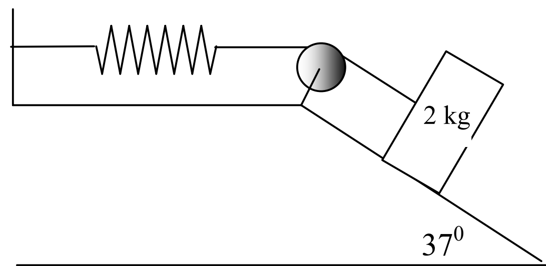
Ονοματεπώνυμο ______________________________

Τμήμα ______________________________

Θέμα 1

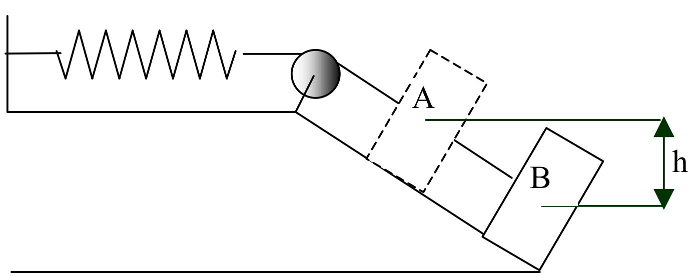
1ο Ερώτημα

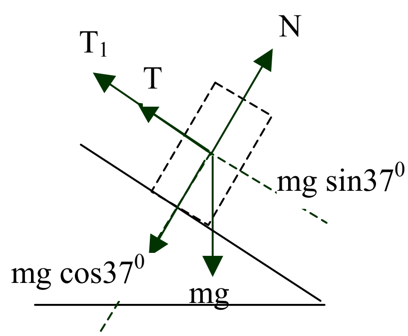


Ένα σώμα μάζας 2 kg τοποθετείται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο και συνδέεται μέσω του νήματος αβαρούς τροχαλίας με ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς k=100 N/m, όπως δείχνει το σχήμα. Το νήμα είναι αβαρές και η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές. Το σώμα αφήνεται από την ηρεμία όπου το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος και κινείται στο κεκλιμένο επίπεδο κατά 20 cm πριν μηδενιστεί η ταχύτητά του.

Βρείτε το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κεκλιμένου επιπέδου και σώματος.

(Απάντηση)





Θεωρούμε ως A την αρχική θέση του συστήματος και B την τελική θέση (όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος). Αν ονομάσουμε x το διάστημα που κινήθηκε το σώμα (x=0.2m) και h την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των θέσεων A και B, τότε από το θεώρημα έργου-ενέργειας έχουμε:

$$E^{B}_{M\eta\chi} - E^{A}_{M\eta\chi} = W^{T}_{A\to B} \Leftrightarrow mgh - \frac{1}{2}kx^2 = T\cdot x \ \textit{(1), όπου } h = x\sin 37^0 = 0.6x = 0.12m$$

Για να βρεθεί η δύναμη της τριβής φτιάχνουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος και έχουμε:

$$N = mg\cos 37^0 = 2kg\cdot 10ms^{-2}\cdot 0.8 = 16N \ \textit{οπότε} \ T = 16\cdot\mu \ \text{(N)}$$

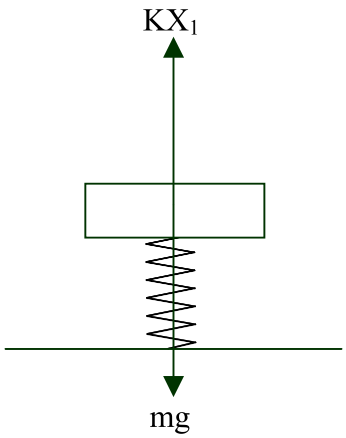
Από την εξίσωση (1) έχουμε

$$2kg\cdot 10ms^{-2}\cdot 0.12m - \frac{1}{2}100Nm^{-1}\cdot 4\cdot 10^{-2}m^2 = \mu\cdot 16N\cdot 0.2m \Leftrightarrow 2.4-2 = 3.2\mu \Leftrightarrow \mu = \frac{0.4}{3.2} = 0.125$$

