<u>$2^η$ Εργασία</u>

Ερώτηση 1a]

Αναπτύσσω το δεξιό μέλος της ισότητας την οποία προσπαθώ να αποδείξω :

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{A-B}{2} &= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \\ \sin\frac{A+B}{2} &= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \qquad 2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2} = 2\left[\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\cos^2\frac{A}{2}\right] +$$

$$+\,2\left[\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin^2\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\right] =$$

$$2\left[\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\sin^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{B}{2}\right) + \cos\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\right)\right] =$$

$$2\left[\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{B}{2}\right] = \sin\mathrm{A} + \sin\mathrm{B} \qquad \text{Ο.Ε.Δ.}$$

Παρατήρηση

Ενας ταχύτερος τρόπος απόδειξης είναι ο παρακάτω :

Παρατηρώ ότι

$$\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \qquad (2)$$

Θέτοντας όπου $\alpha = \dfrac{A+B}{2}$

$\beta = \dfrac{A-B}{2}$

η σχέση (2) γίνεται

$$\sin\mathrm{B} + \sin\mathrm{A} = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \text{Ο.Ε.Δ.}$$

Ερώτηση 1b]

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= C \sin(2\pi\nu_1 t) \\ y_2(t) &= C \sin(2\pi\nu_2 t) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$y_1(t) + y_2(t) = C\,[\sin(2\pi\nu_1 t) + \sin(2\pi\nu_2 t)] \;\Rightarrow$

(χρησιμοποιώντας την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα)

$y_1(t) + y_2(t) = C\,[2\cos\{\pi t(\nu_1 - \nu_2)\}\sin\{\pi t(\nu_1 + \nu_2)\}]$

$\Rightarrow [y_1(t) + y_2(t))]^2 = 4C^2\cos^2\{\pi t(\nu_1 - \nu_2)\}\sin^2\{\pi t(\nu_1 + \nu_2)\}$

$$\Rightarrow [y_1(t) + y_2(t)]^2 = 4C^2\left[\frac{1+\cos 2\pi t(\nu_1 - \nu_2)}{2}\right]\left[\frac{1-\cos 2\pi t(\nu_1 + \nu_2)}{2}\right]$$

$\Rightarrow [y_1(t) + y_2(t)]^2 = C^2\,[1 + \cos 2\pi t(\nu_1-\nu_2)]\,[1 - \cos 2\pi t(\nu_1+\nu_2)]$ Ο.Ε.Δ.

Ερώτηση 1c]

Ο πρώτος όρος της ισότητας

$[y_1(t) + y_2(t)]^2 = C^2\,[1 + \cos 2\pi t(\nu_1-\nu_2)]\,[1 - \cos 2\pi t(\nu_1+\nu_2)]$

μηδενίζεται όταν

$1 + \cos 2\pi t(\nu_1-\nu_2) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos 2\pi t(\nu_1-\nu_2) = -1 \Rightarrow \cos 2\pi t(\nu_1-\nu_2) = \cos\pi$

$\Rightarrow \quad 2\pi t(\nu_1-\nu_2) = 2\kappa\pi + \pi \qquad \kappa \in Z$

$\Rightarrow \quad 2\pi t(\nu_1-\nu_2) = n\pi \qquad n = \pm1, \pm3, \pm5 \ldots$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{n}{2(\nu_1 - \nu_2)} \qquad n = \pm1, \pm3, \pm5 \ldots$$

Ο πρώτος όρος της (1) μηδενίζεται δηλαδή για χρονικές στιγμές t οι οποίες ικανοποιούν την παραπάνω σχέση.

Ερώτηση 2]

$$\left.\begin{aligned} &\sin 3x = \sin(x+2x) = \sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x \\ &\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ &\sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\sin 3x = \sin x\,(\cos^2 x - \sin^2 x\,) + 2 \sin x \cos x \cos x =$

$$= \sin x \cos^2 x - \sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x \qquad (3)$$

$\cos 3x = \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$

$$= \cos x\,(\cos^2 x - \sin^2 x\,) - \sin x\, 2 \sin x \cos x = \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3) και (4), η $f(x) = \sin 3x \cos 3x$ γίνεται

$f(x) = \sin 3x \cos 3x = (3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x)\cdot(\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x) =$

$$= 3\sin x \cos^5 x - 9 \sin^3 x \cos^3 x - \sin^3 x \cos^3 x + 3 \sin^5 x \cos x =$$

$$= 3\sin x \cos^5 x - 10 \sin^3 x \cos^3 x + 3 \sin^5 x \cos x$$

Παρατήρηση : Χρήση της ταυτότητας $\sin^2 x + \cos^2 x$ μπορεί να δώσει και άλλες παραδεκτές απαντήσεις.

