Θέμα 1

Α) Μια βάρκα περνώντας ένα ποτάμι κατευθύνεται προς Βορρά με ταχύτητα 10Km/h σε σχέση με το νερό. Το νερό του ποταμού κυλάει προς ανατολάς με ταχύτητα 5 Km/h ως προς παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος στην όχθη.
Α) Να προσδιορίσετε την ταχύτητα της βάρκας ως προς τον ακίνητο παρατηρητή.
Β) Εάν η βάρκα πρέπει να ταξιδεύσει, προς Βορρά με το ίδιο μέτρο ταχύτητας 10Km/h (ως προς τον ακίνητο παρατηρητή), προς ποια κατεύθυνση πρέπει να πηδαλιουχεί ο βαρκάρης;
(8 μονάδες)

Λύση
Α) Έστω $\vec{u}$ το διάνυσμα της ταχύτητας του νερού σε σχέση με την όχθη
$\vec{v}$ το διάνυσμα της ταχύτητας της βάρκας σε σχέση με την όχθη και
$\vec{v}'$ το διάνυσμα της ταχύτητας της βάρκας σε σχέση με το νερό, τότε έχουμε:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

Οπότε $v = \sqrt{(v')^2 + u^2} = 11.2Km/h$ γιατί τα δύο αυτά διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

Η κατεύθυνση του v είναι: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{u}{v'} \Rightarrow \theta = 26.6^o$

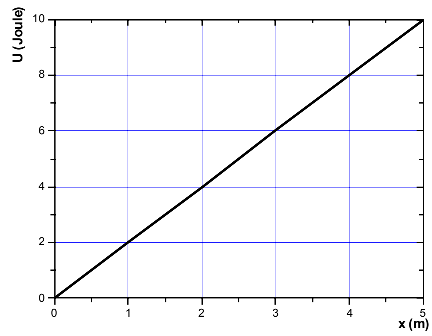
Β) Εφόσον τώρα η βάρκα πρέπει να ταξιδεύσει προς το Βορρά η ταχύτητά της ως προς το νερό πρέπει να έχει κατεύθυνση Βορειοδυτική ώστε:

$$v = \sqrt{(v')^2 - u^2} = 8.66Km/h$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{u}{v} \Rightarrow \theta = 30^o$$

Β) Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m =10 kgr το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση μιας διατηρητικής δύναμης μεταβάλλεται όπως στο σχήμα.
Εάν το σώμα στη θέση x=0 είχε κινητική ενέργεια ίση με 8 Joule να βρεθούν:
Α) Πόση είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα και ποια είναι η κατεύθυνσή της;
Β) Πόσο χρόνο t χρειάζεται το σώμα για να διανύσει την απόσταση από την θέση x=2m στη θέση x=4m;
(12 μονάδες)

Λύση
Από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι U(x)=2x οπότε
$F = -\frac{dU}{dx} = -2N$. Δηλαδή η φορά της είναι προς τα αρνητικά x (**F**=-2**i**)



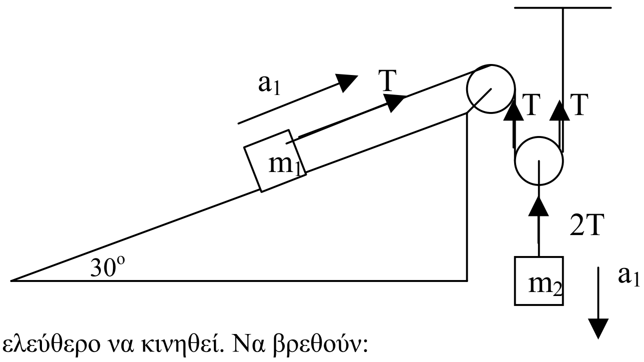
Αφού το σώμα έχει κινητική ενέργεια 8 J θα ακινητοποιηθεί στιγμιαία στο x=4 m όπου όλη η κινητική του ενέργεια θα έχει μετατραπεί σε δυναμική.
Στο x=2m θα έχει κινητική ενέργεια 8=U(2)+K=>K=4 J
επομένως η ταχύτητά του είναι $u = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 0.9ms^{-1}$.

Αφού η δύναμη είναι σταθερή το σώμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με $a = \frac{F}{m} = 2ms^{-2}$.

Επομένως θα ισχύει $0 = u_0 - at \Rightarrow t = \frac{u_0}{a} = 4.5s$ s.