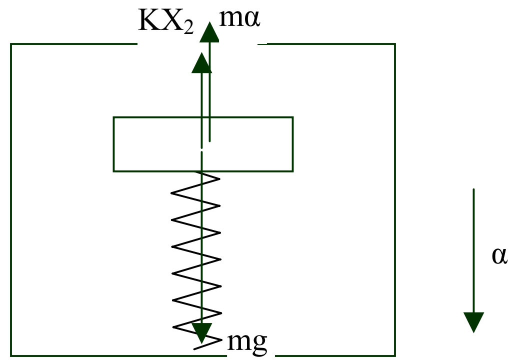
2ο Ερώτημα

Ένα σώμα ισορροπεί πάνω σε ένα αβαρές κατακόρυφο ελατήριο συμπιέζοντάς το κατά 5 cm. Στη συνέχεια το σύστημα ελατηρίου-σώματος τοποθετείται σε ένα ανελκυστήρα που επιταχύνεται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση. Το σώμα μετά από λίγο ισορροπεί και η συμπίεση του ελατηρίου είναι 2 cm. Βρείτε τη φορά και το μέτρο της επιτάχυνσης του ανελκυστήρα.

(Απάντηση)



Σχήμα Α



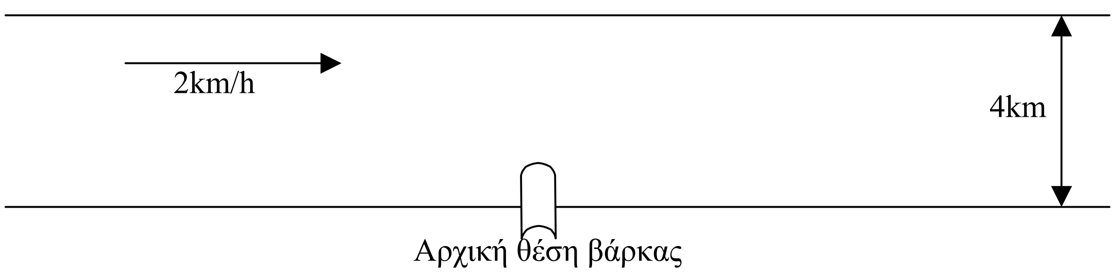
Σχήμα Β

Έστω ότι το σώμα έχει μάζα m και το ελατήριο σταθερά k.
Όταν το σύστημα βρίσκεται εκτός ανελκυστήρα, το διάγραμμα ελεύθερου σώματος δίνει (σχήμα Α) $mg = kX_1$ (1)
Αντίστοιχα στην περίπτωση του επιταχυνόμενου ανελκυστήρα και για παρατηρητή που βρίσκεται εντός του ανελκυστήρα (σχήμα Β) , θα έχουμε $mg = kX_2 + ma$ *(2), όπου. α η επιτάχυνση του ανελκυστήρα που θεωρήσαμε αυθαίρετα ότι έχει την ίδια φορά με την επιτάχυνση της βαρύτητας.*
Από τις (1) και (2) έχουμε $\frac{g}{g-a} = \frac{X_1}{X_2} \Leftrightarrow g - a = \frac{X_2}{X_1} g \Leftrightarrow a = g(1 - \frac{X_2}{X_1}) = \frac{3}{5} g = 6m/s^2$

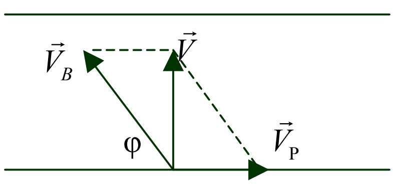
Θέμα 2

1ο Ερώτημα

Ένας βαρκάρης έχει μια βάρκα που μπορεί να αναπτύξει ταχύτητα 4km/h ως προς το νερό. Ο βαρκάρης θέλει να διασχίσει ένα ποτάμι πλάτους 4km το οποίο ρέει με ταχύτητα 2 km/h (βλ. σχήμα).
α) Προς ποια κατεύθυνση* πρέπει να οδηγήσει τη βάρκα ώστε να φτάσει ακριβώς στο απέναντι σημείο;
β) Πόσος χρόνος χρειάζεται για να φτάσει;
γ) Προς ποια κατεύθυνση* πρέπει να οδηγήσει τη βάρκα ώστε να φτάσει στην απέναντι όχθη στο λιγότερο δυνατό χρόνο;
(*) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας της βάρκας με την όχθη.