Ερώτηση 3a]

$$\frac{\alpha}{\beta} = 0.000001 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 10^{-6}$$

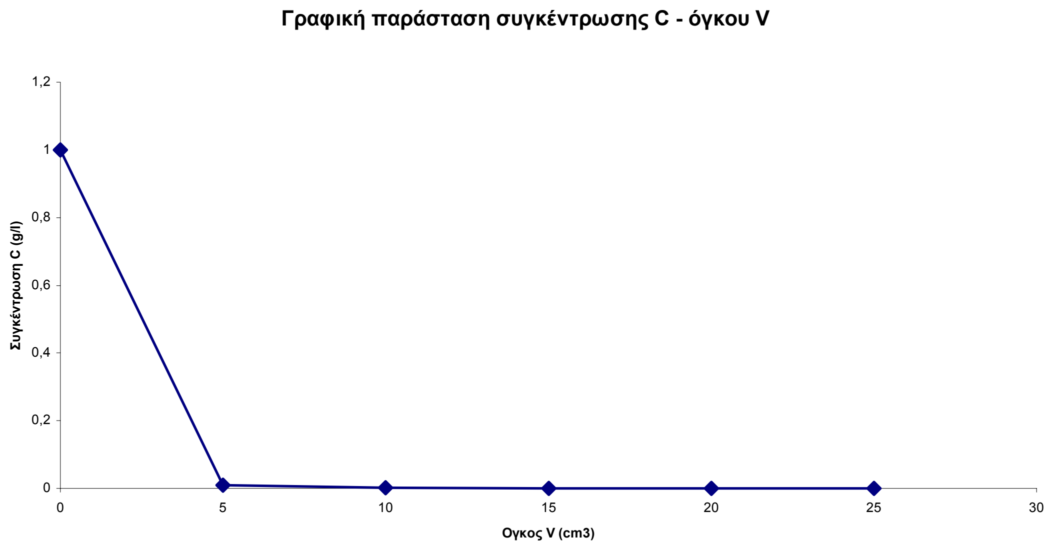
$$\Rightarrow \log_{10} \frac{\alpha}{\beta} = \log_{10} 10^{-6} \Rightarrow \log_{10} \alpha - \log_{10} \beta = \log_{10} (10^{-6})$$

$$\Rightarrow \log_{10} \alpha - \log_{10} \beta = -6 \qquad \text{ή}$$

$$\log_{10} \alpha - \log_{10} \beta = 6$$

Ερώτηση 3b]

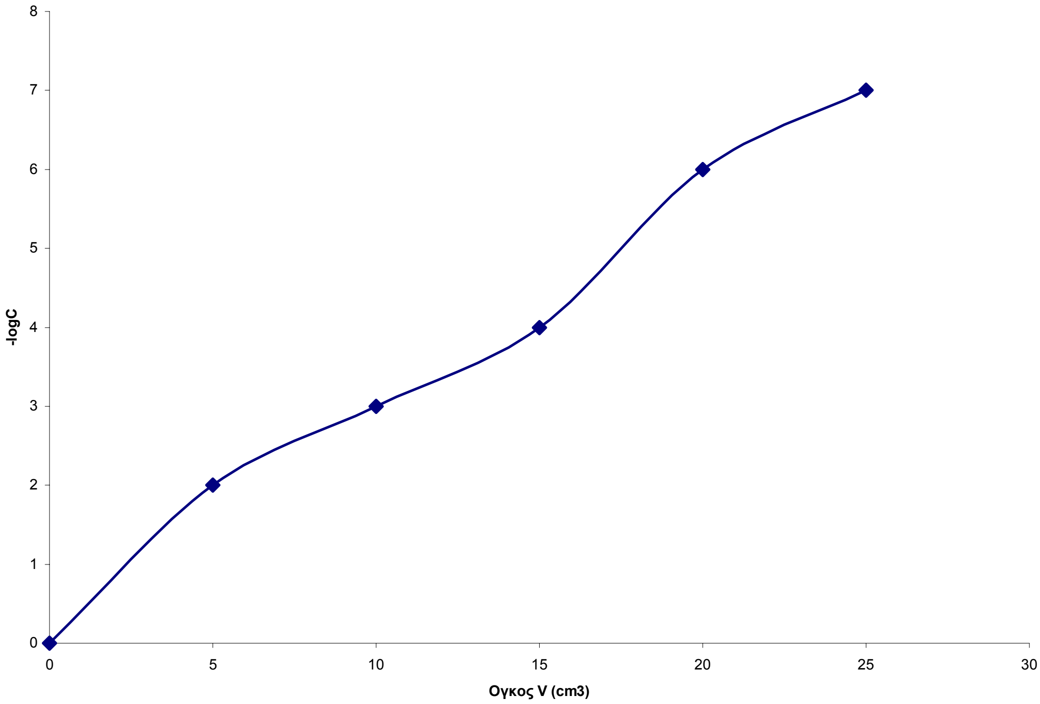
i)



ii)

Ογκος V(cm^3)	Συγκέντρωση C (g/l)	-logC
0.0	1.0	0
5.0	$1.0 \cdot 10^{-2}$	2
10.0	$1.0 \cdot 10^{-3}$	3
15.0	$1.0 \cdot 10^{-4}$	4
20.0	$1.0 \cdot 10^{-6}$	6
25.0	$1.0 \cdot 10^{-7}$	7

Γραφική παράσταση -logC - όγκου V



Σχολιασμός : Η χρήση λογαριθμικής απεικόνισης είναι αναγκαία όταν το πεδίο τιμών μιάς τουλάχιστον απο τις δύο μεταβλητές περιλαμβάνει αριθμούς οι οποίοι διαφέρουν κατά τάξεις μεγέθους. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η χρήση γραμμικής κλίμακας δεν επιτρέπει την σαφή εξαγωγή συμπερασμάτων. Παραδείγματα λογαριθμικών απεικονίσεων αποτελούν οι καμπύλες pH – όγκου προστιθεμένου διαλύματος σε μία ογκομέτρηση (Χημεία), το διάγραμμα λαμπρότητας αστέρα – ενεργού θερμοκρασίας (διάγραμμα Hertzsprung – Russell) στην Αστροφυσική και το διάγραμμα διφασικής ανάπτυξης (biphasic growth) κυττάρων (Βιολογία), στο οποίο αναπαριστάται ο λογάριθμος του αριθμού κυττάρων μιάς καλλιέργειας σαν συνάρτηση του χρόνου.