Θέμα 2

Α) Σώμα μάζας m_1=10 kgr βρίσκεται πάνω σε λείο (χωρίς τριβές) κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης 30^0. Το σώμα εξαρτάται με τη βοήθεια σχοινιού και συστήματος αβαρών τροχαλιών με σώμα μάζας m_2=20 kgr όπως φαίνεται στο σχήμα:



Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Να βρεθούν:
Α) Οι επιταχύνσεις των δύο σωμάτων
Β) Οι τάσεις σε κάθε κλάδο του σχοινιού και
Γ) Ο χρόνος που θα χρειαστεί το σώμα μάζας m_2 για να κατέλθει κατά Η=2m.
Δίδεται g=10m/sec^2.
(12 μονάδες)

Λύση
Έστω ότι σε χρόνο Δt το σώμα m1 κινείται κατά Δx. Τότε το σώμα m2 κινείται κατά Δh=0.5 Δx.
Εξορισμού όμως $v_1 = \lim_{\Delta t->0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2 \lim_{\Delta t->0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = 2v_2$ και ομοίως $a_1 = \lim_{\Delta t->0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = 2 \lim_{\Delta t->0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = 2a_2$
Έστω Τ η τάση του νήματος που ασκείται στο σώμα m_1. Τότε η τάση του νήματος στο σώμα m_2 θα είναι 2Τ. Οι εξισώσεις κίνησης των σωμάτων θα είναι:
$T - m_1 \cdot g \cdot \sin 30 = m_1 \cdot a_1 = 2 \cdot m_1 \cdot a_2$, $\quad m_2 \cdot g - 2 \cdot T = m_2 \cdot a_2$
Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με 2 και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:
$m_2 \cdot g + 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin 30 = (4 \cdot m_1 + m_2) \cdot a_2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{m_1 + m_2}{4 \cdot m_1 + m_2} g = 5ms^{-2}$ Επομένως α_1=10ms^{-2}

Η τάση του νήματος Τ αντικαθιστώντας στην πρώτη είναι: $T = 2 \cdot m_1 \cdot a + \frac{1}{2} m_1 \cdot g = 150\ N$

Ο χρόνος που χρειάζεται για να κατέλθει κατά Η=2m είναι: $H = 2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4}{a_2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} s$

Β) Ένα βλήμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του εκρήγνυται σε δύο κομμάτια. Το ένα κομμάτι έχει διπλάσια μάζα από το άλλο. Το κομμάτι με τη μεγαλύτερη μάζα ακριβώς μετά την έκρηξη έχει κινητική ενέργεια Κ. Δείξτε ότι η συνολική ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη (δηλ. η ολική κινητική ενέργεια των δύο κομματιών ακριβώς μετά την έκρηξη) ισούται ακριβώς με 3 Κ. Δικαιολογείστε την απάντησή σας με τους κατάλληλους υπολογισμούς.
(8 μονάδες)
Λύση
Έστω ότι μετά την έκρηξη το μικρότερο κομμάτι (m) έχει ταχύτητα υ_1 ενώ το μεγαλύτερο (2m) έχει ταχύτητα υ_2 . Από τη στιγμή που δεν υπήρχε ορμή πριν από την έκρηξη, οι τελικές ορμές των δύο κομματιών θα πρέπει να έχουν άθροισμα μηδέν (δηλαδή να είναι αντίρροπες). Από τη διατήρηση της ορμής προκύπτει
$P_{ολ}= m\upsilon_1 - 2m\upsilon_2 \Rightarrow m\upsilon_1 = 2m\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = 2\upsilon_2$.,
Η κινητική ενέργεια του μεγάλου κομματιού είναι Κ= $\frac{1}{2}(2m)\upsilon_2^2$
Άρα η συνολική ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη είναι

$$K_{ολ}= \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m(2\upsilon_2)^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_2^2 = 2(\frac{1}{2})2m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_2^2 = 2K + K = 3K$$

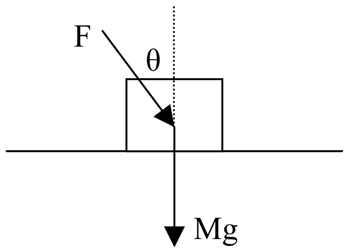
Θέμα 3

Α) Το σχήμα δείχνει μία δύναμη $\vec{F}$ που δρα σε ένα σώμα μάζας Μ. Το σώμα βρίσκεται πάνω σε μία οριζόντια ανώμαλη επιφάνεια με συντελεστή στατικής τριβής μ.

