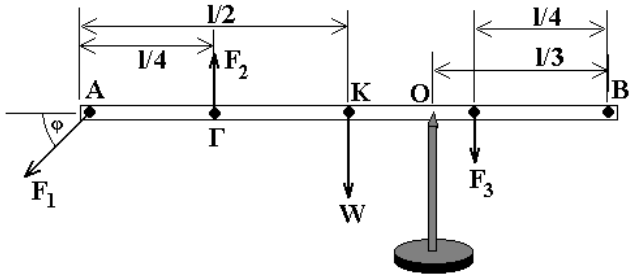
ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2004

3^{η} ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Η ομογενής ράβδος *AB* του σχήματος έχει μήκος *l*=12m, βάρος *W*=100N και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα, που διέρχεται από σημείο *O*. Στη ράβδο ασκούνται οι εξωτερικές δυνάμεις F_1, F_2 και F_3 με μέτρα F_1=50N, F_2=40N και F_3=30N αντίστοιχα. Αν $\varphi=30^o$ να υπολογίσετε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο ως προς τον άξονα περιστροφής της.



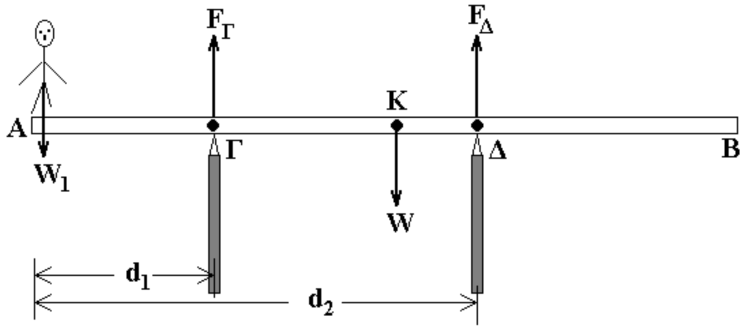
<u>Λύση</u>

Επειδή η ράβδος θεωρείται ομογενής, η δύναμη του βάρους της θα ασκείται στο μέσον σημείο *K*. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο *O* θα είναι: $\tau = \tau_{F1} + \tau_{F2} + \tau_W + \tau_{F3}$. Για να υπολογίσουμε τη ροπή της δύναμης $\mathbf{F_1}$ ως προς το σημείο O, αναλύουμε την $\mathbf{F_1}$ στην οριζόντια $\mathbf{F_{1x}}$ και την κατακόρυφο $\mathbf{F_{1y}}$ συνιστώσα. Ισχύει τ_{F1x}=0 (διότι ο φορέας της διέρχεται από το σημείο *O*) και $\tau_{F1_y} = +F_{1y}(l - l/3) = +F_1 \sin\phi (2l/3)$ ή $\tau_{F1_y} = 50 \cdot 0.5 \cdot \dfrac{2 \cdot 12}{3} = 200\ \mathrm{N\,m} \rightarrow \tau_{F1} = \tau_{F1x} + \tau_{F1y} = 200\ \mathrm{Nm}$.

Η αλγεβρική τιμή της ροπής για τη δύναμη $\mathbf{F_2}$ είναι $\tau_{F2} = -F_2(\mathit{\Gamma O})$ όπου (*ΓΟ*)= (*AB*)–(*AΓ*)–(*OB*)= *l*–*l*/4–*l*/3= 5*l*/12=5m, οπότε $\tau_{F2} = -40 \cdot 5 = -200\ \mathrm{Nm}$. Η ροπή της δύναμης $\mathbf{F_2}$ είναι αρνητική διότι, αν στη ράβδο ασκούταν μόνο η δύναμη αυτή, η ράβδος θα περιστρεφόταν κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Η ροπή του βάρους έχει την αλγεβρική τιμή $\tau_W = +W\,(KO)$ όπου (*KO*)= (*KB*)– (*OK*)= *l*/2–*l*/3= *l*/6=2m, οπότε $\tau_W = +W \cdot \dfrac{l}{6} = 100 \cdot 2 = 200\ \mathrm{Nm}$. Τέλος, η αλγεβρική τιμή της ροπής για τη δύναμη $\mathbf{F_3}$ είναι $\tau_{F3} = -F_3(l/3 - l/4) = -F_3(l/12)$ ή $\tau_{F3} = -30 \cdot \dfrac{12}{12} = -30\ \mathrm{Nm}$.

