, \cos\theta_3 = \frac{z_2-z_1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

β.



$$E = h \cdot |\vec{B}| = |\vec{A}| \sin\theta |\vec{B}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

γ. Έστω Ε το εμβαδόν του παραλληλογράμου που ορίζεται από τα διανύσματα $\overrightarrow{P_1P}$ και $\overrightarrow{P_1P_2}$. Τότε θα ισχύει

$$\left.\begin{aligned} |\overrightarrow{P_1P} \times \overrightarrow{P_1P_2}| &= E \\ |\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot h &= E \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = \frac{|\overrightarrow{P_1P} \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{P_1P} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (5\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) \times (2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}) = -7\vec{i} - 10\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\overrightarrow{P_1P} \times \overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{49+100+1} = \sqrt{150}$$

$$h = \sqrt{\frac{150}{21}} = \sqrt{\frac{50}{7}} = 2.673$$

3. α. Να βρεθεί απόσταση του σημείου P_1 (1, 2, 3) από (α) την αρχή των αξόνων, (β) τον άξονα x, (γ) τον άξονα z, (δ) το επίπεδο xy, (ε) από το σημείο P_2 (3, -1,5).

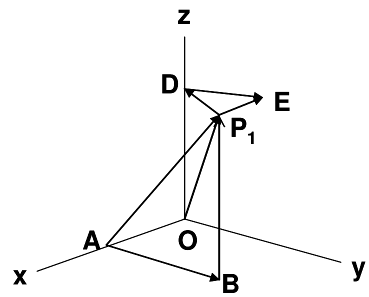
   β. Να βρεθεί ο όγκος παραλληλεπίπεδου με πλευρές ΟΑ, ΟΒ, ΟC όταν A (1,2,3), B (1,1,2), C (2,1,1). **(5 μοναδες)**

Λύση

α.

(α) $\vec{r} = \overrightarrow{OP_1} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\left|\vec{r}\right| = \sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2)} = \sqrt{14}$

(β) $\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP_1} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\left|\overrightarrow{AP_1}\right| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$



(γ) $\overrightarrow{DP1} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EP1} = 2\vec{j} + \vec{i}$, $\left|\overrightarrow{DP1}\right| = \sqrt{5}$

(δ) $\overrightarrow{BP1} = 3\vec{k}$, $\left|\overrightarrow{BP1}\right| = 3$

(ε) $\overrightarrow{P1\,P2} = (3\text{-}1)\vec{i} + (\text{-}1\text{-}2)\vec{j} + (5\text{-}3)\vec{k} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$\left|\overrightarrow{P1\,P2}\right| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$

β.

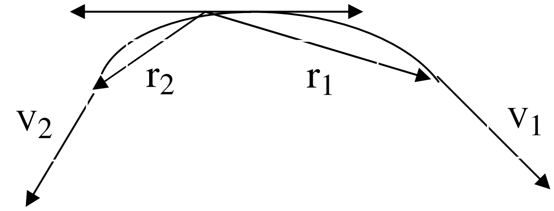
$$\vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-2) + 2(4-1) + 3(1-2) = 2$$

4. α. Δύο σωματίδια κινούνται στο πεδίο βαρύτητας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα σωματίδια είχαν ταχύτητες $\vec{V}_{01} = V_{01}\vec{i}$ και $\vec{V}_{02} = -V_{02}\vec{i}$, $V_{01} > 0$ και $V_{02} > 0$ (οριζόντιες και αντίρροπες).
Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων τη στιγμή που τα διανύσματα των ταχυτήτων τους θα είναι κάθετα. Δίνεται το διάνυσμα θέσης κάθε σωματιδίου σαν συνάρτηση του χρόνου $\vec{r} = V_0\, t\, \vec{i} - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \vec{j}$ και το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{V} = V_0\, \vec{i} - gt\, \vec{j}$.

β. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = p(1,1)$ (όπου p πραγματικός). Βρείτε το p ώστε το διάνυσμα $\vec{a}$ να είναι μοναδιαίο καθώς και ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\beta}$ κάθετο στο $\vec{a}$. Κατόπιν αναλύστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (1,0)$ σε συνιστώσες παράλληλες στα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ βρείτε δηλ. τα λ και μ έτσι ώστε $\vec{\gamma} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta}$. **(10 μοναδες)**

Λύση

A.