(Απάντηση)
Θεωρούμε έναν ακίνητο παρατηρητή που βρίσκεται στην όχθη.
α) Το διάνυσμα της ταχύτητας της βάρκας ως προς τον ακίνητο παρατηρητή, πρέπει να είναι κάθετο στην όχθη. Επομένως αν $\vec{V}_B$ *η ταχύτητα της βάρκας ως προς το νερό,* $\vec{V}_\mathrm{P}$ *η ταχύτητα του νερού ως προς τον ακίνητο παρατηρητή και* $\vec{V}$ *η ταχύτητα της βάρκας ως προς τον ακίνητο παρατηρητή, θα ισχύει:* $\vec{V} = \vec{V}_B + \vec{V}_\mathrm{P}$.
Έχουμε λοιπόν το παρακάτω σχήμα



όπου $V_\mathrm{B}\cos\phi = V_\mathrm{P} \Rightarrow \cos\phi = \frac{V_\mathrm{P}}{V_\mathrm{B}} = 0.5 \Rightarrow \phi = 60^0$

ενώ $V = V_B \sin 60^0 = 2\sqrt{3}\ km/h$

β) Ο χρόνος που χρειάζεται για να διασχίσει το ποτάμι πλάτους 4 km είναι $t = \frac{S}{V} = \frac{4km}{2\sqrt{3}kmh^{-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}h = 1.15\ \mathrm{h}$

γ) Στην γενική περίπτωση $t = \frac{S}{V} = \frac{S}{V_B \sin\phi}$ *(sinφ≠0) Για να είναι αυτός ο χρόνος ελάχιστος θα πρέπει*

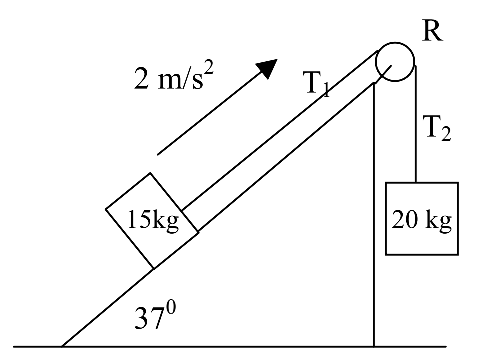
. $\frac{dt}{d\phi} = 0$ και $\frac{d^2t}{d\phi^2} > 0$. *Η πρώτη παράγωγος δίνει:*

$\frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{S}{V_B \sin^2\phi}\cos\phi = 0 \Rightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = 90^0$. *Για αυτήν τη τιμή του φ έχουμε ότι* $\left.\frac{d^2t}{d\phi^2}\right|_{\phi=90^0} > 0$

Επομένως το λιγότερο δυνατό χρόνο τον πετυχαίνει όταν η ταχύτητα της βάρκας ως προς την όχθη είναι 90^0

2^o Ερώτημα

Δύο σώματα συνδέονται με νήμα αμελητέας μάζας που περνά από μια τροχαλία ακτίνας 0.25 m και ροπής αδρανείας I. Το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο κινείται προς τα πάνω χωρίς τριβές και με σταθερή επιτάχυνση 2 m/s^2 (βλ σχήμα). α) Προσδιορίστε τις τάσεις T_1 και T_2 στα δύο τμήματα του νήματος, και β) βρείτε τη ροπή αδρανείας, I, της τροχαλίας.



(Απάντηση)

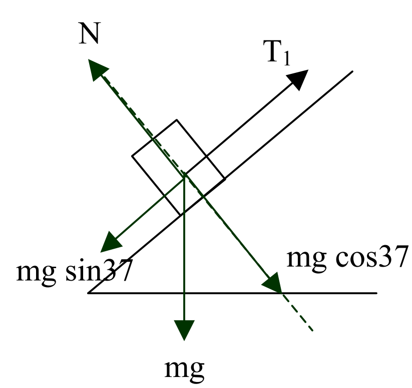
Φτιάχνουμε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για το σώμα μάζας 15 kg (βλ. σχήμα) και έχουμε:

$$\mathrm{T}_1 - mg\sin 37^0 = ma \Leftrightarrow \mathrm{T}_1 = 15kg\cdot 10ms^{-2}\cdot 0.6 + 15kg\cdot 2ms^{-2} = 120N$$

Αντίστοιχα για το σώμα μάζας 20 Kg έχουμε:

$$mg - \mathrm{T}_2 = ma \Leftrightarrow \mathrm{T}_2 = 20kg\cdot 10ms^{-2} - 20kg\cdot 2ms^{-2} = 160N$$

Η τροχαλία περιστρέφεται λόγω της ροπής των δυνάμεων T_1 και T_2. Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας είναι $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha}{R} = \frac{2}{0.25} = 8\ rad/s^2$.