Επομένως, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου θα είναι $\tau = \tau_{F1} + \tau_{F2} + \tau_W + \tau_{F3} = +200 - 200 + 200 - 30 = 170\ \mathrm{Nm}$.

2. Η ομογενής σανίδα *AB* του σχήματος μήκους *AB*=*l*=8m και βάρους *W*=1000N στηρίζεται στα σημεία *Γ* και *Δ*, που απέχουν από το άκρο *A* αποστάσεις d_1=1m και d_2=5m αντίστοιχα. Ένας άνθρωπος βάρους W_1=1000N στέκεται στο άκρο του *A*. α) Αν η σανίδα ισορροπεί οριζόντια, να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτή. β) Μέχρι ποίου σημείου μπορεί να προχωρήσει ο άνθρωπος πάνω στη σανίδα, ώστε αυτή να μην ανατραπεί;



<u>Λύση</u>

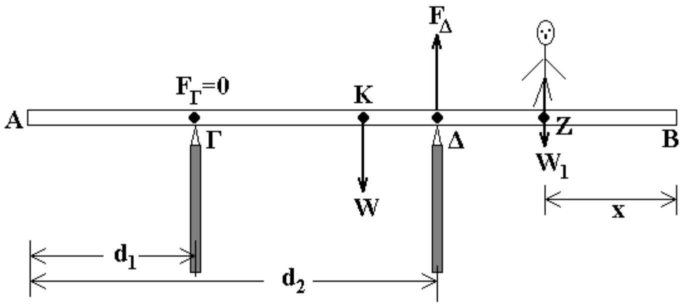
α) Στη σανίδα ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της **W**, που ασκείται στο μέσον της (σημείο *K*) επειδή η ράβδος θεωρείται ομοιογενής. Οι δυνάμεις $\mathbf{F_\Gamma}$ και $\mathbf{F_\Delta}$ από τα στηρίγματα. Η δύναμη που ασκεί ο άνθρωπος στη σανίδα που είναι ίση με το βάρος το $\mathbf{W_1}$.

Επειδή η σανίδα ισορροπεί, ισχύει ότι $\sum \mathbf{F} = 0$ ή $\mathbf{F_\Gamma} + \mathbf{F_\Delta} = \mathbf{W} + \mathbf{W_1}$ (σχέση 1) και $\sum \tau = 0$. Αν λάβουμε τις ροπές ως προς το σημείο εφαρμογής μιας από τις άγνωστες δυνάμεις λ.χ. τη $\mathbf{F_\Gamma}$ προκύπτει: $\tau_{W1} = +W_1 d_1$, $\tau_{F\Gamma} = 0$, $\tau_W = -W(K\Gamma) = -W(\frac{l}{2} - d_1)$ και $\tau_{F\Delta} = F_\Delta(d_2 - d_1)$.

Επομένως, $\sum \tau = 0 = \tau_{W1} + \tau_{F\Gamma} + \tau_W + \tau_{F\Delta} = W_1 d_1 + 0 - W(\frac{l}{2} - d_1) + F_\Delta(d_2 - d_1) \rightarrow$

$0 = 1000 \cdot 1 + 0 - 1000(\frac{8}{2} - 1) + F_\Delta(5 - 1) \rightarrow F_\Delta = 500\,\mathrm{N}$. Από τη σχέση 1 υπολογίζουμε ότι $F_\Gamma = 1500\,\mathrm{N}$.

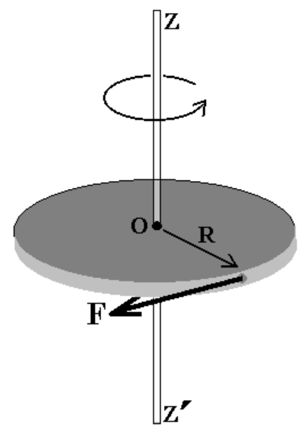
β) Καθώς ο άνθρωπος προχωρά από το σημείο *Γ* προς το σημείο *Β*, η δύναμη που δέχεται η σανίδα από το υποστήριγμα *Γ* ελαττώνεται. Ας υποθέσουμε ότι όταν ο άνθρωπος φθάσει σε ένα σημείο *Ζ*, που απέχει απόσταση *x* από το άκρο *Β*, η σανίδα αρχίζει να ανατρέπεται. Τη στιγμή εκείνη χάνει οριακά την επαφή της με το υποστήριγμα *Γ* και επομένως η δύναμη $\mathbf{F_\Gamma}$ μηδενίζεται. Για τη στιγμή αυτή, λίγο πριν ανατραπεί ισχύει $\sum \tau = 0$ (βλέπε σχήμα).