$\vec{V}_1 = V_{01}\ \vec{i}$ - gt $\vec{j}$, $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$, $-V_{01}V_{02} + g^2t^2 = 0$, $t = \dfrac{(\sqrt{V_{01}V_{02}})}{g}$

$\vec{V}_2 = -\ V_{02}\vec{i}$ - gt $\vec{j}$

$\vec{r}_1 = V_{01}\ t\ \vec{i} - 1/2\ gt^2\vec{j}$

$\vec{r}_2 = -\ V_{02}\ \ t\ \vec{i} - 1/2\ gt^2\vec{j}$,

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\ V_{01} + V_{02}\ )\ t\ \vec{i} = \ (V_{01}\ + V_{02})\ \ \dfrac{\sqrt{(V_{01}\ V_{02})}}{g}\ \ \vec{i}$

β.

Έχουμε $\vec{a}\cdot\vec{a} = 1 \Rightarrow p^2\left(1+1\right) = 1 \Rightarrow p = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Για $p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ έχουμε:

Έστω $\vec{\beta} = \left(x, y\right)$. Τότε

$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = 0 \Rightarrow x = -y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή $x^2 + y^2 = 1 = \left|\vec{\beta}\right|$)

Τώρα έχουμε

$\vec{\gamma} = \left(1, 0\right) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta}$

$\lambda = \vec{\gamma}\cdot\vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\mu = \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Για $p = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ έχουμε:

Έστω $\vec{\beta} = \left(x, y\right)$. Τότε

$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = 0 \Rightarrow x = -y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή $x^2 + y^2 = 1 = \left|\vec{\beta}\right|$)

Τώρα έχουμε

$$\vec{\gamma} = (1,0) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta}$$

$$\lambda = \vec{\gamma}\cdot\vec{a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mu = \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

5. α. Έχουμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν τα γινόμενα AB, (AB)C, BC, A(BC)

β. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη βοήθεια πινάκων.

3x + y =5

4x – y =2

(10 μοναδες)

Λύση

α.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)\,C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A\,(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

β. Έχουμε,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3-4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Έτσι, $\quad A\,X = B$

$$X = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -7 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Οπότε, $\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x=1 \ \ y=2$

6. α. Να μελετήσετε το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

β. Δίνεται ο μη αντιστρέψιμος πίνακας $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Να βρεθούν όλοι οι πίνακες Β για τους οποίους έχει λύση το παρακάτω σύστημα:

$$A\,X = B, \text{ όπου } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(10 μοναδες)

Λύση

α. $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$

Άρα αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2$, τότε με τη μέθοδο Cramer έχουμε ότι

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\ \lambda&\lambda&1\\ \lambda^2&1&\lambda\end{vmatrix}}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}=\frac{-(\lambda-1)^2(\lambda+1)}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}=\frac{1}{\lambda+2},\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$$

Αν λ=1,τότε το σύστημα εκφυλίζεται στο
x+y+z=1
x+y+z=1
x+y+z=1

οπότε σε παραμετρική μορφή το σύνολο των λύσεων Σ είναι:
Σ={(ω,υ,φ)/ψ+υ+φ=1}={(1-υ-φ,υ,φ)}

Αν λ=-2,τότε το σύστημα γίνεται

-2x+y+z=1
x-2y+z=-2
x+y-2z=4

και δεν έχει λύση αφού

$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}$=0 ενώ και $\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&-2\\1&1&4\end{vmatrix}$=9≠0 και $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}$=3≠0

β.

Έστω, B = $\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}$. Ο επαυξημένος πίνακας C του συστήματος (1) είναι ο

$$C=\begin{bmatrix}1&1&2&\beta_1\\1&0&1&\beta_2\\2&1&3&\beta_3\end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε την απλούστερη γραμμοισοδύναμη μορφή του C.

$$C=\begin{bmatrix}1&1&2&\beta_1\\1&0&1&\beta_2\\2&1&3&\beta_3\end{bmatrix}\begin{array}{l}R1\\R2\\R3\end{array}\sim\begin{array}{r}\\R2-R1\\R3-2R1\end{array}\begin{bmatrix}1&1&2&\beta_1\\0&-1&-1&\beta_2-\beta_1\\0&-1&-1&\beta_3-2\beta_1\end{bmatrix}\begin{array}{l}R1\\R2a\\R3a\end{array}$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ -R2a \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta_1-\beta_2 \\ 0 & -1 & -1 & \beta_3-2\beta_1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R1 \\ R2b \\ R3a \end{array} \sim \begin{array}{r} R1-R2b \\ \\ R3a+R2b \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 1 & 1 & \beta_1-\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3-\beta_2-\beta_1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R1a \\ R2b \\ R3b \end{array}$$

