Θέμα 1
Α)

i) *Να βρεθούν τα συνημίτονα κατευθύνσεως του διανύσματος* $\vec{a} = 3\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο στο σημείο x_0=2 της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

Λύση

$$\cos a = \frac{\hat{i} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \cdots = \frac{3}{13}$$

$$\cos \beta = \frac{\hat{j} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \cdots = \frac{12}{13}$$

$$\cos \gamma = \frac{\hat{k} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \cdots = \frac{4}{13}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 144 + 16} = \sqrt{169} = 13$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{x+1}{|x-2|}$$

- Είναι $\lim\limits_{x \to 2}(x+1) = 3$
- $\lim\limits_{x \to 2}|x-2| = 0$ και |x-2|>0, x∈A επομένως $\lim\limits_{x \to 2} 1/|x-2| = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{|x-2|} \lim\limits_{x \to 2}(x+1) = (+\infty) \cdot 3 = +\infty$

Β) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει εκτός της μηδενικής και άλλη λύση.

$$\begin{aligned} x + \lambda(y+z) &= 0 \\ -2y + z &= \lambda x, \quad \lambda \in R \\ \lambda x + y &= -z \end{aligned}$$

Λύση

Το σύστημα γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} x + \lambda y + \lambda z &= 0 \\ -\lambda x - 2y + z &= 0, \quad \lambda \in R \\ \lambda x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

είναι ομογενές και για να έχει και λύση εκτός της προφανούς (x=y=z=0) πρέπει

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ -\lambda & -2 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-2-1) - \lambda(-\lambda-\lambda) + \lambda(-\lambda+2\lambda) = 0 \Leftrightarrow -3 + 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

- λ=1 το σύστημα γίνεται $\left\{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ -x-2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ -x-2y+z=0 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} x=-3z \\ y=2z \\ z \in R \end{matrix}\right\}$
- λ=-1 έχουμε $\left\{\begin{matrix} x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} x-2y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} x=3z \\ y=2z \\ z \in R \end{matrix}\right\}$

Θέμα 2

A) *Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in R$ για την οποία το σύστημα*

$$\left\{\begin{matrix} 3x+4y=\lambda \\ 2x+y=5 \\ x-3y=-1 \end{matrix}\right\}$$ έχει λύση, καθώς και την λύση αυτή.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & \lambda \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 4 & \lambda \\ 0 & -5 & 15-2\lambda \\ 0 & -13 & -3-\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 4 & \lambda \\ 0 & 65 & -195+26\lambda \\ 0 & -65 & -15-5\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 4 & \lambda \\ 0 & -65 & 195-26\lambda \\ 0 & 0 & -210+21\lambda \end{bmatrix}$$

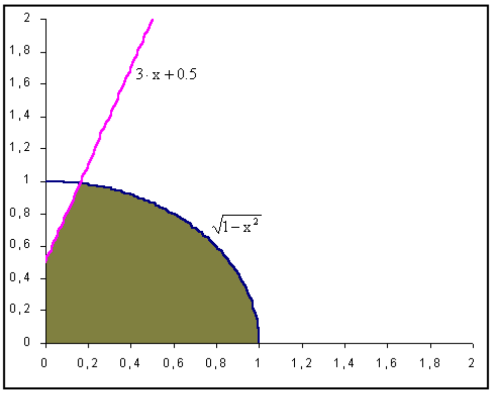
$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \\ \lambda=10 \end{matrix}\right\}$$

B) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής που ορίζεται από τις καμπύλες

$y(x)=3x+0.5$

$g(x)=\sqrt{1-x^2}$

και τους άξονες x και y όπως φαίνεται στο σχήμα.