α) Υποθέτοντας ότι F>>Mg , βρείτε τη μέγιστη γωνία θ για την οποία η δύναμη F δεν μπορεί να κάνει το σώμα να ολισθήσει, όσο μεγάλη κι αν είναι

β) Βρείτε το λόγο F/Mg, σαν συνάρτηση των θ και μ, για τον οποίο το σώμα, μόλις αρχίζει να ολισθαίνει.

(10 μονάδες)



Λύση

α) Αναλύω τις δυνάμεις κατά την διεύθυνση τους βάρους και κάθετα σ΄αυτήν.

Το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει όταν

$F\sin\theta \geq \mu N$ και

$N = F\cos\theta + Mg$

Αρα $F\sin\theta \geq \mu F\cos\theta + \mu Mg$ (1) ή διαιρώντας με F έχουμε :

$\sin\theta \geq \mu\cos\theta$ (γιατί Mg/F είναι περίπου μηδέν) Επομένως $\sin\theta \geq \mu \cos\theta \Rightarrow \tan\theta \geq \mu$

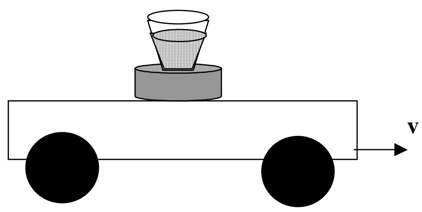
Άρα αν $\theta \leq \arctan \mu$ το σώμα δεν μπορεί να ολισθήσει όσο μεγάλη κι αν είναι η F

β) από (1) $F\sin\theta = \mu F\cos\theta + \mu Mg \Rightarrow \dfrac{F}{Mg} = \dfrac{\mu}{\sin\vartheta - \mu\cos\vartheta}$

Β) Βαγόνι κινείται με σταθερή ταχύτητα και χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, Πάνω στο βαγόνι υπάρχει θερμαντήρας που ζεσταίνει ένα δοχείο με νερό όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια χρονική στιγμή το νερό αρχίζει να βράζει και οι ατμοί του νερού εγκαταλείπουν το δοχείο με μηδενική σχεδόν ταχύτητα ως προς παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στο βαγόνι. Βρείτε αν θα αλλάξει η ταχύτητα του οχήματος ως προς ακίνητο παρατηρητή στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

I) η αρχική ταχύτητα του οχήματος είναι μηδέν,

II) η αρχική ταχύτητα είναι μεγαλύτερη του μηδενός.



(10 μονάδες)

Λύση

Αν Μ η μάζα του συστήματος τότε η αρχική ορμή είναι Μ v. Αφού η ολική ορμή παραμένει σταθερή (η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν), αν κάποια χρονική στιγμή έχουν μετατραπεί m kgr νερού σε ατμούς τότε αυτά κινούνται με την ίδια ταχύτητα που κινείται το βαγόνι έστω u. Από την διατήρηση της ορμής έχουμε:

$(M-m)\,u + m\,u = M\,v \Rightarrow u = v$.

Άρα και στις δύο περιπτώσεις η ταχύτητα του βαγονιού παραμένει σταθερή.

Θέμα 4

Α) Σώμα βάλλεται από σημείο του εδάφους με αρχική ταχύτητα **v**=10**i**+10**k** (m/sec). Κατά την διάρκεια της κίνησής του φυσάει αέρας με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{v}_\alpha$=10 **j** m/sec όπου i,j και k είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις x,y και z αντίστοιχα. Να βρεθούν:
Α) Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάσει το σώμα.
Β) Το συνολικό χρόνο κίνησης μέχρι να επιστρέψει στο έδαφος και
Γ) την απόσταση του σημείου βολής από το σημείο πρόσπτωσης του σώματος στο έδαφος.
Δίδεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι **g**=-10 **k** m/sec^2.
(12 μονάδες)

Λύση
Σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων το σώμα κάνει πλάγια βολή στο επίπεδο xz και ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κατά την κατεύθυνση y με ταχύτητα αυτήν του αέρα.
Οπότε:

