Λύσεις θεμάτων ΦΥΕ00 (Μαθηματικά) - Ιούλιος 2002.

Θέμα 1

α)

$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = 3(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{3})$. Άρα θα πρέπει:
$D \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -1$ και $\lambda \neq \frac{1}{3}$ ①

$$x_1 = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2\lambda \\ \lambda-4 & \lambda-1 \end{vmatrix}}{3(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{3})} = \frac{2\lambda^2-6\lambda-2}{3(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{3})}$$

$$\psi_1 = \frac{D_\psi}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2\lambda & \lambda-4 \end{vmatrix}}{3(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{3})} = \frac{\lambda^2+\lambda-4}{3(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{3})}$$

$$x_1+\psi_1 = \frac{\lambda^2-5\lambda-6}{3(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{3})} = \frac{(\lambda+1)(\lambda-6)}{3(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{3})} = \frac{\lambda-6}{3(\lambda-\frac{1}{3})}$$

Θα πρέπει: $x_1+\psi_1 > 1 \Rightarrow \frac{\lambda-6}{3\lambda-1} > 1$. ② Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $3\lambda-1>0 \Rightarrow \lambda > \frac{1}{3}$ και από την ② έχουμε $\lambda-6 > 3\lambda-1 \Rightarrow$
$\lambda < -\frac{5}{2}$ αδύνατο.

ii) $3\lambda-1<0 \Rightarrow \lambda<\frac{1}{3}$ και από την ② έχουμε: $\lambda-6 < 3\lambda-1 \Rightarrow \lambda > -\frac{5}{2}$
Λαμβάνοντας υπόψη από την ① ότι $\lambda \neq -1$, παίρνουμε τελικά ότι:
$-\frac{5}{2} < \lambda < -1$, $-1 < \lambda < \frac{1}{3}$

β) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 I_2$

$A^{20} = (A^2)^{10} = 7^{10} \cdot I_2$.

Θέμα 2

α)

$\vec{OA} = (\lambda, \mu)$ $\quad \vec{OB} = (\mu, -\lambda)$ $\quad \vec{O\Gamma} = (-\mu, \lambda)$.

i) $\vec{OB} + \vec{O\Gamma} = (\mu, -\lambda) + (-\mu, \lambda) = (0, 0) \Rightarrow \vec{OB} = -\vec{O\Gamma}$

ii) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (\mu, -\lambda) - (\lambda, \mu) = (\mu - \lambda, -\lambda - \mu)$

$\vec{A\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OA} = (-\mu, \lambda) - (\lambda, \mu) = (-\mu - \lambda, \lambda - \mu)$.

$\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = (\mu - \lambda)(-\mu - \lambda) + (-\lambda - \mu)(\lambda - \mu) = 0$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + (\lambda + \mu)^2}$ $\quad |\vec{A\Gamma}| = \sqrt{(\mu + \lambda)^2 + (\lambda - \mu)^2}$

Άρα $|\vec{AB}| = |\vec{A\Gamma}|$

β)

$\vec{\alpha} = (2, 3)$ $\quad \vec{\beta} = (-1, -2)$ $\quad \vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ $\quad \vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$

Θα ισχύουν οι σχέσεις: $\vec{\gamma} - \vec{\delta} = \vec{\alpha} \Rightarrow \gamma_1 - \delta_1 = 2$ (1)

και $\gamma_2 - \delta_2 = 3$ (2)

$\vec{\gamma} \parallel \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\gamma} \times \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \gamma_1 \cdot \beta_2 - \gamma_2 \cdot \beta_1 = 0 \Rightarrow -2\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ (3)

$\vec{\delta} \perp \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\delta} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2 = 0 \Rightarrow 2\delta_1 + 3\delta_2 = 0$ (4)

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) - (4) παίρνουμε ότι:

$\gamma_1 = \frac{13}{8}$, $\gamma_2 = \frac{13}{4}$, $\delta_1 = -\frac{3}{8}$, $\delta_2 = \frac{1}{4}$ και τελικά έχουμε ότι:

$\vec{\gamma} = \left(\frac{13}{8}, \frac{13}{4}\right)$ και $\vec{\delta} = \left(-\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right)$

Θέμα 3

α).

