Ονοματεπώνυμο ______________________________

Τμήμα ______________________________

ΘΕΜΑ 1

1ο Ερώτημα

Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα

α) $\int (x^2 + 2x + 1)e^{7x} dx$ β) $\int \frac{7x^2 - 51x + 89}{(x+4)(x-5)^2} dx$

Απάντηση

α) θέτω $u = x^2 + 2x + 1$ και $\upsilon = \frac{1}{7}e^{7x}$, επομένως $d\upsilon = e^{7x}$ και $du = (2x+2)dx$.

$$\int (x^2 + 2x + 1)e^{7x} dx = \int u \ \ d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon \ \ du = (x^2 + 2x + 1)\frac{1}{7}e^{7x} - \int \frac{1}{7}e^{7x}(2x+2)dx =$$

$$\frac{1}{7} \ (x^2 + 2x + 1) \ e^{7x} - \frac{1}{7}\int UdV \ \ \text{όπου } U = 2x + 2 \ \ \text{και} \ \ V = \frac{1}{7}e^{7x} \Rightarrow dV = e^{7x}$$

$$\frac{1}{7} \ (x^2 + 2x + 1) \ e^{7x} - \frac{1}{7}\left[UV - \int VdU\right] = \frac{1}{7} \ (x^2 + 2x + 1) \ e^{7x} - \frac{1}{7}\left[(2x+2)\frac{1}{7}e^{7x} - \int \frac{2}{7}e^{7x}dx\right] =$$

$$\frac{1}{7} \ (x^2 + 2x + 1) \ e^{7x} - \frac{1}{49}\left[(2x+2)e^{7x} - 2\int e^{7x}dx\right] = \frac{1}{7} \ (x^2 + 2x + 1) \ e^{7x} - \frac{1}{49}\left[(2x+2)e^{7x} - \frac{2}{7}e^{7x}\right] =$$

$$\frac{1}{7} \ (x^2 + 2x + 1) \ e^{7x} - \frac{1}{49}(2x+2)e^{7x} + \frac{2}{343}e^{7x} + c = \frac{e^{7x}\left(49x^2 + 84x + 37\right)}{343} + c$$

β)

$$\frac{7x^2 - 51x + 89}{(x+4)(x-5)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x-5)} + \frac{C}{(x-5)^2} = \frac{A(x-5)^2 + B(x+4)(x-5)^2 + C(x+4)}{(x+4)(x-5)^2}$$

$$7x^2 - 51x + 89 = A(x-5)^2 + B(x+4)(x-5)^2 + C(x+4) =$$

$$A(x^2 - 10x + 25) + B(x^2 - x - 20) + C(x+4) = (A+B)x^2 + (-10A - B + C)x + (25A - 20B + 4C)$$

Επομένως έχουμε:

$$\left.\begin{cases} A + B = -7 \\ -10A - B + C = -51 \\ 25A - 20B + 4C = 89 \end{cases}\right\} \Rightarrow A = 5, \ B = 2, \ C = 1$$

Έτσι το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{7x^2 - 51x + 89}{(x+4)(x-5)^2} dx = \int \frac{5}{x+4}dx + \int \frac{2}{(x-5)}dx + \int \frac{1}{(x-5)^2}dx = 5\ln|x+4| + 2\ln|x-5| - (x-5)^{-1} + c$$

2ο Ερώτημα

Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $e^{\sin x} + e^{\sin y} = 2$ στο σημείο (0,π)

Απάντηση
Η εξίσωση της εφαπτομένης μιας καμπύλης f(x) στο σημείο (x_o, y_o) είναι

$y-y_0=f'(x_o)(x-x_0)$ με $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$

Παραγωγίζοντας ως προς x και τα δύο μέλη της εξίσωσης $e^{\sin x}+e^{\sin y}=2$ έχουμε:

$$\frac{d\left(e^{\sin x}+e^{\sin y}-2\right)}{dx}=0\Rightarrow e^{\sin x}\cos x+e^{\sin y}\cos y\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-e^{\sin x}\cos x}{e^{\sin y}\cos y}$$

Επομένως στο (0,π) είναι $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-e^{\sin 0}\cos 0}{e^{\sin\pi}\cos\pi}=\dfrac{-1}{-1}=1$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι y-π =x

ΘΕΜΑ 2

1ο Ερώτημα

Να μελετηθεί η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)} \quad \text{για } x\in R-\{0,1\}$$

Λύση

α) η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίου ορισμού της

β) το διάγραμμά δεν τέμνει τους άξονες και για $\forall x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ f(x)>0 και $\forall x\in(0,1)$, f(x)<0

γ) η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και $f'(x)=\dfrac{1-2x}{x^2(x-1)^2}$

Είναι $f'(x)=0$ για x $=\dfrac{1}{2}$ (πιθανή θέση ακροτάτου)

Διερευνούμε το πρόσημο της $f'(x)$. Ισχύει $\forall x\in(0,\frac{1}{2})$ $f'(x)>0$, και $\forall x\in(\frac{1}{2},1)$ $f'(x)<0$

Άρα το $\dfrac{1}{2}$ είναι θέση τοπικού μέγιστου.