Στην άσκηση 3 φαίνεται πράγματι οτι η γραφική παράσταση συγκέντρωσης C - όγκου V δεν δίνει με ευδιάκριτο τρόπο το γεγονός οτι η συγκέντρωση $1.0 \cdot 10^{-7}$ g/l είναι 1000 φορές μικρότερη απο την συγκέντρωση $1.0 \cdot 10^{-4}$ g/l. Εδώ η χρήση γραμμικής κλίμακας δεν επιτρέπει την εξαγωγή ποσοτικών συμπερασμάτων απο την ανάγνωση της αντίστοιχης γραφικής παράστασης. Αντίθετα, στην γραφική παράσταση –logC - V, τα ζεύγη τιμών είναι ευδιάκριτα και μία ποσοτική συζήτηση είναι εφικτή (αρκεί βέβαια να λάβουμε υπ’ όψη μας οτι η κλίμακα του άξονα της συγκέντρωσης είναι λογαριθμική).

Παρατήρηση : Η σχέση $(\beta - \alpha) \approx \beta$ αποδεικνύεται ως εξής :

$$\beta - \alpha = \beta\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) = \beta(1 - 0.000001) \approx \beta \cdot 1 = \beta$$

Ερώτηση 4a]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos x$$ (βιβλίο, ιδιότητα 3, σελ. 274)

$= 2 \,.\, 1 = 2$

Ερώτηση 4b]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x+x)-\sin(4x-x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[\sin 4x\cos x + \cos 4x\sin x] - [\sin 4x\cos x - \cos 4x\sin x]}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 4x\,\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\cos 4x\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$= 2 \,.\, 1 = 2$

Ερώτηση c] $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

Παρατήρηση : Η ερώτηση 4α] λύνεται και ως εξής :

$\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}$ (πολλαπλασιάζω και διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με το 2).

$\displaystyle = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2$

Ανάλογη τεχνική επίλυσης μπορεί να εφαρμοστεί και για την ερώτηση 4β].

Ερώτηση 5]

- Για την διερεύνηση της ύπαρξης των ορίων καθώς x $\to$ 0, εξετάζω με την βοήθεια της αριθμομηχανής μου, τις τιμές των συναρτήσεων f(x) και g(x).

x	f(x) = $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$	g(x) = $(1+2x)^{\frac{3}{x}}$
0.1	0.501	237.3763
-0.1	0.501	
0.01	0.50001	380.2345
-0.01	0.50001	
0.001	0.5	401.0187
-0.001	0.5	
0.0001	0.5	403.1868
-0.0001	0.5	
0.00001	0.5	403.4046
-0.00001	0.5	
0.000001	0.5	403.4264
-0.000001	0.5	
0.0000001	0.5	403.4285
-0.0000001	0.5	

Η παραπάνω ανάλυση υποδεικνύει οτι

$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{0.5}$ και

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \boxed{403}$

- Θα προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε τα όρια αυτά χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του βιβλίου :

1) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\ x^2}$

[πολλαπλασιάζουμε δηλ. αριθμητή και παρονομαστή με $(1+\sqrt{1-x^2}\,)$ ώστε να επιτύχουμε απαλοιφή του x^2].

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x^2)}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$$ Ο.Ε.Δ.

2) Για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to 0^+} g(x)$:

Λογαριθμώ:

$\ln g(x) = \frac{3}{x} \ln(1+2x) \Rightarrow \ln g(x) = \frac{2\cdot 3}{2x} \ln(1+2x)$ [πολλαπλασίασα δηλ. αριθμητή και παρονομαστή με τον αριθμό 2]

$$\Rightarrow \ln g(x) = 6 \frac{\ln(1+2x)}{2x}$$

Άρα $\lim_{x\to 0^+} \ln g(x) = 6 \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{2x}$

Δίδεται όμως ότι $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$

Επομένως $\lim_{x\to 0^+} \ln g(x) = 6 \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 6$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) = e^6 = 403.4288$

Ερώτηση 6]

α) $f'(x) = \left(x^4\right)' e^{2x^2+3x+2} + x^4\left(e^{2x^2+3x+2}\right)'$ (κανόνας 5, σελίδα 293) $\Rightarrow$

$f'(x) = 4x^3 e^{2x^2+3x+2} + x^4\left(e^{2x^2+3x+2}\right)\left(2x^2+3x+2\right)'$ (κανόνας αλυσίδας, σελ. 299, 300)

$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 e^{2x^2+3x+2} + x^4\left(e^{2x^2+3x+2}\right)(4x+3) \Rightarrow$