Το σύστημα (1) είναι ισοδύναμο με το σύστημα:

$1x_1+0x_2+1x_3=\beta_2$
$0x_1+1x_2+1x_3=\beta_1-\beta_2$
$0x_1+0x_2+0x_3=\beta_3-\beta_2-\beta_1$

Δηλαδή:
$x_1+x_3= \beta_2$
$x_2+x_3= \beta_1-\beta_2$ (2)
$0 = \beta_3-\beta_2-\beta_1$

Είναι φανερό ότι το σύστημα (2) έχει λύση αν $\beta_3= \beta_1+\beta_2$, δηλαδή, αν ο πίνακας B είναι της μορφής

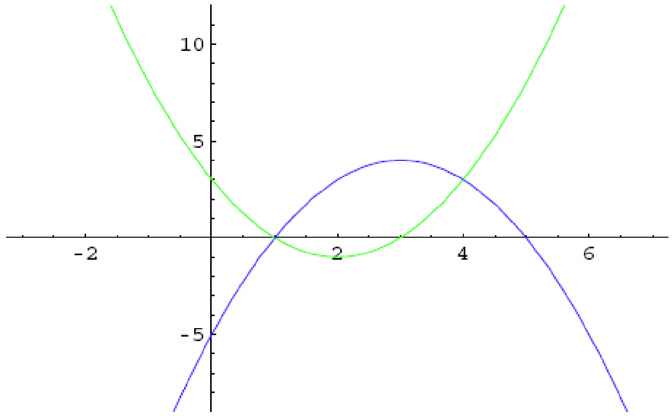
$$B=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_1+\beta_2 \end{bmatrix}$$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ g(x) = -x^2 + 6x - 5$ και $q(x) = \lambda x^2 - 2$.
   α. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)$ και $g(x)$ και να προσδιοριστούν γραφικά και αριθμητικά τα σημεία τομής τους.
   β. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < g(x)$ και να σκιαγραφηθεί στο διάγραμμά σας το διάστημα που την επαληθεύει
   γ. Παραστήστε γραφικά την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ και εξηγήστε πως παίρνουμε γραφικά την λύση της παραπάνω ανίσωσης.
   δ. Για ποιες τιμές του λ οι $f(x)$ και $q(x)$ εφάπτονται;
   (15 μοναδες)

Λύση
α.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 6x - 5 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad ή \quad x = 4\,. \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων δίνεται στο Σχήμα 1. Τα σημεία τομής των δύο καμπυλών δίνουν την λύση της εξίσωσης.

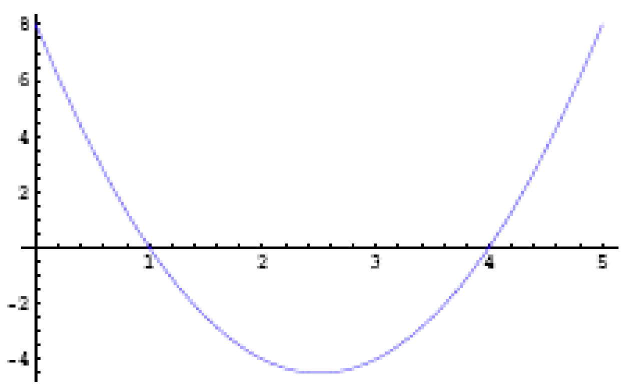


Σχήμα 1: Γραφική παράσταση των $f(x), g(x)$

β.

$$\begin{aligned} f(x) < g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < -x^2 + 6x - 5 \\ &\Leftrightarrow -2x^2 + 10x - 8 > 0 \\ &\Leftrightarrow -2(x-1)(x-4) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) < 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (1,4)\,. \end{aligned}$$

γ. Η γραφική παράσταση της $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 10x + 8$ δίνεται στο σχήμα 2. Η λύση της ανίσωσης $f(x) < g(x)$ δίνεται από το διάστημα εκείνο που η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον άξονα των x δηλ. το διάστημα $(1,4)$.