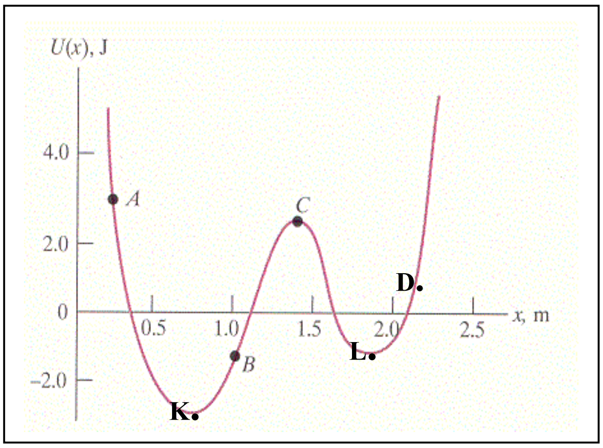
$$h_{\max} = \frac{v_Z^2}{2g} = 5m$$

$$t_{o\lambda} = \frac{2v_Z}{g} = 2\sec$$

$$S_x = \frac{v_0^2 \eta\mu 2\theta}{g} \text{ αλλά } v_0^2 = v_Z^2 + v_x^2 = 200m^2/\sec^2 \text{ και } \varepsilon\varphi\theta = \frac{v_z}{v_x} = 1 \Rightarrow \theta = 45^0$$

Οπότε S_x=20m και
$S_y = v_\alpha t_{o\lambda}$=20m. Οπότε $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 20\sqrt{2}m$

Β) Ένα αντικείμενο κινείται κατά μήκος του άξονα x ενώ ασκείται σε αυτό μια και μόνη διατηρητική δύναμη παράλληλη προς τον άξονα x. Η δυναμική ενέργεια του σώματος παρίσταται γραφικά στο σχήμα ως συνάρτηση της συντεταγμένης της θέσης του x. Το αντικείμενο αφήνεται στο σημείο A.
Α) Ποια είναι η φορά της δύναμης που ασκείται στο σώμα στο σημείο A;
Β) Ποια είναι η φορά της δύναμης που ασκείται στο σώμα στο σημείο B;
Γ) Κατατάξτε κατά αύξουσα σειρά τις τιμές της κινητικής ενέργειας του σώματος στα σημεία A,K,B,C,L,D
Δ) Βρείτε την δύναμη που ασκείται στο σώμα όταν αυτό βρίσκεται στο σημείο C.
Ε) Ποια από τα σημεία A,K,B,C,L,D αντιστοιχούν σε σημεία ευσταθούς και ποια σε σημεία ασταθούς ισορροπίας;
(8 μονάδες)



Λύση

Α) x+
Β) x-
C) $E_K, E_B, E_L, E_D, E_C, E_A$
D) F=0N
E) Ευσταθής : K,L Ασταθής : C

Θέμα 5

A) Το διάνυσμα θέσης κινητού μάζας m δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου από τη σχέση :
$\vec{r} = a\cos\omega t \cdot \hat{x} + b\sin\omega t \cdot \hat{y}$ όπου $\hat{x}, \hat{y}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x και y αντίστοιχα.
α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο κινητό.
β) Δείξτε ότι η στροφορμή ως προς την αρχή των αξόνων παραμένει σταθερή
(10 μονάδες)

Λύση

$$\vec{r} = a\cos\omega t \cdot \hat{x} + b\sin\omega t \cdot \hat{y} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = -a \cdot \omega\sin\omega t \cdot \hat{x} + b \cdot \omega\cos\omega t \cdot \hat{y} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{r}^{\,2}}{dt^2} = -a \cdot \omega^2 \cos\omega t \cdot \hat{x} - b \cdot \omega^2 \sin\omega t \cdot \hat{y} = -\omega^2 \vec{r}$$

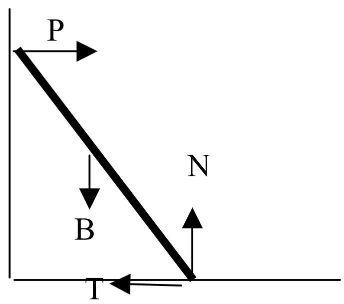
$$\vec{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$

Αφού η δύναμη και το διάνυσμα θέσης είναι συγραμμικά έπεται ότι η εξωτερική ροπή είναι μηδέν και επομένως η στροφορμή παραμένει σταθερή.