Λαμβάνοντας τις ροπές ως προς σημείο Δ έχουμε: $\tau_W = W(d_2 - \frac{l}{2})$, $\tau_{F\Delta} = 0$ και $\tau_{W1} = -W_1(\Delta Z)$, οπότε $\tau_W + \tau_{F\Delta} + \tau_{W1} = W(d_2 - \frac{l}{2}) + 0 - W_1(\Delta Z) = 0 \rightarrow$

$1000(5 - \frac{8}{2}) + 0 - 1000(\Delta Z) = 0 \rightarrow \Delta Z = 1\,\mathrm{m}$. Αλλά $(\Delta Z) = (\Delta B) - (BZ) = (l - d_2) - x$ οπότε $x = (l - d_2) - (\Delta Z) = (8-5) - 1 \rightarrow x = 2\mathrm{m}$.

3. Ο τροχός του σχήματος, μάζας M=2Kg και ακτίνας R=0.5m στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω=100rad/s γύρω από τον άξονα ZZ'. Τη χρονική στιγμή t_0=0 αρχίζει να ασκείται στο τροχό σταθερή δύναμη F εφαπτομενική σε αυτόν, με αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή t=5s ο τροχός να σταματήσει. α) Να υπολογιστεί η γωνιακή επιβράδυνση του τροχού. β) Να προσδιορισθεί το μέτρο της δύναμης F. γ) Να σχηματισθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\omega(t)$. Μπορείτε από τη γραφική αυτή παράσταση να υπολογίσετε τη γωνία στροφής του τροχού μέχρι να σταματήσει; (Δίνεται ότι η ροπή αδρανείας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $I=\frac{1}{2}MR^2$.)



__Λύση__

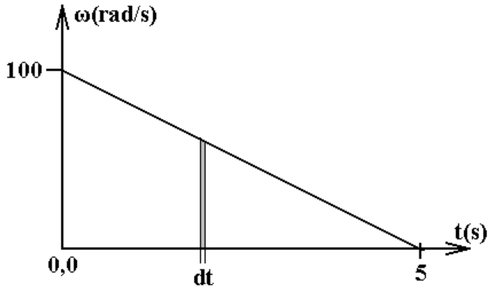
α) Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης λαμβάνουμε ότι $\sum \tau = I\alpha$ (σχέση 1). Επειδή $\sum \tau = \tau_F = FR$ και $I = \frac{1}{2}MR^2$ είναι σταθερά μεγέθη, προκύπτει ότι ο τροχός θα στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση **α**.

Από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης $a = \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \rightarrow a = \frac{0 - 100}{5 - 0} = -20\,\mathrm{rad/s^2}$.

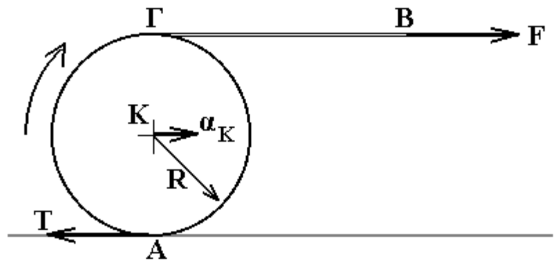
Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η γωνιακή ταχύτητα θα μειώνεται (δηλαδή θα έχουμε γωνιακή επιβράδυνση μέτρου a=20rad/s^2).

β) Από τη σχέση 1 λαμβάνουμε $FR = \frac{1}{2}MR^2 a \rightarrow F = \frac{MRa}{2} = \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 20}{2} = 10\,\mathrm{N}$.

γ) Η γωνιακή ταχύτητα μειώνεται με τη σχέση $\omega = \omega_0 - \alpha t$ ή $\omega = 100 - 20t$. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα. Για ένα πολύ μικρό (στοιχειώδες) χρονικό διάστημα dt (όπου θεωρούμε ω=σταθ) και από τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας έχουμε $\omega = \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t}$ ή $\mathrm{d}\,\theta = \omega\,\mathrm{d}\,t$ όπου dθ είναι η γωνία στροφής του τροχού στο χρόνο dt. Συνεπώς το σκιασμένο εμβαδόν στο διάγραμμα ω–t δίνει την τιμή της dθ και ολόκληρο το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση θα ισούται αριθμητικά με τη γωνία στροφής του τροχού, από τη στιγμή που ασκείται η δύναμη **F** μέχρι να σταματήσει: $\theta = \frac{100 \cdot 5}{2} = 250\,\mathrm{rad}$.