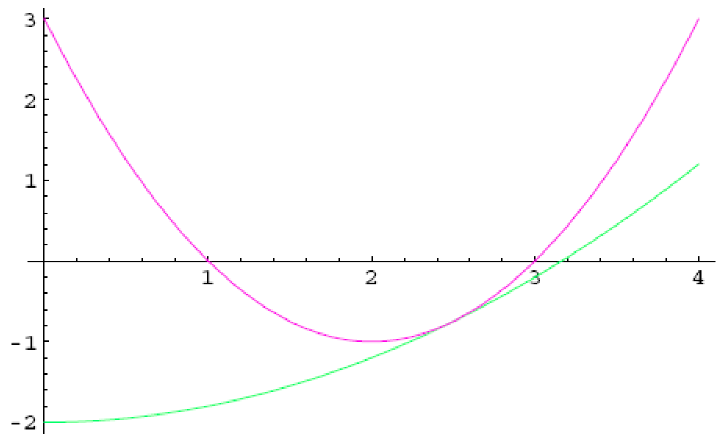
Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της $h(x) = f(x) - g(x)$. Η λύση της ανίσωσης $f(x) < g(x)$ δίνεται από το διάστημα εκείνο που η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον άξονα των x δηλ. το διάστημα $(1,4)$.

δ.

$$\begin{aligned} f(x) = q(x) &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = \lambda x^2 - 2 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)x^2 + 4x - 5 = 0 \end{aligned}$$

Έχουμε $\Delta = 16 - 4(\lambda - 1)(-5) = 4(5\lambda - 1)$ οπότε έχουμε μια λύση όταν

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/5$. Στην περίπτωση αυτή το σημείο επαφής των δύο συναρτήσεων φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της $f(x)$ και $q(x)$ όταν $\lambda = 1/5$. Φαίνεται το σημείο επαφής των δύο συναρτήσεων.

Παρατήρηση: Η απόδειξη (δεν ζητείται στην παρούσα εργασία αλλά θα πρέπει να το ξέρετε στο τέλος του χρόνου) ότι οι γραφικές παραστάσεις εφάπτονται και δεν τέμνονται είναι ως εξής: Το σημείο επαφής των δύο συναρτήσεων είναι το σημείο που μηδενίζεται η συνάρτηση $Q(x) = f(x) - q(x)$. Όταν το σημείο αυτό είναι μοναδικό σημαίνει πως η $Q(x)$ έχει μια και μόνη ρίζα x_0. Για το τριώνυμο αυτό γίνεται μόνο όταν το σημείο αυτό είναι το ολικό ακρότατο της $Q(x)$ δηλ $Q'(x_0) = 0 \Rightarrow (f(x) - q(x))'_{x=x_0} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = q'(x_0)$. Άρα αφού οι παράγωγοι στο x_0 είναι ίσες στο σημείο επαφής, τότε θα ταυτίζονται και οι εφαπτόμενες ευθείες στο σημείο αυτό, άρα οι δύο καμπύλες εφάπτονται.

8. α. Έστω $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{U}$ 5×5 τετραγωνικοί πίνακες πραγματικών αριθμών όπου $\det \mathbf{A} = -2$, $\det \mathbf{B^4} = 0$, οι $\mathbf{P}$ $\mathbf{U}$ είναι αντιστρέψιμοι και $\mathbf{UU^T} = \mathbf{1}$ Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος και εξηγείστε γιατί

   i. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$
   ii. $\det \mathbf{A^2B^2} = \det \mathbf{ABBA}$
   iii. $\det \mathbf{PAP^{-1}} = \det \mathbf{A}$
   iv. Ο $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμος.
   v. $\det \mathbf{PBP^{-1}} = 0$
   vi. $\det \mathbf{U} = -1$
   vii. $\det \mathbf{PUP^{-1}U^T} = 1$
   viii. $\det 3\mathbf{UAU^T} = -6$
   ix. $\det 3\mathbf{A^4} = 3888$

   β. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det\mathbf{A} + \det\mathbf{B}$ αν και μόνον αν $a+d=0$.