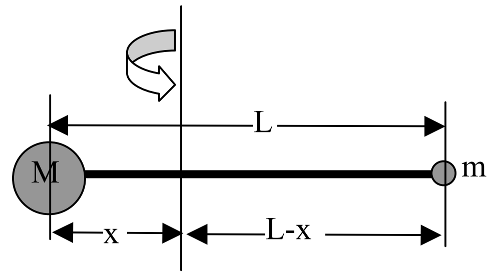
Επομένως

$$(T_2 - T_1)R = Ia_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow \mathrm{I} = \frac{(T_2 - T_1)R}{a_{\gamma\omega\nu}} = \frac{40kgms^{-2} \cdot 0.25m}{8s^{-2}} = 1.25 \text{ kg m}^2$$

Θέμα 3

1ο Ερώτημα

Δύο μάζες M και m συνδέονται με μια στερεά ράβδο μήκους L και αμελητέας μάζας, όπως στο σχήμα. Για έναν άξονα κάθετο στη ράβδο αποδείξτε ότι το σύστημα έχει την ελάχιστη ροπή αδρανείας όταν ο άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας. Αποδείξτε ότι η ελάχιστη ροπή αδρανείας είναι $I=\mu L^2$ όπου $\mu=mM/(m+M)$



(Απάντηση)

Στην γενική περίπτωση η ροπή αδρανείας είναι $I = Mx^2 + m(L-x)^2$ *Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο της ροπής αδρανείας ως προς x ίση με το μηδέν έχουμε:*

$$\frac{dI}{dx} = 0 \Rightarrow 2Mx - 2m(L-x) = 0 \Rightarrow 2x(M+m) = 2mL \Rightarrow x = \frac{m}{m+M}L$$ *που είναι η θέση του κέντρου μάζας.*

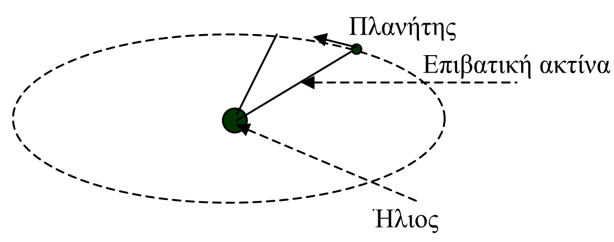
Μάλιστα η δεύτερη παράγωγος δίνει $\frac{d^2I}{dx^2} = 2M + 2m > 0$ *δηλαδή η τιμή που βρήκαμε δίνει το ελάχιστο της ροπής αδρανείας που γίνεται:*

$$I = M\left(\frac{m}{m+M}L\right)^2 + m(L - \frac{m}{m+M}L)^2 = \frac{m^2 \cdot M}{(m+M)^2}L^2 + mL^2(\frac{M}{m+M})^2 = \frac{m^2 \cdot M + m \cdot M^2}{(m+M)^2}L^2 =$$

$$\frac{m \cdot M(m+M)}{(m+M)^2}L^2 = \frac{m \cdot M}{m+M}L^2 = \mu L^2$$

2ο Ερώτημα

Ένας πλανήτης κινείται γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτική τροχιά όπως δείχνει το σχήμα. Υποθέστε ότι η βαρυτική έλξη είναι η μόνη δύναμη που ασκείται στο πλανήτη και ότι ο ήλιος είναι ακίνητος. Αποδείξτε το δεύτερο νόμο του Kepler που λέει ότι η επιβατική ακτίνα (αν θεωρηθεί ο ήλιος ως αρχή των συντεταγμένων) του πλανήτη σαρώνει ίσες επιφάνειες σε ίσα χρονικά διαστήματα (δηλαδή dS/dt = σταθερό, όπου dS η στοιχειώδης επιφάνεια που σαρώνεται σε χρόνο dt).