4. Γύρω από τον τροχό του σχήματος, μάζας *M*=4Kg και ακτίνας *R*=0.2m είναι τυλιγμένο αβαρές σχοινί, στο ελεύθερο άκρο του οποίου ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου *F*=12N. Αν ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, να υπολογισθούν α) η επιτάχυνση του κέντρου *K* του τροχού, η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και η επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F. β) Οι τιμές του συντελεστή στατικής τριβής για τις οποίες ο τροχός θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. (Δίνεται ότι η ροπή αδρανείας του τροχού ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του είναι *I*=½*MR*^{2} και *g*=10m/s^2.)



Λύση

α) Στην οριζόντια διεύθυνση ασκούνται στον τροχό οι εξής δυνάμεις: η δύναμη **F** από το σκοινί στο σημείο *Γ* του τροχού και η στατική τριβή **T** στο σημείο *A*, που έχει φορά προς τα αριστερά. Από τη μεταφορική κίνηση του τροχού λαμβάνουμε τη σχέση 1: $\sum \mathbf{F} = m a_{\mathrm{K}} \rightarrow F - T = m a_{\mathrm{K}}$, ενώ από τη στροφική του κίνηση έχουμε $\sum \tau = Ia \rightarrow FR + TR = \frac{1}{2}MR^2 a \rightarrow F + T = \frac{1}{2}MRa$. Εφόσον ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει $a_{\mathrm{K}} = aR$, οπότε $F + T = \frac{1}{2}M a_{\mathrm{K}}$ σχέση 2. Από τις σχέσεις 1 και 2 προκύπτει $2F = \frac{3}{2}M a_{\mathrm{K}} \rightarrow a_{\mathrm{K}} = \frac{4F}{3M} = \frac{4 \cdot 12}{3 \cdot 4} = 4\,\mathrm{m/s^2}$ σχέση 3. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού υπολογίζεται από τη σχέση $a_{\mathrm{K}} = aR \rightarrow a = \frac{a_{\mathrm{K}}}{R} = \frac{4}{0.2} = 20\,\mathrm{rad/s^2}$. Η επιτάχυνση $\mathbf{a_B}$ του σημείου *B* είναι ίση με την εφαπτομενική επιτάχυνση $\mathbf{a_Γ}$ του σημείου *Γ*, δηλαδή ισχύει η σχέση $\mathbf{a_B}$=$\mathbf{a_Γ}$. Επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, θα ισχύει κάθε στιγμή $u_{\mathrm{K}} = \omega R$ οπότε για το σημείο *A* θα έχουμε $u_{\mathrm{A}} = u_{\mathrm{K}} - \omega R = u_{\mathrm{K}} - u_{\mathrm{K}} = 0$, ενώ για το σημείο *Γ* $u_{\Gamma} = u_{\mathrm{K}} + \omega R = u_{\mathrm{K}} + u_{\mathrm{K}} = 2u_{\mathrm{K}}$.

Το σημείο *Κ* θα κινείται με επιτάχυνση μέτρου $a_{\mathrm{K}} = \dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{K}}}{\mathrm{d}t}$, ενώ το σημείο *Γ* με επιτάχυνση μέτρου $a_{\Gamma} = \dfrac{\mathrm{d}u_{\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(2u_{\mathrm{K}})}{\mathrm{d}t} = 2\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{K}}}{\mathrm{d}t} = 2a_{\mathrm{K}}$. Επομένως, το σημείο *Γ*, άρα και το σημείο *Β*, έχει διπλάσια επιτάχυνση από το κέντρο του τροχού: $a_{\mathrm{B}} = a_{\Gamma} = 2a_{\mathrm{K}} = 8\ \mathrm{m/s^2}$.

β) Αν θέσουμε τη σχέση 3 στη σχέση 1 λαμβάνουμε $T = F - m a_{\mathrm{K}} = 12 - 4\cdot 4 = -4\ \mathrm{N}$, άρα αφού προκύπτει *Τ*<0 σημαίνει ότι η στατική τριβή θα έχει φορά προς τα δεξιά και όχι προς τα αριστερά, όπως τη θεωρήσαμε αρχικά!! Άρα το μέτρο της στατικής τριβής είναι *Τ*=4Ν. Για να κυλίεται ο τροχός χωρίς να ολισθαίνει, θα πρέπει να ισχύει $T < \mu N = \mu M g \rightarrow \quad \mu > \dfrac{T}{Mg} = \dfrac{4}{4\cdot 10} \rightarrow \mu > 0.1$.

β) Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m u_1^2 + \frac{1}{2}m u_2^2 = 2\frac{1}{2}m\omega_1^2 l^2 = m\omega_1^2 l^2$ και η τελική εκφράζεται από τη σχέση $K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m u_1'^2 + \frac{1}{2}m u_2'^2 = 2\frac{1}{2}m\omega_2^2\frac{l^2}{4} = \dfrac{m\omega_2^2 l^2}{4}$. Από τη σχέση 1 προκύπτει με αντικατάσταση $K_{\tau\varepsilon\lambda} = \dfrac{m(16\omega_1^2)l^2}{4} = 4m\omega_1^2 l^2 \rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = 4K_{\alpha\rho\chi}$. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος θα είναι $\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = 3K_{\alpha\rho\chi} \rightarrow$ $\Delta K = 3m\omega_1^2 l^2 = 3\cdot 20\cdot(10)^2\cdot 1^2 = 6000\ \mathrm{Joule}$.

5. Άνθρωπος κάθεται με τεντωμένα με τα χέρια σε περιστρεφόμενη καρέκλα. Σε κάθε χέρι κρατά από ένα βαράκι και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1. α) Πόσο θα μεταβληθεί η κινητική ενέργεια κατά τη σύμπτυξη των χεριών του; β) Από πού προέρχεται αυτή η μεταβολή; (Υποδείξεις: οι τριβές του συστήματος θεωρούνται αμελητέες. Οι ροπές αδράνειας του ανθρώπου μαζί με τα βάρη ως προς τον άξονα περιστροφής με τεντωμένα τα χέρια και σε σύμπτυξη είναι I_1 και I_2 αντίστοιχα. Σύμπτυξη εννοούμε τη κλίση κατά 90^o των βραχιόνων προς τα πάνω με κατεύθυνση τους ώμους).

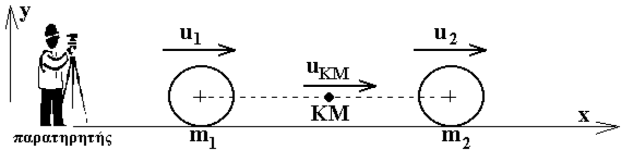
Λύση

α) Έστω ω_1 είναι η αρχική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ανθρώπου με τεντωμένα τα χέρια, $\mathbf{L}_{\alpha\rho\chi}$ είναι η αρχική στροφορμή του συστήματος και ω_2 η τελική γωνιακή ταχύτητα του ανθρώπου. Επειδή στο σύστημα άνθρωπος–βάρη δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές, η στροφορμή του διατηρείται και ισχύει $\mathbf{L}_{\alpha\rho\chi}=\mathbf{L}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \rightarrow \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ σχέση 1. Οι κινητικές ενέργειες του ανθρώπου(αρχική και τελική) θα είναι $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$ και $K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \rightarrow \quad \dfrac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \dfrac{I_2\omega_2^2}{I_1\omega_1^2}$. Εξ αιτίας της σχέσης 1 λαμβάνουμε $\dfrac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \dfrac{I_2}{I_1}\left(\dfrac{I_1}{I_2}\right)^2 = \dfrac{I_1}{I_2} \rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = \dfrac{I_1}{I_2}K_{\alpha\rho\chi}$.

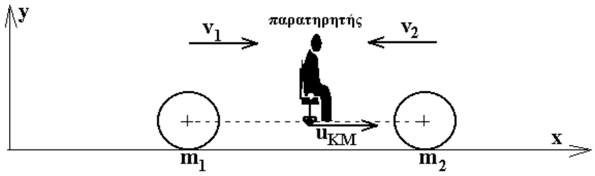
β) Εφόσον $I_1 > I_2$, θα έχουμε αύξηση της κινητικής ενέργειας κατά $\dfrac{I_1}{I_2}$ φορές της αρχικής, η οποία προέρχεται από την ενέργεια που ξόδεψε ο άνθρωπος για να συμπτύξει τα χέρια του.

6. Να μελετηθεί αν η κινητική ενέργεια του συστήματος δυο μαζών ως προς ακίνητο παρατηρητή (σύστημα αναφοράς είναι το έδαφος) και η κινητική ενέργεια του συστήματος ως προς κινούμενο παρατηρητή με ταχύτητα $\mathbf{u}_{KM}$ (σύστημα αναφοράς το κέντρο μάζας *ΚΜ*) είναι ίσες.