γ. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι $\det\mathbf{A} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

δ. Μαθηματικός απέδειξε το θεώρημα: Έστω τετραγωνικοί πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ τέτοιοι ώστε $\mathbf{AB}+\mathbf{BA} = 0$. Αυτό είναι δυνατόν μόνο αν ένας από τους $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ δεν είναι αναστρέψιμος. Η απόδειξη που παρουσίασε ήταν η εξής: Από την υπόθεση έχουμε $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$. Παίρνοντας την ορίζουσα σε κάθε μέλος της εξίσωσης έχουμε $\det\mathbf{A}\det\mathbf{B} = -\det\mathbf{B}\det\mathbf{A}$. Άρα $\det\mathbf{A} = 0$ ή $\det\mathbf{B} = 0$ οπότε ένας από τους δύο πίνακες δεν είναι αναστρέψιμος. Δείξτε ότι για τους πίνακες

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

το θεώρημα δεν ισχύει. Εξηγείστε γιατί η απόδειξη είναι εσφαλμένη. **(15 μοναδες)**

Λύση

α.

i. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$: **Λάθος**. Δύο τετραγωνικοί πίνακες δεν μετατίθενται αναγκαστικά.

ii.

$\det\mathbf{A^2B^2} = \det\mathbf{ABBA}$: **Σωστό**

$\det\mathbf{A^2B^2} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}\det\mathbf{B}\det\mathbf{A} =$
$\det\mathbf{ABBA}$

iii.

$\det\mathbf{PAP^{-1}} = \det\mathbf{A}$: **Σωστό**

$\det\mathbf{PAP^{-1}} = \det\mathbf{P}\det\mathbf{A}\det\mathbf{P}^{-1} = \det\mathbf{P}\det\mathbf{A}(1/\det\mathbf{P^{-1}}) =$
$\det\mathbf{A}$

iv.

Ο $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμος.: **Λάθος**

$\det\mathbf{B^4} = (\det\mathbf{B})^4 = 0 \Rightarrow \det\mathbf{B} = 0$

v.

$\det\mathbf{PBP^{-1}} = 0$: **Σωστό**

$\det\mathbf{PBP^{-1}} = \det\mathbf{P}\det\mathbf{B}\det\mathbf{P}^{-1} = \det\mathbf{P}\det\mathbf{B}(1/\det\mathbf{P^{-1}}) =$
$\det\mathbf{B} = 0$

vi.

$\det\mathbf{U} = -1$: **Λάθος**

Επειδή $\det\mathbf{U} = \det\mathbf{U^T}$ έχουμε $\mathbf{UU^T} = \mathbf{I} \Rightarrow \det\mathbf{UU^T} =$
$\det\mathbf{I} = 1 \Rightarrow \det\mathbf{UU^T} = \det\mathbf{U}\det\mathbf{U^T} = \det\mathbf{U}\det\mathbf{U} =$
$\det\mathbf{U}^2 = 1 \Rightarrow \det\mathbf{U} = \pm 1$

vii

$\det\mathbf{PUP^{-1}U^T} = 1$: **Σωστό**

$\det\mathbf{PUP^{-1}U^T} = \det\mathbf{P}\det\mathbf{U}\det\mathbf{P^{-1}}\det\mathbf{U^T} = \det\mathbf{P}\det\mathbf{U}(1/\det\mathbf{P})\det\mathbf{U} =$
$\det\mathbf{U}\det\mathbf{U} = \det\mathbf{U}^2 = 1$

viii

$\det 3\mathbf{UAU^T} = -6$: **Λάθος**

$\det 3\mathbf{UAU^T} = \det 3\mathbf{I}\det\mathbf{U}\det\mathbf{A}\det\mathbf{U^T} = (3^5)(\det\mathbf{U})^2\det\mathbf{A} =$
$(243)\,(1)\,(-2) = -486.$

ix

$\det 3\mathbf{A}^4 = 3888$: **Σωστό**
$\det 3\mathbf{A}^4 = (\det 3\,\mathbf{I})(\det \mathbf{A})^4 = (3^5)\,(-2)^4 = 3888$

β. Έχουμε

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det\begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix} = (1+a)(1+d) - cb =$$

$$1 + ad - cb + (a+d)$$

Παρομοίως έχουμε

$$\det\mathbf{A} + \det\mathbf{B} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$1 + (ad - cb).$$

Τα δεξιά μέλη των παραπάνω εξισώσεων είναι ίσα αν και μόνο αν $a + d = 0$.