$f'(x) = (4x^5+3x^4+4x^3)\left(e^{2x^2+3x+2}\right)$

β) $f''(x) = [(4x^5+3x^4+4x^3)\left(e^{2x^2+3x+2}\right)]' \Rightarrow$

$f''(x) = (4x^5+3x^4+4x^3)'\left(e^{2x^2+3x+2}\right) + (4x^5+3x^4+4x^3)\left(e^{2x^2+3x+2}\right)'$ (κανόνας 5, σελίδα 293)

$$\Rightarrow\ f''(x) = (20x^4 + 12x^3 + 12x^2)\left(e^{2x^2+3x+2}\right) + (4x^5 + 3x^4 + 4x^3)\left(e^{2x^2+3x+2}\right)\left(2x^2 + 3x + 2\right)'$$

[εδώ παραγωγίσαμε τις δυνάμεις (κανόνας 2, σελίδα 291) και την σύνθετη εκθετική συνάρτηση (κανόνας αλυσίδας, σελ. 299, 300)]

$$\Rightarrow\ f''(x) = (20x^4 + 12x^3 + 12x^2)\left(e^{2x^2+3x+2}\right) + (4x^5 + 3x^4 + 4x^3)\left(e^{2x^2+3x+2}\right)\left(4x + 3\right)$$

$$\Rightarrow\ f''(x) = (16x^6 + 24x^5 + 45x^4 + 24x^3 + 12x^2)e^{2x^2+3x+2}$$

γ) $g'(x) = [\sin(2x+3)]'\cos(5x-1) + \sin(2x+3)[\cos(5x-1)]'$ **(**κανόνας 5, σελ. 293)

$\Rightarrow\quad g'(x) = \cos(2x+3)(2x+3)'\cos(5x-1) + \sin(2x+3)[-\sin(5x-1)](5x-1)'$ [εδώ χρησιμοποιήθηκαν οι κανόνες παραγώγισης τριγωνομετρικών συναρτήσεων (σελ. 295) και ο κανόνας αλυσίδας, σελ. 299, 300]

$$\Rightarrow\ g'(x) = 2\cos(2x+3)\cos(5x-1) - 5\sin(2x+3)\sin(5x-1)$$

δ) $g''(x) = 2[\cos(2x+3)]'\cos(5x-1) + 2\cos(2x+3)[\cos(5x-1)]'$

$+[-5\sin(2x+3)'\sin(5x-1) - 5\sin(2x+3)[\sin(5x-1)]'$ (κανόνας αλυσίδας, σελ. 299, 300)

$$\Rightarrow\ g''(x) = 2[-\sin(2x+3)](2x+3)'\cos(5x-1) + 2\cos(2x+3)[-\sin(5x-1)](5x-1)'$$

$$+[-5\cos(2x+3)(2x+3)'\sin(5x-1) - 5\sin(2x+3)[\cos(5x-1)](5x-1)'$$

(κανόνες παραγώγισης τριγωνομετρικών συναρτήσεων (σελ. 295) και κανόνας αλυσίδας, σελ. 299, 300)

$$\Rightarrow\ g''(x) = -4\sin(2x+3)\cos(5x-1) - 10\cos(2x+3)\sin(5x-1)$$

$$-10\cos(2x+3)\sin(5x-1) - 25\sin(2x+3)\cos(5x-1)$$

$$\Rightarrow\ g''(x) = -29\sin(2x+3)\cos(5x-1) - 20\cos(2x+3)\sin(5x-1)$$

ε) $h(x) = \ln[(\ln(x)] \Rightarrow h'(x) = \ln[(\ln(x)]' = \dfrac{1}{\ln x}(\ln x)'$ [η συνάρτηση ln[ln(x)] είναι σύνθετη και η παραγώγισή της γίνεται ακολουθώντας τον κανόνα της αλυσίδας (σελ. 299, 300) και τους κανόνες στην σελίδα 295)

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

στ) $h''(x) = (\frac{1}{x\ln x})' = -\frac{(x[\ln(x)])'}{[x\ln(x)]^2}$ (κανόνας 6, σελ. 294) $\Rightarrow$

$h''(x) = -\frac{(x[\ln(x)])'}{[x\ln(x)]^2} = -\frac{(x)'\ln(x) + x(\ln(x))'}{x^2(\ln(x))^2}$ (κανόνας 5, σελ. 293) $\Rightarrow$

$$h''(x) = -\frac{\ln(x) + x\frac{1}{x}}{x^2(\ln(x))^2} \Rightarrow h''(x) = -\frac{1}{x^2\ln(x)} - \frac{1}{x^2(\ln(x))^2} \Rightarrow$$

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2\ln(x)}(1 + \frac{1}{\ln(x)})$$

7.

$$
\begin{aligned}
v(t) &= x'(t) \\
&= \frac{m_0c^2}{F}\left[\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2}-1\right]' \\
&= \frac{m_0c^2}{F}\frac{1}{2\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2}}\left[1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2\right]' \\
&= \frac{m_0c^2}{F}\frac{1}{2\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2}}\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 2t \\
&= c\frac{\frac{F}{m_0c}t}{\sqrt{1+\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} v(t) &= c\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{F}{m_0c}t}{\sqrt{\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2\left(\frac{1}{\left(\frac{F}{m_0c}\right)^2 t^2}+1\right)}} \\
&= c\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{F}{m_0c}t}{\frac{F}{m_0c}t\sqrt{1+\left(\frac{m_0c}{F}\right)^2\frac{1}{t^2}}} \\
&= c\frac{1}{\sqrt{1+0}} = c
\end{aligned}
$$

Η ταχυτητα v τεινει ασυμπτωτικα στη μεγιστη δυνατη ταχυτητα του φωτος c. Μια δυναμη F δεν μπορει να επιταχυνει το σωματιο πιο γρηγορα απο c.