(Απάντηση)

Θεωρώντας τον ήλιο ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων η ροπή των δυνάμεων που ασκείται στον πλανήτη είναι $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ *όπου* $\vec{r}$ *το διάνυσμα θέσης του πλανήτη και* $\vec{F}$ *η βαρυτική έλξη. Όμως* $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ *γιατί τα* $\vec{r}$ *και* $\vec{F}$ *είναι συγγραμμικά.*

Επομένως η στροφορμή του πλανήτη παραμένει σταθερή. Δηλαδή $\vec{L}(t) = m\,\vec{r}(t)\times\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{t}) = m\,\mathrm{v}(\mathrm{t})\,r(t)\,\hat{\mathrm{k}} =$ *σταθερό (1)*

με $\hat{\mathrm{k}}$ *το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς και με φορά προς τα πάνω.*
Αν θεωρήσουμε ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα dt όπου ο πλανήτης κινείται κατά dl=v(t)dt και η επιβατική ακτίνα είναι r(t), η μεταβολή της επιφανείας στη μονάδα του χρόνου είναι $dS = \frac{1}{2}r(t)dl = \frac{1}{2}r(t)v(t)dt \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r(t)v(t)$ *το οποίο σύμφωνα με την (1) είναι σταθερό.*

Θέμα 4

Ένα jetski (ταχύπλοο που αναρροφά νερό από την καρίνα και το εκτοξεύει προς τα πίσω) ξεκινά από την ηρεμία. Αν η αντίσταση του νερού δίνεται από τη σχέση $\vec{A} = -k\vec{v}$ όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα του ταχυπλόου και k θετική σταθερά και το νερό εκτοξεύεται με σχετική ταχύτητα ως προς το jetski u=35 m/s και με ρυθμό λ=10kg/s υπολογίστε την τελική ταχύτητα του jetski. Δίνεται ότι k=10 Ns/m.

(Απάντηση)
Θεωρούμε ότι τα διανύσματα ορμών, ταχυτήτων και δυνάμεων είναι παράλληλα με τον άξονα X. Θετική φορά είναι η φορά της ταχύτητας του jetski
Ας υποθέσουμε ότι εκτοξεύεται μάζα νερού dm σε χρόνο dt. Η ορμή του μεταβάλλεται σύμφωνα με την σχέση: dP = dm · V όπου V η ταχύτητα του ως προς ακίνητο παρατηρητή.
Η ορμή του ταχύπλοου πριν είναι $P_{\pi\rho\iota\nu} = M \cdot v$, *ενώ αμέσως δε μετά την εκτόξευση θα είναι:*

$P_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = M \cdot (v + dv) + dm \cdot V = M \cdot v + M \cdot dv + dm \cdot (v - u)$

Η μεταβολή της ορμής θα είναι: $dP = M \cdot dv + dm \cdot (v - u)$ *και η δύναμη που αναπτύσσεται σε χρόνο dt ισούται με*

$F = dP/dt = M \cdot dv/dt + dm/dt \cdot (v - u)$

Η δύναμη αυτή θα ισούται με την αντίσταση του νερού. Έτσι θα έχουμε:

$$M \cdot dv/dt + dm/dt \cdot (v - u) = -k \cdot v \overset{\lambda=dm/dt}{\Rightarrow} M \cdot dv/dt + \lambda \cdot (v - u) = -k \cdot v \quad (1)$$

Αν θέσουμε ·dv/dt=0 καταλήγουμε ότι

$$\mathrm{v} = \frac{\lambda \cdot u}{(k + \lambda)} = \frac{10\mathrm{Kg/s}\cdot 35\mathrm{m/s}}{10\mathrm{Kgs} + 10\mathrm{Kg/s}} = \frac{350\mathrm{Kgm/s^2}}{20\mathrm{Kg/s}} = 17.5\mathrm{m/s}$$