<u>**Λύση**</u>



Σχήμα 1: ακίνητος παρατηρητής

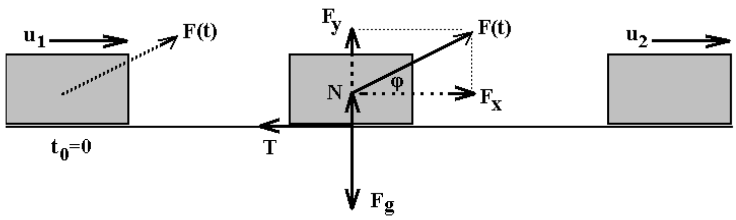


Σχήμα 2: κινούμενος παρατηρητής

<u>1η περίπτωση:</u> ο ακίνητος παρατηρητής (σχήμα 1) βλέπει τα σώματα να κινούνται με ταχύτητες $\mathbf{u}_1$ και $\mathbf{u}_2$, ενώ το κέντρο μάζας των (*ΚΜ*) να κινείται με ταχύτητα $\mathbf{u}_{KM} = \dfrac{m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2}{m_1 + m_2}$. Για τον παρατηρητή, το σύστημα έχει κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$.

<u>2η περίπτωση:</u> ο κινούμενος παρατηρητής (σχήμα 2) βλέπει τα σώματα να κινούνται με ταχύτητες $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$. Για τον παρατηρητή, το σύστημα έχει κινητική ενέργεια $K' = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ (η κινητική ενέργεια που μετράει ο κινούμενος παρατηρητής με ταχύτητα $\mathbf{u}_{KM}$ καλείται εσωτερική κινητική ενέργεια του συστήματος). Επειδή $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_{KM}$ και $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_{KM}$, οι κινητικές ενέργειες *K* και *K′* δεν είναι ίσες. Για να είναι ίσες θα πρέπει $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ και $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$, οπότε $\mathbf{u}_{KM} = 0$. Αυτό ισχύει στις περιπτώσεις όπου τα σώματα είναι ακίνητα ή τα σώματα κινούνται έτσι, ώστε $\mathbf{P}_{ολ} = 0$, οπότε $0 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{u}_{KM} \rightarrow \mathbf{u}_{KM} = 0$.

7. Σώμα μάζας *m*=10Kg κινείται σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή t_0=0 έχει ταχύτητα u_1=10m/s και δέχεται την επίδραση μιας δύναμης F με διεύθυνση που σχηματίζει με το επίπεδο κίνησης γωνία φ=45° και μέτρο που εκφράζεται σε συνάρτηση του χρόνου $F(t) = 20\sqrt{2}\,t$. Η δύναμη F βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με την ταχύτητα u_1. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι μ=0.1, να υπολογίσετε α) την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1=2s, β) το έργο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το σώμα για το χρονικό διάστημα t_0=0 μέχρι t_1=2s και γ) τους ρυθμούς μεταβολής της ορμής του σώματος τις χρονικές στιγμές t_0=0 μέχρι t_1=4s.

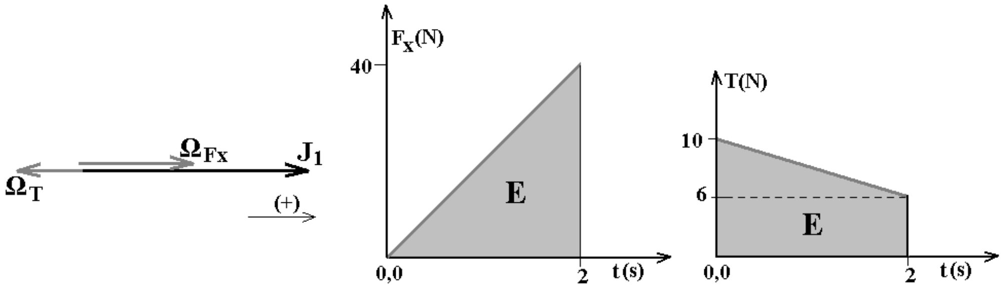


<u>**Λύση**</u>

α) Το σώμα κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο για όσο χρονικό διάστημα ισχύει η σχέση $F_y < F_g$ ή $F(t)\sin\varphi < F_g \rightarrow 20\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}t < 100 \rightarrow t < 5\text{s}$.