8. (c) $f(t) = 5\sin(100\pi t)$

i. Η μεγιστη απομακρυνση ειναι οταν $\sin(100\pi t) = 1$ δηλ. 5 cm

ii. Τα ακροτατα εμφανιζονται οταν

$$
\begin{aligned}
\frac{df(t)}{dt} = 0 &\Rightarrow 500\pi\cos(100\pi t) = 0 \Rightarrow \cos(100\pi t) = 0 \\
&\Rightarrow 100\pi t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{(2k+1)}{200}\text{sec} \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Οι ζητουμενοι χρονοι ειναι 0.005sec, 0.015sec, 0.025sec, . . . , 0.095sec.
iii. Για την ολοκληρωση ενος κυκλου του περιοδικου φαινομενου πρεπει το οριομα της τριγωνομετρικης συναρτησης να αλλαζει κατα 2π. Αρα

$$100\pi T = 2\pi \Rightarrow T = 0.02\text{sec}$$

(d)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = 500\pi \cos(100\pi t)\text{m/sec}$$

$$x(t) = 0 \Rightarrow \sin(100\pi t) = 0 \Rightarrow 100\pi t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k}{100}\text{sec} \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Οι ζητουμενοι χρονοι ($0 \le t \le 0.10$sec) ειναι 0sec, 0.01sec, 0.02sec, . . . , 0.10sec ($k = 0, 1, 2, \ldots, 10$).

$$\frac{dv(t)}{dt} = -50000\pi^2 \sin(100\pi t)$$

Αρα οταν $x(t) = 0 \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = 0 \Rightarrow v(t) \to$ ακροτατη τιμη $= \pm 500\pi$m/sec.

9.

$$\begin{aligned}
\int x^5 \sin x \, dx &= -\int x^5 \, d\cos x = -x^5 \cos x + \int dx^5 \ \cos x \\
&= -x^5 \cos x + \int 5x^4 \cos x \, dx = -x^5 \cos x + 5 \int x^4 \, d\sin x \\
&= -x^5 \cos x + 5x^4 \sin x - \int 20x^3 \sin x \, dx \\
&= -x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 20 \int x^3 \, d\cos x \\
&= -x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 20x^3 \cos x - 20 \int dx^3 \ \cos x \\
&= -x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 20x^3 \cos x - 60 \int x^2 \cos x \, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x \, dx &= \int x^2 \, d\sin x = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx \\
&= x^2 \sin x + 2 \int x \, d\cos x \\
&= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx \\
&= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c
\end{aligned}$$

Αρα

$$\begin{aligned}\int x^5 \sin x\,dx &= -x^5\cos x + 5x^4 \sin x + 20x^3\cos x - 60x^2 \sin x\\ &\quad -120x\cos x + 120\sin x + c\end{aligned}$$

Ομοιως

$$\begin{aligned}\int x^5 \mathrm{e}^x\,dx &= \int x^5\,d\mathrm{e}^x = x^5\mathrm{e}^x - \int 5x^4\mathrm{e}^x\,dx\\ &= x^5\mathrm{e}^x - 5x^4\mathrm{e}^x + 5\int 4x^3\mathrm{e}^x\,dx\\ &= x^5\mathrm{e}^x - 5x^4\mathrm{e}^x + 20x^3\mathrm{e}^x - 20\int 3x^2\mathrm{e}^x\,dx\\ &= x^5\mathrm{e}^x - 5x^4\mathrm{e}^x + 20x^3\mathrm{e}^x - 60x^2\mathrm{e}^x + 60\int 2x\mathrm{e}^x\,dx\\ &= x^5\mathrm{e}^x - 5x^4\mathrm{e}^x + 20x^3\mathrm{e}^x - 60x^2\mathrm{e}^x + 120x\mathrm{e}^x - 120e^x + c\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^2 x - 7\cos x + 12} &= 2\int\frac{\sin x\cos x\,dx}{\cos^2 x - 7\cos x + 12} = -2\int\frac{\cos x\,d\cos x}{\cos^2 x - 7\cos x + 12}\\ &= -2\int\frac{y\,dy}{y^2-7y+12} = -2\int\frac{y\,dy}{(y-4)(y-3)}\\ &= -2\int\frac{4\,dy}{y-4} + 2\int\frac{3\,dy}{y-3} = -8\ln|y-4| + 6\ln|y-3| + c\\ &= 8\ln|\cos x - 4| + 6\ln|\cos x - 3| + c\end{aligned}$$

$$\int\frac{dx}{x\ln x} = \int\frac{d\ln x}{\ln x} = \int\frac{dy}{y} = \ln|y| + c = \ln|\ln x| + c$$

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\mathrm{e}^{-x} + 2 + 2\mathrm{e}^x} &= \int\frac{\mathrm{e}^x\,dx}{1+2\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}} = \int\frac{d\mathrm{e}^x}{1+2\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}}\\ &= \int\frac{dy}{2y^2+2y+1} = \tan^{-1}(1+2y) + c = \tan^{-1}(1+2\mathrm{e}^x) + c\end{aligned}$$

οπου $\tan^{-1}$ = τοξ. εφαπτομενης.