Μπορούμε αν θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή από την (1).
Χωρίζοντας τις μεταβλητές v και t έχουμε:

$$M \cdot dv/dt = -k \cdot v - \lambda \cdot v + \lambda \cdot u = -(k + \lambda) \cdot v + \lambda \cdot u \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathrm{v}}{-(k + \lambda)\cdot \mathrm{v} + \lambda \cdot u} = \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot dt$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int_0^{\mathrm{v}} \frac{d\mathrm{v}}{-(k + \lambda)\cdot \mathrm{v} + \lambda \cdot u} = \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-(k + \lambda)} \int_0^{v} \frac{d(-(k + \lambda)\mathrm{v} + \lambda u)}{-(k + \lambda)\cdot \mathrm{v} + \lambda \cdot u} = \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{-(k + \lambda)} \ln \frac{-(k + \lambda)\cdot \mathrm{v} + \lambda \cdot u}{\lambda \cdot u} = \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{-(k + \lambda)\cdot \mathrm{v} + \lambda \cdot u}{\lambda \cdot u} = \frac{-(k + \lambda)}{\mathrm{M}} \cdot t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{-(k+\lambda)\cdot\nu}{\lambda\cdot u}+1=e^{\frac{-(k+\lambda)}{M}\cdot t} \Rightarrow \nu=\frac{\lambda\cdot u}{(k+\lambda)}\left(1-e^{\frac{-(k+\lambda)}{M}\cdot t}\right) \Rightarrow \nu=\frac{\lambda\cdot u}{(k+\lambda)}\left(1-e^{c\cdot t}\right)$$

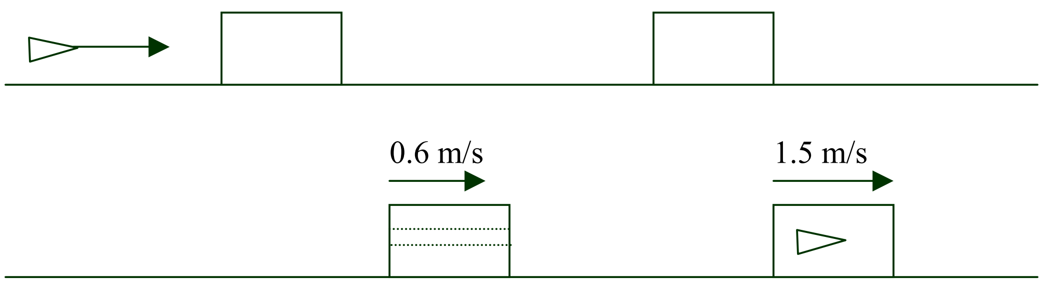
Η τελική ταχύτητα, την οποία θα αποκτήσει για $t \to \infty$, οπότε θα μηδενιστεί το $e^{c\cdot t}$ θα ισούται με:

$$\nu=\frac{\lambda\cdot u}{(k+\lambda)}=\frac{10\text{Kg/s}\cdot 35\text{m/s}}{10\text{Kgs}+10\text{Kg/s}}=\frac{350\text{Kgm/s}^2}{20\text{Kg/s}}=17.5\text{m/s}$$

Θέμα 5

1ο Ερώτημα

Μια σφαίρα μάζας 4 g βάλλεται κατά 2 σωμάτων που βρίσκονται σε ηρεμία πάνω σε οριζόντια επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σφαίρα διαπερνά ακαριαία το πρώτο σώμα μάζας 1.5 kg και ενσωματώνεται στο δεύτερο (επίσης μάζας 1.5 kg). Τα δύο σώματα αποκτούν ταχύτητες 0.6 m/s και 1.5 m/s αντίστοιχα.
α) Ποια η ταχύτητα της σφαίρας τη στιγμή που εξέρχεται από το πρώτο σώμα
β) Ποια η αρχική ταχύτητα της σφαίρας;
γ) Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του δεύτερου σώματος και του δαπέδου είναι μ=0.3 πόσο διάστημα διανύει , μέχρι να σταματήσει;
Υποθέστε ότι κατά τη διέλευση της σφαίρας από το πρώτο σώμα δεν μεταβάλλεται η μάζα του σώματος



(Απάντηση)

Έστω $\vec{v}_{\sigma\phi}$ η αρχική ταχύτητα της σφαίρας, $\vec{v}'_{\sigma\phi}$ η ταχύτητά της μετά την πρώτη κρούση, $\vec{u}$ η ταχύτητα που αποκτά το πρώτο σώμα, και $\vec{u}'$ η ταχύτητα που αποκτά το συσσωμάτωμα της δεύτερης κρούσης. Έστω επίσης ότι m η μάζα της σφαίρας και M η μάζα του κάθε σώματος.
α) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρηση της ορμής για τη δεύτερη κρούση έχουμε