Αυτό σημαίνει ότι τη χρονική στιγμή *t*=5s, το σώμα αποσπάται από το επίπεδο.

Αναλύουμε τη δύναμη **F** σε δυο συνιστώσες και ισχύει $F_y = F(t)\sin\varphi = 20t$ και $F_x = F(t)\cos\varphi = 20t$. Για την τριβή ολίσθησης έχουμε $T = \mu N \rightarrow T = \mu(F_g - F_y) \rightarrow T = 0.1(100 - 20t)$ ή $T = 10 - 2t$. Για *t*=5s προκύπτει *T*=0, δηλαδή το σώμα αποσπάται από το έδαφος, οπότε *N*=0 (αναμενόμενο αποτέλεσμα).



Εφαρμόζοντας το θεώρημα ώθησης–ορμής, στη διεύθυνση της κίνησης και για το χρονικό διάστημα t=0–2s προκύπτει $\mathbf{J}_1+\mathbf{\Omega}_{\mathrm{Fx}}+\mathbf{\Omega}_{\mathrm{T}}=\mathbf{J}_2 \rightarrow J_1+\Omega_{\mathrm{Fx}}-\Omega_{\mathrm{T}}=J_2$ (βλέπε σχήμα). Τα μέτρα των ωθήσεων υπολογίζονται από τις γραφικές παραστάσεις: $\Omega_{\mathrm{Fx}}=\frac{1}{2}2\cdot 40=40\,\mathrm{Ns}$ και $\Omega_{\mathrm{T}}=\frac{10+6}{2}2=16\,\mathrm{Ns}$. Οπότε $mu_1+40-16=mu_2 \rightarrow 10\cdot 10+40-16=10\cdot u_2 \rightarrow u_2=12.4\,\mathrm{m/s}$.

β) Το έργο της $\sum\mathbf{F}$ υπολογίζεται από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, δηλαδή $W_{\sum\mathbf{F}}=\Delta E_{\mathrm{K}}=\frac{1}{2}mu_2^2-\frac{1}{2}mu_1^2$ ή $W_{\sum\mathbf{F}}=\frac{1}{2}m(u_2^2-u_1^2)=\frac{1}{2}10(12.4^2-10^2)=268.8\,\mathrm{Joule}$. (Υπόδειξη: $W_{\sum\mathbf{F}}=W_{\sum\mathbf{F}\mathrm{x}}+\cancel{W_{\sum\mathbf{F}\mathrm{y}}}^{=0}=W_{\sum\mathbf{F}\mathrm{x}}$, επειδή η συνιστώσα $\sum\mathbf{F}_{\mathrm{y}}$ είναι κάθετη προς τη μετατόπιση).

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής $\frac{\Delta\mathbf{J}}{\Delta t}$ έχει τη διεύθυνση της κίνησης, οπότε θα είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη στη διεύθυνση x, $\frac{\Delta\mathbf{J}}{\Delta t}=\sum(\mathbf{F})_{\mathrm{x}}$, αλλά $\sum(F)_{\mathrm{x}}=F_{\mathrm{x}}-T=20t-(10-2t)=22t-10$. Τη χρονική στιγμή t_0=0 είναι $\sum(F)_{\mathrm{x}}=-10\,\mathrm{N}$, οπότε $\left(\frac{\Delta\mathbf{J}}{\Delta t}\right)_{\mathrm{t=0}}=-10\frac{\mathrm{Kgm/s}}{\mathrm{s}}$ (το αρνητικό πρόσημο δείχνει φορά προς τα αριστερά). Τη χρονική στιγμή t_2=4s είναι $\sum(F)_{\mathrm{x}}=22\cdot 4-10=78\,\mathrm{N}$, οπότε $\left(\frac{\Delta\mathbf{J}}{\Delta t}\right)_{\mathrm{t=4}}=78\frac{\mathrm{Kgm/s}}{\mathrm{s}}$ (με φορά προς τα δεξιά).

8. Ανελκυστήρας κινείται προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα *u*=2m/s. Όταν η οροφή του απέχει 30m από τη στέγη του φρεατίου (σημείο *A*), αφήνεται να πέσει μπαλάκι του τένις από σημείο *B*, που απέχει απόσταση 10m από το σημείο *A*. Το μπαλάκι αναπηδά ελαστικά στην οροφή του ανελκυστήρα. α) Σε ποιο σημείο *h* του φρεατίου θα συναντήσει το μπαλάκι τον ανελκυστήρα; β) πόσο θα είναι το ύψος της αναπήδησης Δ*h*₁και γ) σε ποιο ύψος θα ξανασυναντήσει το μπαλάκι τον ανελκυστήρα; (Δίνεται *g*=9.81m/s²).