$$\int\frac{x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\frac{x(x+4)}{x(x^2+x-2)}\,dx + \int\frac{6\,dx}{x(x^2+x-2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{(x+4)}{(x-1)(x+2)}\,dx + \int \frac{6\,dx}{x(x-1)(x+2)} \\
&= \int \frac{5\,dx}{3(x-1)} - \int \frac{2\,dx}{3(x+2)} + \int \frac{6\,dx}{3(x-1)} - \int \frac{6\,dx}{2x} + \int \frac{6\,dx}{6(x+2)} \\
&= \frac{5}{3}\ln|x-1| - \frac{2}{3}\ln|x+2| + 2\ln|x-1| - 3\ln|x| + \ln|x+2| + c \\
&= \frac{11}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| - 3\ln|x| + c
\end{aligned}
$$

11. (a) Οι δυο καμπυλες τεμνονται στο $x = 1$ (λυση της $\sqrt{x} = x^2$). Επειδη το ορισμενο ολοκληρωμα ισουται με το εμβαδον κατω απο την καμπυλη της υπο ολοκληρωσης συναρτησης, οταν η συναρτηση ειναι παντου θετικα ορισμενη, θα εχουμε οτι:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 x^{1/2}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx \\
&= \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}(1^{3/2}-0) - \frac{1}{3}(1^3-0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

(b) Οι δυο καμπυλες τεμνονται οταν

$$
3x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}
$$

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι:

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} 3x\,dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^4 \frac{1}{x}\,dx = 3\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \ln x|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^4 \\
&= 3(\frac{1/3}{2} - 0) + \ln 4 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 \approx 2.4356
\end{aligned}
$$

(c) Οι δυο καμπυλες τεμνονται οταν $\sqrt{1-x^2} = x \Rightarrow 1 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Το εμβαδον ειναι[1]:

$$
\begin{aligned}
E_3 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left.\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)\right|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\
&= (\frac{1}{4} - 0) + \{(0 + \frac{\pi}{4}) - (\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8})\} = \frac{\pi}{8} \approx 0.3927
\end{aligned}
$$

[1] Θετουμε $x = \sin\theta$ οποτε $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta = \int\cos^2\theta\,d\theta = \int\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x$

ΑΣΚΗΣΗ 12

(a) $\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\cos t\,\hat{i}+\frac{d}{dt}\sin t\,\hat{j}+\frac{d}{dt}2t\,\hat{k}=-\sin t\,\hat{i}+\cos t\,\hat{j}+2\hat{k}$

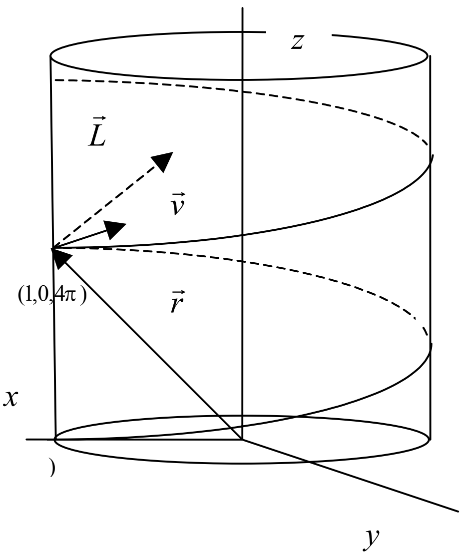
$$\vec{L}(t)=\vec{r}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \cos t & \sin t & 2t\\ -\sin t & \cos t & 2\end{vmatrix}=(2\sin t-2t\cos t)\hat{i}+(-2\cos t-2t\sin t)\hat{j}+\hat{k}$$

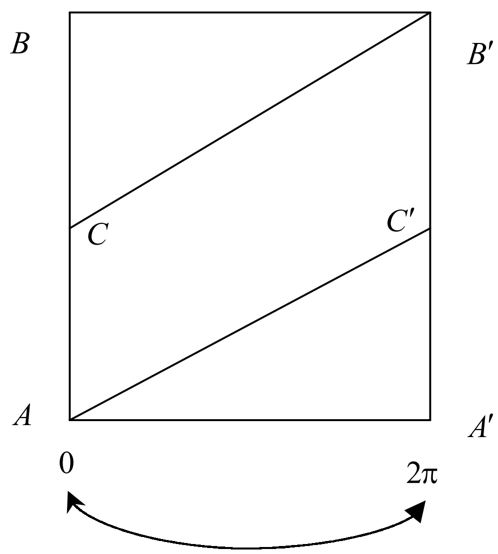
$$\vec{\tau}(t)=\frac{d\vec{L}}{dt}=2t\sin t\,\hat{i}-2t\cos t\,\hat{j}$$

(b) $\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{v}=0$

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \cos t & \sin t & 2t\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=2t\sin t\,\hat{i}-2t\cot\hat{j}$$

(c) Η κίνηση λαμβάνει χώρα πάνω στην επιφάνεια κυλίνδρου με άξονα τον άξονα των z και βάση τον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $r=1$.Στο σχήμα αριστερά δίνουμε την κίνηση του σωματιδίου στον 3-διαστατο χώρο, ενώ δεξιά αναπαρίσταται η κίνηση στο επίπεδο ανάπτυγμα της κυλινδρικής επιφάνειας (όταν τα σημεία A B και C ταυτιστούν με τα A' B' και C', δηλαδή διπλώσουμε την επιφάνεια $AA'BB'$, θα σχηματιστεί η τρισδιάστατη κυλινδρική επιφάνεια).