γ. Εφαρμόζοντας ιδιότητες οριζουσών έχουμε

$$\det\mathbf{A} = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 0 & c-b & c^2-b^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-b & c^2-b^2 \end{pmatrix}$$

Για την απαλοιφή του στοιχείου $(3,2)$ από την ορίζουσα πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή με $(b-c)/(b-a)$ και την προσθέτουμε στην τρίτη:

$$\begin{aligned}
\det\mathbf{A} &= \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & (c-b)+(b-a)\frac{(b-c)}{(b-a)} & (c^2-b^2)+(b^2-a^2)\frac{(b-c)}{(b-a)} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & (c-b)+(b-c) & (c-b)(c+b)+(b-a)(b+a)\frac{(b-c)}{(b-a)} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-b)(c+b)-(c-b)(b+a) \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & (b-a) & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) \end{pmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(c-b)\,.
\end{aligned}$$

Το τελευταίο βήμα ήταν δυνατό διότι φέραμε τον πίνακα σε άνω τριγωνική μορφή.

δ. i. Πράγματι

$$\sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

οπότε $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 0$ Αλλά $\det\sigma_1 = \det\sigma_3 = -1 \neq 0$ οπότε βρήκαμε ένα αντιπαράδειγμα όπου το θεώρημα δεν ισχύει.

ii. Το λάθος βήμα στην απόδειξη είναι στην συνεπαγωγή $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA} \Rightarrow \det\mathbf{A}\det\mathbf{B} = -\det\mathbf{B}\det\mathbf{A}$. Η σωστή συνεπαγωγή (αν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι $N\times N$ πίνακες) είναι

$$\mathbf{AB} = -\mathbf{BA} \Rightarrow \det\mathbf{AB} = \det(-\mathbf{BA}) = (-1)^N\det(\mathbf{BA}) \Rightarrow$$
$$\det\mathbf{A}\det\mathbf{B} = (-1)^N\det\mathbf{B}\det\mathbf{A}.$$

Για $N=2$ και γενικότερα για κάθε άρτιο N η σχέση αυτή είναι ταυτότητα (αφού $(-1)^2=(-1)^{2k}=1$ για οποιοδήποτε ακέραιο k) και δεν συνεπάγεται $\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}=0$.

9. α. Να βρείτε τις τιμές των a,b,c ώστε η γραφική παράσταση της $f(x)=ax^2+bx+c$ να περνάει από τα σημεία $(1,1),\ (2,2),\ (0,3)$.

β. Δίνεται

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2&1&8\\4&-1&2\\1&3&-1\end{pmatrix},\ \mathrm{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix},\ \mathrm{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Να υπολογιστούν $\det\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$ και οι λύσεις του συστήματος $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

γ. Δίνεται

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&\lambda\\-2&\lambda&3\\2&-1&4\end{pmatrix},\ \mathrm{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

i. Να διερευνήσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ για πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

ii. Να υπολογιστούν οι λύσεις της **Ax=b**.

(15 μοναδες)

Λύση

α. Έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{rcl}f(1)&=&1\\f(2)&=&2\\f(0)&=&3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\quad\left.\begin{array}{rcl}a+b+c&=&1\\4a+2b+c&=&2\\c&=&3\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Άρα

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}=-2\qquad\Delta_a=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}=-3$$

$$\Delta_b=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\0&3&1\end{pmatrix}=7\qquad\Delta_c=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}=-6$$

Απ όπου προκύπτει ότι

$$a=\frac{\Delta_a}{\Delta}=\frac{(-3)}{(-2)}=\frac{3}{2}\quad b=\frac{\Delta_b}{\Delta}=\frac{7}{(-2)}=-\frac{7}{2}\quad c=\frac{\Delta_c}{\Delta}=\frac{(-6)}{(-2)}=3$$

β. Υπολογίζουμε ότι $\det \mathbf{A} = 120$ και ότι

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{13}{120} & \frac{7}{120} & -\frac{1}{60} \end{pmatrix}$$

και

$$\Delta = \det \mathbf{A} = 120 \qquad \Delta_x = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = -15$$

$$\Delta_y = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 162 \qquad \Delta_z = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = -9$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-15}{120} = -\frac{1}{8} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{162}{120} = \frac{27}{20} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-9}{120} = -\frac{3}{40}$$

Ή ισοδύναμα

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{13}{120} & \frac{7}{120} & -\frac{1}{60} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{27}{20} \\ -\frac{3}{40} \end{pmatrix}$$

γ. i.

$$\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \lambda_1 & = & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{137}) & = & -3.17617 \\ \lambda_2 & = & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{137}) & = & 2.67617 \end{array} \right.$$