__Λύση__:

α) Η αρχική απόσταση του ανελκυστήρα από το μπαλάκι είναι Δs=20m. Ο χρόνος που διαρρέει μέχρι να συναντήσει την οροφή του ανελκυστήρα είναι: $\Delta s-ut_1=+\frac{1}{2}gt_1^2 \rightarrow$

$$t_1=\frac{-\frac{2u}{g}\pm\sqrt{\left(\frac{2u}{g}\right)^2+4\cdot\frac{2\Delta s}{g}}}{2} \rightarrow$$

t_1=1.82s. Κατά τη διάρκεια του χρόνου t_1, ο ανελκυστήρας θα έχει διανύσει απόσταση ut_1=3.64m και επομένως το σημείο συνάντησης θα είναι σε ύψος $h=30-3.64=26.36\,\mathrm{m}$ κάτω από το σημείο A.

β) Μέσα στο χρόνο t_1, το μπαλάκι θα έχει αποκτήσει ταχύτητα $u_1=gt_1$=17.85m/s. Επειδή η μάζα του ανελκυστήρα είναι κατά πολύ μεγαλύτερη, το κέντρο μάζας του συστήματος θα κινείται με την ταχύτητα του ανελκυστήρα, δηλαδή u_{KM}=2m/s. Ως προς το κέντρο μάζας, η ταχύτητα που θα έχει το μπαλάκι την ώρα της σύγκρουσης θα είναι $u_1^{(KM)}=u_1+u_{KM}=19.85\text{m/s}$. Στην περίπτωση της ελαστικής κρούσης, η μπάλα αλλάζει κατεύθυνση κατά 180^o και έχει το ίδιο μέτρο ταχύτητας (19.85m/s), στο οποίο όμως προστίθεται και η σχετική κίνηση του ανελκυστήρα προς τα πάνω (2m/s). Έτσι μετά την αναπήδηση, το μπαλάκι θα έχει ταχύτητα $u_1'=21.85\text{m/s}$ και θα φθάσει σε ύψος $\Delta h_1=\dfrac{u_1'^2}{2g}=24.33\text{m}$. Το σημείο αυτό απέχει απόσταση 26.35–24.33=2.02m από το σημείο A. Στο σημείο αυτό αρχίζει το μπαλάκι τη δεύτερη κάθοδό του.

γ) Μελετάμε τώρα το φαινόμενο ακριβώς μετά από την πρώτη συνάντηση. Ο χρόνος ανόδου Δt_1 (για το μπαλάκι) δίνεται από τη σχέση $u(\Delta h_1)=u_1'-g\Delta t_1$. Για $u(\Delta h_1)=0$ προκύπτει $\Delta t_1=\dfrac{u_1'}{g}=\dfrac{21.85}{9.81}=2.23\text{s}$.

Ο χρόνος καθόδου (για το μπαλάκι) δίνεται από τη σχέση $s_1=\dfrac{1}{2}g\Delta t_2^2$. Όσο διαρκεί το φαινόμενο, ο ανελκυστήρας θα έχει ανέβει κατά $u(\Delta t_1+\Delta t_2)$. Θέτω $s_2=\Delta h_1-u(\Delta t_1+\Delta t_2)$ και θα πρέπει $s_1=s_2\rightarrow$

$$\frac{1}{2}g\Delta t_2^2=\Delta h_1-u(\Delta t_1+\Delta t_2)\rightarrow \qquad \Delta t_2^2+\frac{2u}{g}\Delta t_2+\frac{2}{g}(u\Delta t_1-\Delta h_1)=0\rightarrow \qquad \Delta t_2^2+0.408\Delta t_2-4.11=0\rightarrow$$

$\Delta t_2=1.83\text{s}$. Επομένως, ο συνολικός χρόνος (ανόδου και καθόδου) για τη δεύτερη συνάντηση θα είναι $\Delta T=\Delta t_2+\Delta t_1$=1.83+2.2=4.03s. Ο ανελκυστήρας θα έχει ανέβει κατά $\Delta h_2=u\Delta T=2\cdot 4.03=8.06\text{s}$. Η δεύτερη συνάντηση θα γίνει ψηλότερα κατά 8.06m της προηγούμενης, δηλαδή $26.35-8{,}06=18.29\text{m}$ κάτω από το σημείο A.