$\vec{r}(2\pi)=(1,0,4\pi)\quad \vec{v}(2\pi)=(0,1,2)\quad \vec{L}(2\pi)=(-4\pi,-2,1)$

(d) $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+2^2}=\sqrt{5}\quad S=\int_0^{2\pi}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{5}\,dt=2\pi\sqrt{5}$

Επίσης $S=AC'=\sqrt{AA'^2+A'C'^2}=\sqrt{(2\pi)^2+(4\pi)^2}=2\pi\sqrt{5}$

ΑΣΚΗΣΗ 13

(a) $v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{wV}{g}\left(1-e^{-gt/w}\right)\right) = Ve^{-gt/w}$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(wt - \frac{w^2}{g}\left(1-e^{-gt/w}\right)\right) = w\left(1-e^{-gt/w}\right)$$

(b)

$$v_x(0) = Ve^{-gt/w}\Big|_{t=0} = V \quad \text{και} \quad v_y(0) = w\left(1-e^{-gt/w}\right)\Big|_{t=0} = 0$$

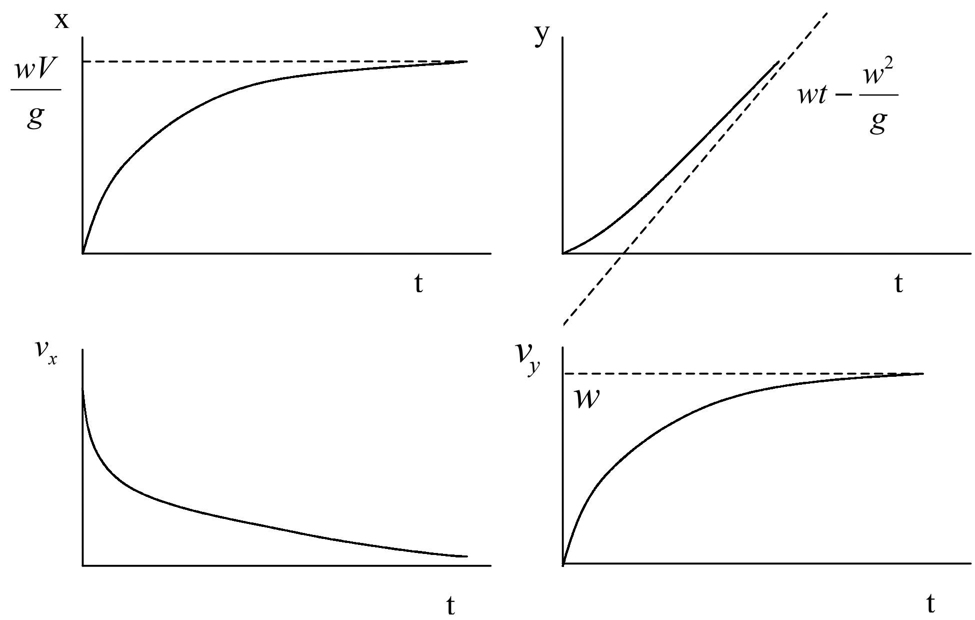
$$v_x(\infty) = \lim_{t\to\infty} Ve^{-gt/w} = 0 \quad \text{και} \quad v_y(\infty) = \lim_{t\to\infty} w\left(1-e^{-gt/w}\right) = w$$

(c) $\vec{F} = -\dfrac{mgV}{w}e^{-gt/w}\,\hat{i} + mge^{-gt/w}\,\hat{j}$

(d) $\vec{F}(0) = \vec{f}(0) + mg\,\hat{j}$

$$\lim_{t\to\infty}\vec{F}(t) = 0$$

(e)



ΑΣΚΗΣΗ 14

Η απόσταση σημείου (x, y) από ευθεία με εξίσωση $ax + by + c = 0$ δίνεται από

$$d = \frac{|\,ax + by + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Έστω τυχόν σημείο Μ της παραβολής. Σύμφωνα με τον ορισμό θα πρέπει να ισαπέχει από την διευθετούσα και από την αρχή των αξόνων:

$$d = \frac{|\,2x + y - 10\,|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Άρα