Για $\lambda \neq \lambda_1$ και $\lambda \neq \lambda_2$ η λύση του ομογενούς συστήματος είναι τετριμμένη: $x = y = z = 0$. Για $\lambda = \lambda_1$ ή $\lambda = \lambda_2$ έχω $\det \mathbf{A} = 0$. Διερευνούμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{rcl} -2x + \lambda y & = & -3z \\ 2x - y & = & -4z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3z+4\lambda z}{2(\lambda-1)} \\ y & = & -\frac{7z}{\lambda-1} \end{array}$$

και αφού στις περιπτώσεις που εξετάζουμε $\lambda \neq 1$ έχουμε δύο οικογένειες λύσεων

$$\lambda = \lambda_1: \quad \begin{array}{rcl} x & = & -1.16191z \\ y & = & 1.67617z \end{array} \qquad \lambda = \lambda_2: \quad \begin{array}{rcl} x & = & -4.08809z \\ y & = & -4.17617z \end{array}$$

ii. Έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta &= \det \mathbf{A} = 2\lambda^2 + \lambda - 17 \\ \Delta_x &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = -\lambda^2 + 9\lambda - 1 \\ \Delta_y &= \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & \lambda \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -7\lambda + 35 \\ \Delta_z &= \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 \end{aligned}$$

Για $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \lambda_1$ και $\lambda \neq \lambda_2$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-\lambda^2+9\lambda-1}{2\lambda^2+\lambda-17} \\
y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7\lambda+35}{2\lambda^2+\lambda-17} \\
z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\lambda^2-6\lambda+5}{2\lambda^2+\lambda-17} = \frac{(\lambda-1)(\lambda-5)}{2\lambda^2+\lambda-17}
\end{aligned}$$

Για $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1$ ή $\lambda = \lambda_2$ παίρνουμε

A′. $\lambda = \lambda_1$

$$\begin{aligned}
\Delta_x &= -\frac{19}{8}(5+\sqrt{137}) = -39.674 \neq 0 \\
\Delta_y &= \frac{7}{4}(21+\sqrt{137}) = 57.233 \neq 0 \\
\Delta_z &= \frac{1}{8}(121+13\sqrt{137}) = 34.145 \neq 0
\end{aligned}$$

B′. $\lambda = \lambda_2$

$$\begin{aligned}
\Delta_x &= \frac{19}{8}(-5+\sqrt{137}) = 15.924 \neq 0 \\
\Delta_y &= -\frac{7}{4}(-21+\sqrt{137}) = 16.267 \neq 0 \\
\Delta_z &= \frac{1}{8}(121-13\sqrt{137}) = -3.895 \neq 0
\end{aligned}$$

και το σύστημα είναι αδύνατο.

10. α. Βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $-x^2+(\lambda-1)x+2\lambda^2=0$ έχει δύο άνισες ρίζες.

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\,x^n + b$. Να βρεθεί η τιμή των *α, b, n* ώστε $(f \circ f)(x) = x^9$.

γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{5x^2-12x-100\sqrt{-\lambda x^2}}{x^2-4\lambda x+3}$. Βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το πεδίο ορισμού της *f* είναι όλο το $\Re$. **(10 μοναδες)**

Λύση

α. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\lambda-1)^2 + 8\lambda^2 = 9\lambda^2 - 2\lambda + 1$ Η διακρίνουσα αυτή είναι ένα τριώνυμο, του οποίου το πρόσημο απαιτούμε να είναι θετικό.
Η διακρίνουσα του νέου τριωνύμου είναι $\Delta' = 4 - 36 < 0$.
Άρα $\Delta > 0$ για κάθε λ και επομένως υπάρχουν δύο άνισες ρίζες για κάθε τιμή του λ

β. Έχουμε $(f \circ f)(x) = a\left(a\,x^n + b\right)^n + b = x^9$ που επαληθεύεται για $a = 1$, $b = 0$ και $n = \pm 3$

γ. Θα πρέπει $x^2 - 4\lambda x + 3 \neq 0$ (παρονομαστής) και $\lambda \leq 0$ (υπόριζο θετικό).
Πρέπει λοιπόν η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι αρνητική δηλ.

$\Delta = 16\lambda^2 - 12 < 0 \Rightarrow \lambda^2 < \dfrac{12}{16} \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \lambda < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και επειδή θα πρέπει

$\lambda \leq 0$

έχουμε $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \lambda < 0$.