B) Μια σκάλα μήκους 10 m και βάρους 50 N είναι στερεωμένη σε κατακόρυφο τοίχο σχηματίζοντας 60^0 με το οριζόντιο δάπεδο. Εάν η σκάλα μόλις ισορροπεί (είναι έτοιμη να αρχίσει να γλιστρά πάνω στο δάπεδο), να βρεθεί ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σκάλας και δαπέδου. (Υποθέστε ότι στον κατακόρυφο τοίχο δεν υπάρχουν τριβές.)
(10 μονάδες)

Λύση
Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη σκάλα πρέπει να είναι μηδέν επομένως πρέπει :
P=**T**, **B**=**N**
Οι ροπές ώς προς το σημείο επαφής σκάλας δαπέδου πρέπει να είναι μηδέν:

$$B \cdot (5\cos\theta) = P(10\sin 60) = T(10\sin 60) = \mu B(10\sin 60) \Leftrightarrow$$
$$\mu = 0.5\cot 60 = 0.29$$

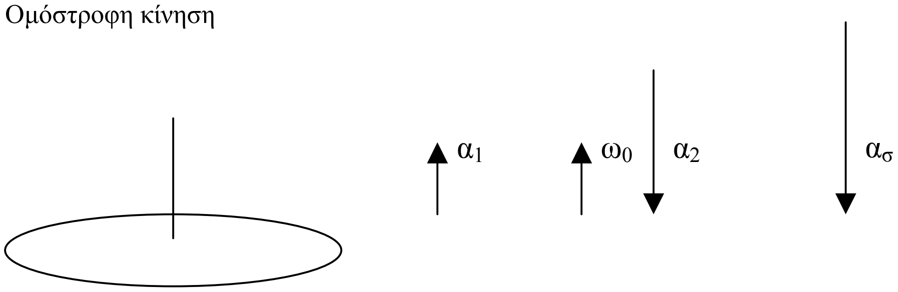


Θέμα 6

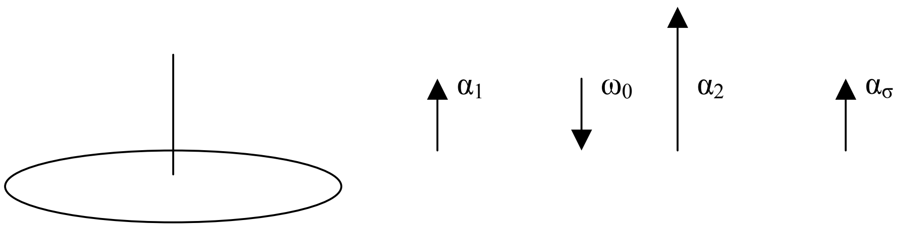
A) Ένα υλικό σημείο Α ξεκινάει τη χρονική στιγμή t=0 από την ηρεμία και κινείται σε μία περιφέρεια κύκλου ακτίνας R= 12 m με σταθερή επιτρόχια επιτάχυνση a_{t1}= 2m/s^2 . Ένα δεύτερο υλικό σημείο Β, την χρονική στιγμή t=0 διέρχεται από το σημείο αφετηρίας του πρώτου με γωνιακή ταχύτητα ω_0 = 4 rad/s και επιβραδύνεται με σταθερή επιτρόχια επιτάχυνση a_{t2}= 4m/s^2. Σε πόσο χρόνο θα ξανασυναντηθούν τα δύο υλικά σημεία α) αν κινούνται ομόστροφα β) αν κινούνται αντίστροφα.
(10 μονάδες)

Λύση
Θα θεωρήσουμε τη σχετική κίνηση του δεύτερου σώματος ως προς το πρώτο. Η γωνιακή ταχύτητα του δευτέρου σώματος ως προς το πρώτο είναι:
$\vec{\omega}_{\sigma\chi} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$. Τη χρονική στιγμή t=0 η προηγούμενη σχέση γράφεται $\vec{\omega}_{\sigma\chi,0} = \vec{\omega}_{2,0} - \vec{\omega}_{1,0}$
Επειδή και στις δύο περιπτώσεις η αρχική ταχύτητα του πρώτου είναι μηδέν θα έχουμε ότι
$\vec{\omega}_{\sigma\chi,0} = \vec{\omega}_{2,0}$
Αντίστοιχα η σχετική γωνιακή επιτάχυνση του δευτέρου σώματος ως προς το πρώτο είναι
$\vec{\alpha}_{\sigma\chi} = \vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_1$.

a) Ομόστροφη κίνηση



b) Αντίστροφη κίνηση



Βλέπουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις η σχετική κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη με ίδια αρχική (γωνιακή) ταχύτητα αλλά διαφορετική επιβράδυνση. Η κίνηση γίνεται διαγράφοντας γωνία που δίνεται από τη σχέση

$$\phi_{\sigma\chi} = \omega_0 t - \frac{1}{2} a_{\sigma\chi} t^2$$

Το σώμα κάποια χρονική στιγμή θα σταματήσει στιγμιαία και στη συνέχεια θα αρχίσει να κινείται κατά την αντίθετη φορά. Μπορούμε να υπολογίσουμε πότε θα γίνει αυτό:

$$0 = \omega_0 - \alpha_{\sigma\chi} \mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{T} = \frac{\omega_0}{\alpha_{\sigma\chi}}$$