Θα πρέπει $x^2 + \lambda x + 1 > 0$ για κάθε τιμή του x.
Άρα η διακρίνουσα Δ πρέπει να είναι αρνητική, αφού σ' αυτή την περίπτωση το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή θετικό στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Έτσι έχουμε: $\Delta = \lambda^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < \lambda < 2$.

β) ι

$f(x) = 3 + \sqrt{x-4}$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το: $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\}$

Το πεδίο τιμών της f είναι το: $f(x) \geq 3$

Η συνάρτηση f είναι "1-1", αφού για x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$, αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Για να βρούμε την αντίστροφη, f^{-1}, θέτουμε: $\psi = 3 + \sqrt{x-4} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 4 + (\psi - 3)^2$ και με αλλαγή των μεταβλητών παίρνουμε:
$\psi = 4 + (x-3)^2$. Άρα: $f^{-1}(x) = 4 + (x-3)^2$
Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το πεδίο τιμών της f, δηλαδή το: $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$

Το πεδίο τιμών της f^{-1} είναι το: $f^{-1}(x) \geq 4$.

Θέμα 4

α)

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-2}{4x^3-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(4-\frac{1}{x^3}\right)} = \dfrac{0}{4} = 0.$

ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} (3+\sqrt{x^2+5}) = 6$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{x}{2} = 1 . 0 = 0$

β)

$f(x) = \ln\left(\sqrt{3-x^2}\right)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{3-x^2}$

$f''(x) = \dfrac{(-x)'(3-x^2)-(x)(3-x^2)'}{(3-x^2)^2} = \dfrac{-(3-x^2)+x(-2x)}{(3-x^2)^2} = -\dfrac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$

γ)

$\vec{v}(t) = -\sin t \cdot \vec{i} + 2\cos t \cdot \vec{j}$, $\vec{\alpha}(t) = -\cos t \cdot \vec{i} - 2\sin t \cdot \vec{j}$

$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{1+3\cos^2 t}$, $|\vec{\alpha}(t)| = \sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 t} = \sqrt{1+3\sin^2 t}$

για $t = \frac{5\pi}{6}$ έχουμε: $|\vec{v}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$

για $t = \frac{5\pi}{3}$ έχουμε: $|\vec{v}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Το $|\vec{v}(t)|$ γίνεται μέγιστο (ελάχιστο) όταν το $\cos^2 t$ γίνεται μέγιστο (ελάχιστο).
Άρα, $t = \kappa\pi$ ($t = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$), $|\vec{v}| = 2$ ($|\vec{v}| = 1$).
Το $|\vec{\alpha}(t)|$ γίνεται μέγιστο (ελάχιστο) όταν το $\sin^2 t$ γίνεται μέγιστο (ελάχιστο)
Άρα $t = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ($t = \kappa\pi$) και $|\vec{\alpha}| = 2$ ($|\vec{\alpha}| = 1$)

Θέμα 5

α).

$$I = \int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$$

Θέτουμε: $1-2x^2 = \psi \Rightarrow -4x\,dx = d\psi \Rightarrow x\,dx = -\frac{1}{4}d\psi$. και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int 3\left(-\frac{1}{4}\right)\sqrt{\psi}\,d\psi = -\frac{3}{4}\int \psi^{\frac{1}{2}}\,d\psi = -\frac{3}{4}\psi^{3/2} + C.$$

Άρα: $I = -\frac{1}{2}(1-2x^2)^{3/2} + C.$

β).

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\sin x\,dx = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2(\cos x)'\,dx = \left[-x^2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos x\,dx =$$

$$= \left[-x^2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(\sin x)'\,dx = \left[-x^2\cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[2x\sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 2$$

$$= \left[-x^2\cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[2x\sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[2\cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

γ).

$$I = \int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4}$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα την συνάρτηση προς ολοκλήρωση έχουμε:

$$\frac{x}{x^2-3x-4} = \frac{x}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow x = A(x-4) + B(x+$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{4}{5}$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται: $I = \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-4} = \frac{1}{5}\ln(x+1) + \frac{4}{5}\ell$