Λύση

$$3x+0.5=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 9x^2+3x+\frac{1}{4}=1-x^2 \Leftrightarrow 10x^2+3x-\frac{3}{4}=0, \quad \Delta=9+30=39, \quad x=\frac{-3+\sqrt{39}}{20}=a$$

$$\int_0^a (3x+\frac{1}{2})dx=\left[\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]_0^a=\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}a$$

$$\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \xrightarrow{x=\sin t, dx=\cos t dt} \int_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} \cos^2 t\cdot dt = \int_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} \cos t\cdot \sin' t\cdot dt = \cos t\cdot \sin t\Big|_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} - \int_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} \cos' t\cdot \sin t\cdot dt =$$

$$\cos t\cdot\sin t\Big|_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} + \int_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} \sin t\cdot \sin t\cdot dt = \cos t\cdot\sin t\Big|_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} + \int_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = \cos t\cdot\sin t\Big|_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} + \int_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\, dt =$$

$$\cos t\cdot\sin t\Big|_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} + t\Big|_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} - \int_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \Rightarrow \int_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\left[\cos t\cdot\sin t\Big|_{\sin^{-1}a}^{\pi/2} + t\Big|_{\sin^{-1}a}^{\pi/2}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}a-a\cdot\cos(\sin^{-1}a)\right]$$

Άρα το εμβαδόν είναι : $\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}a-a\cdot\cos(\sin^{-1}a)\right]$

Θέμα 3

A) Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι πίνακες
α) C=A+B
β) D=A•B
γ) $E=B^{-1}$

Λύση

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B) Το διάνυσμα θέσης κινητού δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου, t, από τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{r} = ae^{-t}\cos\omega t \cdot \hat{x} + be^{-t}\sin\omega t \cdot \hat{y}$ όπου α, ω, b ∈ R και ω>0.
Υπολογίσατε τη στροφορμή του κινητού ως προς την αρχή των αξόνων.(Η διανυσματική συνάρτηση της στροφορμής δίνεται από τη σχέση:
$\vec{L}(t) = M \cdot (\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt})$ όπου M θετική σταθερά.

Λύση

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-ae^{-t}\cos\omega\cdot t - a\omega\cdot e^{-t}\sin\omega\cdot t)\hat{x} + (-be^{-t}\sin\omega\cdot t + be^{-t}\omega\cos\omega\cdot t)\hat{y} =$$

$$= -\alpha e^{-t}(\omega\sin\omega\cdot t + \cos\omega\cdot t)\hat{x} + be^{-t}(\omega\cos\omega\cdot t - \sin\omega\cdot t)\hat{y}$$

$$\vec{L}(t) = M\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ae^{-t}\cos\omega\cdot t & be^{-t}\sin\omega\cdot t & 0 \\ -\alpha e^{-t}(\omega\sin\omega\cdot t + \cos\omega\cdot t) & be^{-t}(\omega\cos\omega\cdot t - \sin\omega\cdot t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\left[Mabe^{-2t}[\cos\omega\cdot t\cdot(\omega\cos\omega\cdot t - \sin\omega\cdot t)] + Mabe^{-2t}[\sin\omega\cdot t\cdot(\omega\sin\omega\cdot t + \cos\omega\cdot t)]\right]\hat{k} =$$

$$M\omega\cdot abe^{-2t}\hat{k}$$

Θέμα 4

A) i) Δίνονται οι πίνακες $A = (2,1)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Να βρεθούν αν υπάρχουν οι πίνακες:
α) C= A•B
β) D= B•A

ii) Δίδεται η συνάρτηση:
$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^x$

Δείξτε ότι ικανοποιεί την εξίσωση: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = e^x$

Λύση

α) $C = (6 \quad 1 \quad -3)$

β) Δεν υπάρχει

$$\frac{dy}{dx} = 2c_1 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + c_2 e^{2x} + e^x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 4c_1 e^{2x} + 4c_2 x e^{2x} + 2c_2 e^{2x} + 2c_2 e^{2x} + e^x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = \underline{4c_1 e^{2x}} + \underline{\underline{4c_2 x e^{2x}}} + \overline{2c_2 e^{2x}} + \overline{2c_2 e^{2x}} + e^x \underline{- 8c_1 e^{2x}} \underline{\underline{- 8c_2 x e^{2x}}} \overline{- 4c_2 e^{2x}} - 4e^x$$
$$+ \underline{4c_1 e^{2x}} + \underline{\underline{4c_2 x e^{2x}}} + 4e^x = e^x$$

B) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x^2 \ln x dx$

Λύση

$$\int x^2 \ln x dx = \int \ln x d(x^3/3) = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x) = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} dx =$$
$$\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Θέμα 5

A) Δίνεται η συνάρτηση y της ανεξάρτητης μεταβλητής x, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:
$x^2 + y^2 - 4 = 0$ με x,y >0.
Να βρεθεί η dy/dx και d^2y/dx^2

Λύση

$$\frac{d(x^2 + y^2 - 4)}{dx} = 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} y' = -\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3} = -\frac{4}{\left(4 - x^2\right)^{3/2}}$$

B) Να μελετηθεί η συνάρτηση $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 6x + 8$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση
Πεδίο ορισμού είναι το **R** χωρίς σημεία ασυνέχειας.
Βρίσκουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος.

$$y' = x^2 + x - 6 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \Delta = 25 \\ \rho_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = 2, -3 \end{array} \right\}$$

$$y'' = 2x + 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/2 \text{ σημείο καμπής} \\ y''(2) = 5 > 0, \text{ ελάχιστο} \\ y''(-3) = -5 < 0, \text{ μέγιστο} \end{array} \right\}$$

Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν όπως επίσης δεν υπάρχουν και πλάγιες ασύμπτωτες γιατί:

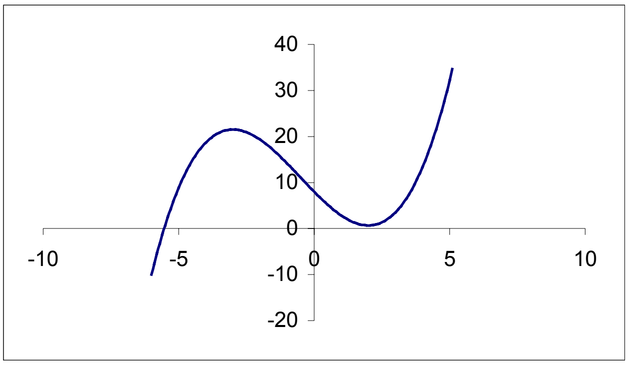
$$\lim_{x -> +\infty} [y - (ax + b)] = +\infty$$

$$\lim_{x -> -\infty} [y - (ax + b)] = -\infty$$

Ο πίνακας μεταβολής της συνάρτησης είναι ο παρακάτω:

x	-oo	-3		-0.5		2	+oo
f΄	+	0	-		-	0	+
f΄΄	-		-	0	+		+
f	↗		↘		↘		↗

Η γραφική της παράσταση:



Θέμα 6

A) Δίνεται η καμπύλη $\vec{r}(t) = 3\cos 2t \cdot \hat{i} + 3\sin 2t \cdot \hat{j} + (8t-4)\hat{h}$
Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα κατά μήκος της καμπύλης.

Λύση

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -6\sin 2t \cdot \hat{i} + 6\cos 2t \cdot \hat{j} + 8 \cdot \hat{h}, \quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{36\sin^2 2t + 36\cos^2 2t + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Άρα το μοναδιαίο είναι **:** $\hat{\mathrm{t}} = -\frac{3}{5}\sin 2t \cdot \hat{i} + \frac{3}{5}\cos 2t \cdot \hat{j} + \frac{4}{5} \cdot \hat{h},$

B) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x+1}dx$$

Λύση

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1}dx - \int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx = x + C - \int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+1}dx$$

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{d(x^2+2x+1)}{x^2+2x+1} = \ln\left|x^2+2x+1\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + C$$

Άρα τελικά,

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x+1}dx = x - \ln\left|x^2+2x+1\right| - \frac{1}{x+1} + C$$