δ) η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και

$$f''(x)=2\frac{3x^2-3x+1}{x^3(x-1)^3}$$

Είναι $f''(x)\neq 0$ για $\forall x\in R-\{0,1\}$, οπότε δεν υπάρχουν σημεία καμπής

Διερευνούμε το πρόσημο της $f''(x)$.

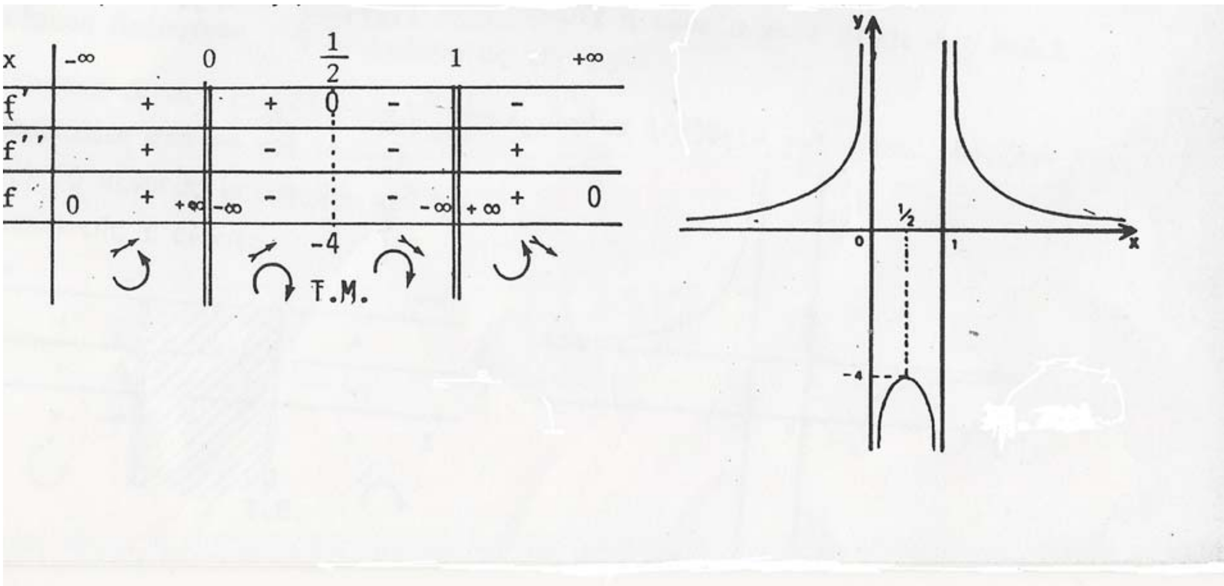
Ισχύει $\forall x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ $f''(x)>0$, και $\forall x\in(0,1)$ $f''(x)<0$ άρα

f κυρτή στο διαστήματα $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ και f κοίλη στο (0,1) ε) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(x-1)}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x(x-1)}=0$ οπότε η ευθεία y=0 οριζόντια ασύμπτωτη του διαγράμματος στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Επίσης

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x(x-1)}=+\infty,\ \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x(x-1)}=-\infty,\ \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x(x-1)}=-\infty,\ \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x(x-1)}=+\infty$$

οπότε η ευθείες x= 0, x=1 είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες του διαγράμματος από δεξιά κι αριστερά



2ο Ερώτημα

Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} -2x+y+z=a \\ x-2y+z=b \\ x+y-2z=c \end{Bmatrix}$$

όπου οι άγνωστοι x,y,z ανήκουν στο R και α,b,c παράμετροι που επίσης ανήκουν στο R.

Απάντηση

Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2(4-1)-1(-2-1)+(1+2)=-6+3+3=0$$

Επομένως το σύστημα έχει λύση και μάλιστα άπειρες λύσεις μόνο εάν $D_x=D_y=D_z=0$

$$D_x=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & -2 & 1 \\ c & 1 & -2 \end{vmatrix}=a(4-1)-1(-2b-c)+(b+2c)=3a+3b+3c$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & -2 \end{vmatrix} = -2(-2b-c) - a(-2-1) + (c-b) = 3a + 3b + 3c$$

$$D_z = \begin{vmatrix} -2 & 1 & a \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = -2(-2c-b) - 1(c-b) + a(1+2) = 3a + 3b + 3c$$

Άρα θα πρέπει 3α +3b+3c =0 δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις μόνο αν α+b+c=0

Σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα $\begin{Bmatrix} -2x+y+z=a \\ x-2y+z=b \\ x+y-2z=c \end{Bmatrix}$ είναι ισοδύναμο με το $\begin{Bmatrix} -2x+y+z=a \\ x-2y+z=b \end{Bmatrix}$