Προφανώς η συνάντηση θα γίνει όταν $\varphi_{\sigma\chi}$=2π ή όταν $\varphi_{\sigma\chi}$=0

α) Ομόστροφη κίνηση $a_\sigma = \dfrac{4+2}{12} = 0.5 r/s$

$$\mathrm{T} = \frac{4}{0.5} = 8s \qquad 2\pi = 4 \cdot t - \frac{1}{2} 0.5 \cdot t^2 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t_1 = 1.8s \\ t_2 = 14.2s \end{Bmatrix}$$

Άρα το σώμα θα συναντήσει το άλλο πριν αρχίσει να κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση τη χρονική στιγμή t=1.8s.

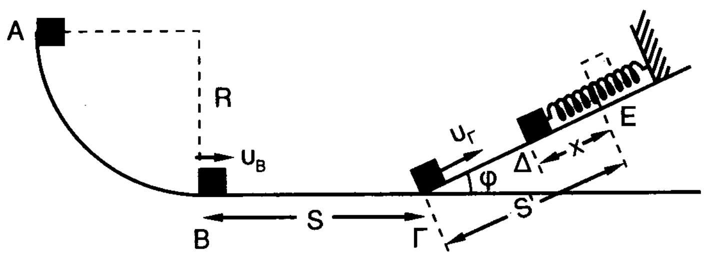
β) Αντίστροφη κίνηση $a_\sigma = \frac{4-2}{12} = 0.17 r/s^2$

$$\mathrm{T} = \frac{4}{0.17} = 24s$$

$$2\pi = 4 \cdot t - \frac{1}{2} 0.17 \cdot t^2 \Leftrightarrow t^2 - 47.06t + 73.88 = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \Delta = 43.8^2 \\ t_{1,2} = \frac{47.06 \pm 43.8}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t_1 = 1.63s \\ t_2 = 45.43s \end{Bmatrix}$$

Άρα το σώμα θα συναντήσει το άλλο πριν αρχίσει να κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση τη χρονική στιγμή t=1.63s

B) Θεωρούμε λείο κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο ΑΒ ακτίνας R=2m που εφάπτεται στο κάτω άκρο του, Β, με οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή ολίσθησης n=0.1. Σώμα μάζας m=2kgr αφήνεται να γλιστρήσει κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου από το άνω άκρο Α. Το σώμα περνάει από το σημείο Β του τεταρτοκυκλίου και συνεχίζει να κινείται κατά μήκος της οριζόντιας ευθείας ΒΓ. Αφού διανύσει διάστημα S=ΒΓ=2m στο οριζόντιο επίπεδο, συναντά λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^0$ στην κορυφή του οποίου είναι στερεωμένο το ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k=1000N/m (όπως στο σχήμα). Το σώμα ανέρχεται στο κεκλιμένο επίπεδο, συγκρούεται με το ελατήριο και το συμπιέζει κατά x=0.2m. Να βρεθούν: α) Η ταχύτητα του σώματος, τη στιγμή που συναντά το κεκλιμένο επίπεδο. β) Η απόσταση από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου (σημείο Γ), στην οποία το σώμα θα ηρεμήσει στιγμιαία. γ) Το ποσοστό της αρχικής μηχανικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμότητα εξαιτίας της τριβής. Δίνεται $g=10m/sec^2$.
(10 μονάδες)



Λύση
Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για τις θέσεις Α και Γ βρίσκουμε την ταχύτητα στο σημείο Γ.

α) $\frac{1}{2} m v_\Gamma^2 + nmgS = mgR \Rightarrow v_\Gamma = \sqrt{2(R-nS)g} = 6m/\sec$

β) Ομοίως από τη θέση Γ στη θέση Ε έχουμε:

$$\frac{1}{2} m v_\Gamma^2 = mgS' \eta\mu\varphi + \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow S' = \frac{m v_\Gamma^2 - kx^2}{2mg\eta\mu\varphi} \Rightarrow S' = 1.6m$$

γ) Οι απώλειες που γίνονται θερμότητα λόγω τριβών είναι: $Q_\mathrm{T} = nmgS = 4Joule$

Οπότε $a = \frac{Q_\mathrm{T}}{E_\mathrm{A}} \bullet 100\% = \frac{Q_\mathrm{T}}{mgR} \bullet 100\% = 10\%$