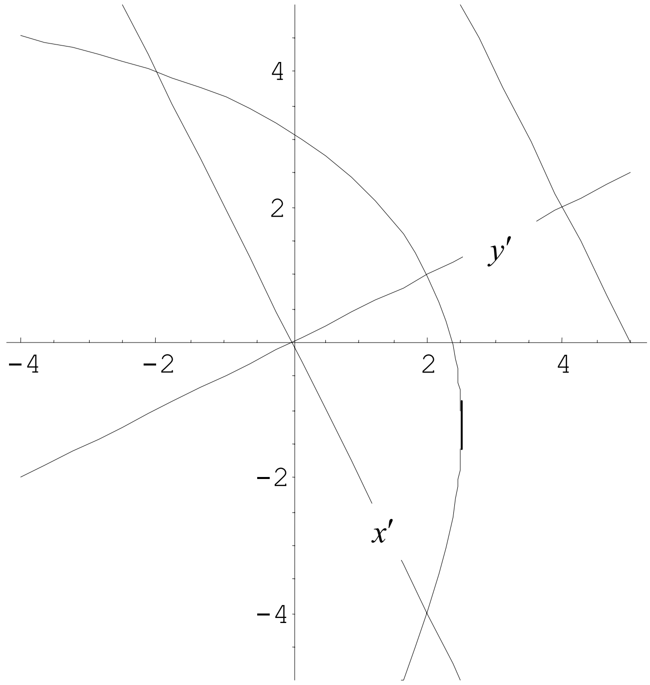
$$\frac{1}{5}(x-2y)^2+4y+8x-20=0$$

και ορίζοντας το νέο όρθο-κανονικό σύστημα

$$x'=\frac{x-2y}{\sqrt{5}} \text{ και } y'=\frac{2x+y}{\sqrt{5}}$$

η εξίσωση της παραβολής γίνεται

$$y'=-\frac{\sqrt{5}}{20}x'^2+\sqrt{5}$$

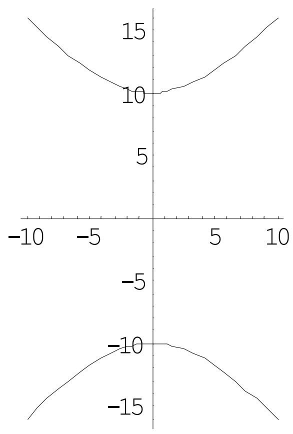


ΑΣΚΗΣΗ 15

Η εξίσωση της υπερβολής $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{64}=1$

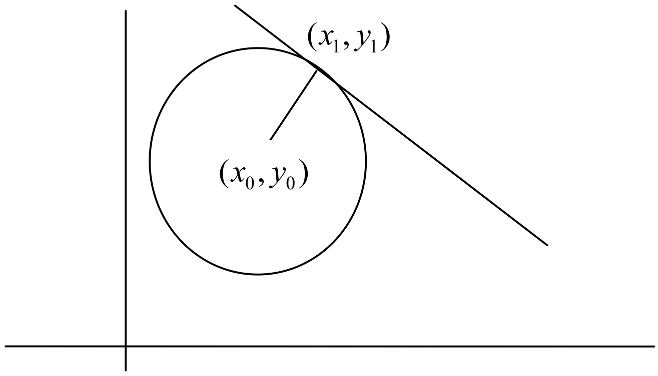
Οι εστίες είναι στα σημεία $\pm\gamma$, όπου $\gamma=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{100+64}\approx 12.8$

και η εκκεντρότητα είναι $\frac{\gamma}{a}\approx 1.28$



ΑΣΚΗΣΗ 16

(a)
Το σημείο (x_0, y_0) απέχει απόσταση r από την ευθεία με εξίσωση $ax + by + c = 0$



Το σημείο (x_1, y_1) ικανοποιεί δύο συνθήκες:
$ax_1 + by_1 + c = 0$ (1)
και επίσης ανήκει στην ευθεία που περνά από το (x_0, y_0) και είναι κάθετη στην $ax + by + c = 0$ στο (x_1, y_1). Το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ευθείας $ax + by + c = 0$ είναι ανάλογο του
$\hat{e}_1 \propto (b, -a)$
και στην ευθεία που συνδέει τα (x_0, y_0) και (x_1, y_1) είναι
$\hat{e}_2 \propto (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$
άρα επειδή $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$
$b(x_1 - x_0) - a(y_1 - y_0) = 0$ (2)
Λύνοντας (1) και (2) ως προς x_1 και y_1, και αντικαθιστώντας στην
$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$
έχουμε την ζητούμενη σχέση.

(b)
Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$\frac{|4x_0 - 2y_0 + 3|}{\sqrt{20}} = \frac{|x_0 + 2y_0 + 4|}{\sqrt{5}}$$

από όπου έχουμε δύο εξισώσεις
$4x_0 - 2y_0 + 3 = 2(x_0 + 2y_0 + 4)$
$4x_0 - 2y_0 + 3 = -2(x_0 + 2y_0 + 4)$
και από την ε_3 $\quad x_0 + y_0 - \frac{1}{2} = 0$
και έχουμε
1^{η} λύση : $(x_0, y_0) = (1, -\frac{1}{2})$, $r = \frac{4}{\sqrt{5}}$

2^{η} λύση: $(x_0, y_0) = (-3, \frac{7}{2})$, $r = \frac{8}{\sqrt{5}}$

Για τα σημεία επαφής

1^{η} λύση:

$$(x_1 - 1)^2 + (y_1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{16}{5} \quad \text{και} \quad 4x_1 - 2y_1 + 3 = 0$$

$$(x_2 - 1)^2 + (y_2 + \frac{1}{2})^2 = \frac{16}{5} \quad \text{και} \quad x_2 + 2y_2 + 4 = 0$$

$$(x_1, y_1) = (-\frac{3}{5}, \frac{3}{10}) \quad (x_2, y_2) = (\frac{1}{5}, -\frac{21}{10})$$

2^{η} λύση:

$$(x_1 + 5)^2 + (y_1 - \frac{7}{2})^2 = \frac{64}{5} \quad \text{και} \quad 4x_1 - 2y_1 + 3 = 0$$

$$(x_2 + 5)^2 + (y_2 - \frac{7}{2})^2 = \frac{64}{5} \quad \text{και} \quad x_2 + 2y_2 + 4 = 0$$

$$(x_1, y_1) = (\frac{1}{5}, \frac{19}{10}) \quad (x_2, y_2) = (-\frac{23}{5}, \frac{3}{10})$$