γιατί η τρίτη εξίσωση προκύπτει από το άθροισμα αυτών των δύο δεδομένου ότι α+b+c=0. Η λύσεις του συστήματος είναι λοιπόν:

$$\begin{Bmatrix} -2x+y+z=a \\ x-2y+z=b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2x+y+z=a \\ x=2y-z+b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2(2y-z+b)+y+z=a \\ x=2y-z+b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} -4y+2z-2b+y+z=a \\ x=2y-z+b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -3y=a-3z+2b \\ x=2y-z+b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=-\frac{a}{3}+z-\frac{2b}{3} \\ x=2y-z+b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y=-\frac{a}{3}+z-\frac{2b}{3} \\ x=2(-\frac{a}{3}+z-\frac{2b}{3})-z+b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=-\frac{a}{3}+z-\frac{2b}{3} \\ x=-\frac{2a}{3}+2z-\frac{4b}{3}-z+b \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y=-\frac{a}{3}+z-\frac{2b}{3} \\ x=-\frac{2a}{3}+z-\frac{b}{3} \end{Bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 3

1ο Ερώτημα

1. Να βρεθεί το λ ώστε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(2,0) και Β(5,-1) να είναι κάθετη στην ευθεία ε: $(\lambda^2-1)x+(\lambda+1)y+2004=0$
2. Να βρεθεί το μ ώστε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(2,0) και Β(5,-1) να διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία Ρ(λ,0) και Σ (3μ+2, 2)

Λύση

1) Έστω $\vec{AB}=(3,-1)$ το διάνυσμα το παράλληλο στην ευθεία που περνά από τα σημεία Α και Β

Για να είναι η εξίσωση ευθεία θα πρέπει $\lambda^2-1\neq 0 \quad \text{και} \quad \lambda+1\neq 0$ δηλαδή $\lambda\neq -1$ (1)

Έστω $\vec{a}$ = (λ+1, -λ^2+1) το διάνυσμα που είναι παράλληλο στην ευθεία ε .

Για να είναι $AB \perp \varepsilon$ αρκεί

$$\vec{AB}\ \vec{a}=0 \Leftrightarrow 3(\lambda+1)+(-1)(-\lambda^2+1)=0 \Leftrightarrow 3\lambda+3+\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda+2=0$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει ρίζες λ=-2 και λ= -1 Από αυτές λόγω της (1) είναι δεκτή η λ=-2 , άρα για να είναι $AB \perp \varepsilon$ θα πρέπει λ= -2

2) Το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος που περνά από τα σημεία Ρ και Σ έχει συντεταγμένες

$x_M=\dfrac{\mu+3\mu+2}{2}=2\mu+1$ και $y_M=\dfrac{0+2}{2}=1$ δηλαδή Μ (2μ+1,1)

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με το διάνυσμα $\vec{AB}$ και είναι

$$y-0=-\frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

Για να διέρχεται η ευθεία ΑΒ από το Μ θα πρέπει οι συντεταγμένες του Μ να επαληθεύουν την εξίσωσή της δηλαδή

$$1=-\frac{1}{3}(2\mu+1)+\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3=-2\mu-1+2 \Leftrightarrow \mu=-1$$

2^o Ερώτημα

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+\lambda x\right)$$

Λύση

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\lambda x=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\lambda x=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\lambda x$$ αλλά επειδή

$x\to+\infty$ περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,+\infty)$ οπότε $|x|=x$ άρα

$$f(x)=x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\lambda x=x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\lambda\right)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\lambda\right)=1+\lambda$

1) αν 1+λ>0 $\Leftrightarrow \lambda>-1$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\lambda) = +\infty(1+\lambda) = +\infty$$

2) αν 1+λ<0 $\Leftrightarrow \lambda < -1$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\lambda) = +\infty(1+\lambda) = -\infty$$

3) αν 1+λ=0 $\Leftrightarrow \lambda = -1$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\lambda) = +\infty(1+\lambda) = +\infty\, 0 \text{ απροσδιοριστία}$$

Αντικαθιστούμε στην f(x) όπου λ= -1 κι έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1-x^2}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(-1+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)} = -\frac{1}{2}$$

Να απαντηθούν και τα 3 πλήρη θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα ενώ τα ερωτήματα των θεμάτων έχουν ίση συνεισφορά στην βαθμολογία του κάθε θέματος. Υπενθυμίζεται ότι θα πρέπει να συμπληρώσετε το βαθμό 5 σε κάθε εξέταση και ότι ο συνολικός σας βαθμός των γραπτών εξετάσεων θα είναι 0.5 (βαθμός Μηχανικής) +0.3 (βαθμός στα Μαθηματικά) +0.2 (βαθμός στον Ηλεκτρομαγνητισμό).

Καλή Επιτυχία