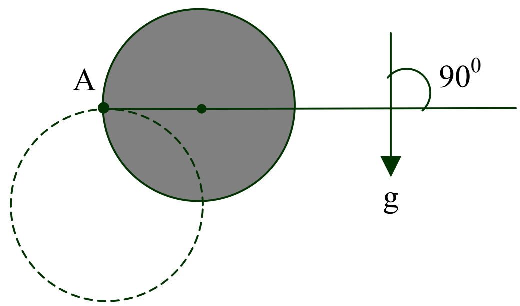
$$mv'_{\sigma\phi}=(M+m)u' \Rightarrow v'_{\sigma\phi}=\frac{M+m}{m}u'=\frac{1.5+4\cdot10^{-3}}{4\cdot10^{-3}}1.5=564m/s$$

β)Εφαρμόζοντας ξανά την αρχή διατήρηση της ορμής για τη πρώτη κρούση έχουμε

$$mv_{\sigma\phi}=mv'_{\sigma\phi}+Mu \Rightarrow v_{\sigma\phi}=v'_{\sigma\phi}+\frac{M}{m}u=564+\frac{1.5}{4\cdot10^{-3}}0.6=564+225=789m/s$$

γ) Η κίνηση του συσσωματώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με επιτάχυνση
$$a = \frac{T}{M+m} = \frac{\mu(\mathrm{M}+m)g}{M+m} = \mu g = 3m/s^2$$
γιατί η μόνη δύναμη που δρα στην διεύθυνση της κίνησης είναι η τριβή. Το σώμα κινείται μέχρι να σταματήσει για χρονικό διάστημα $t = \frac{u'}{a} = \frac{1.5}{3} = 0.5s$ *Επομένως* $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}3\cdot 0.5^2 = 0.375m$

2ο Ερώτημα



Ένας ομογενής συμπαγής δίσκος ακτίνας R και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα και χωρίς τριβές γύρω από ένα σταθερό σημείο Α της περιφέρειάς του όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο δίσκος αφήνεται να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα υπό την επίδραση του βάρους του, από τη θέση που δείχνει ο γραμμοσκιασμένος κύκλος του σχήματος. Να βρείτε: α) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του, και β) την ταχύτητα του κατώτερου σημείου της περιφέρειάς του, όταν ο δίσκος βρεθεί στη θέση που δείχνει ο διακκεκομένος κύκλος του σχήματος; Δίνεται ότι η ροπή αδρανείας του συμπαγή δίσκου ως προς άξονα κάθετο στην επιφάνειά του που περνά από το κέντρο του είναι $I_\kappa=1/2MR^2$.

(Απάντηση)

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τις δύο θέσεις και έχουμε:
$$mgR = \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow mgR = \frac{1}{2}\left(I_{\kappa\mu} + mR^2\right)\omega^2 \Leftrightarrow mgR = \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\omega^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega^2 \Leftrightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{g}{3R}}$$

Επομένως η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $v_{\kappa\mu} = \omega R = 2\sqrt{\frac{gR}{3}}$ *ενώ του κατώτερου σημείου είναι*
$$v_{\kappa\mu} = \omega\left(2R\right) = 2\omega R = 4\sqrt{\frac{gR}{3}}$$

<u>Σημείωση</u>

Όπου σας χρειαστεί θεωρείστε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g=10m/s^2$

Να απαντηθούν και τα 5 πλήρη θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα ενώ τα ερωτήματα των θεμάτων έχουν ίση συνεισφορά στην βαθμολογία του κάθε θέματος. Υπενθυμίζεται ότι θα πρέπει να συμπληρώσετε το βαθμό 5 σε κάθε εξέταση και ότι ο συνολικός σας βαθμός των γραπτών εξετάσεων θα είναι 0.5 (βαθμός Μηχανικής) +0.3 (βαθμός στα Μαθηματικά) +0.2 (βαθμός στον Ηλεκτρομαγνητισμό).

Καλή Επιτυχία