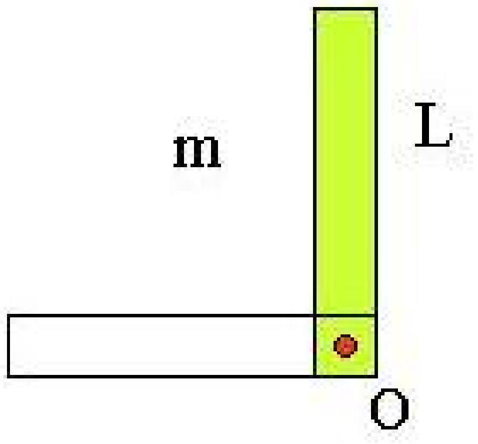
ΕΡΓΑΣΙΑ 5

(Παράδοση 5/6/05)

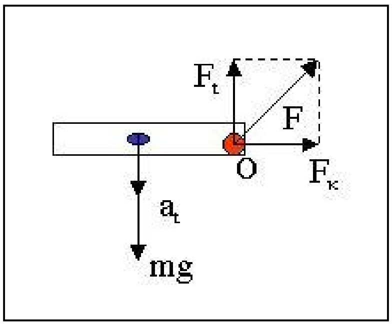
Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους L είναι στερεωμένη σε οριζόντιο άξονα O. Αρχικά βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση και αφήνεται να πέσει ελεύθερα σε πεδίο βαρύτητας g. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας O στη ράβδο τη στιγμή που αυτή περνά από την οριζόντια θέση. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.



Λύση



Το κέντρο μάζας της ράβδου εκτελεί περιστροφική κίνηση, διαγράφοντας κύκλο με ακτίνα L/2. Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη ράβδο είναι το βάρος της και η δύναμη που ασκεί το σημείο στήριξης (σχήμα). Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας έχει δύο συνιστώσες:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_k \,, \quad (1)$$

όπου $\vec{a}_t$ η επιτρόχιος και $\vec{a}_k$ η κεντρομόλος επιτάχυνση. Για να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας πάνω στη ράβδο, αρκεί να υπολογιστεί η επιτάχυνσή του.

Η επιτρόχιος επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ράβδος εκτελεί περιστροφική κίνηση για την οποία ως προς το σημείο O ισχύει:

$$\tau = I \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \cdot \alpha \,, \qquad (2)$$

όπου Ι είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το Ο, ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κέντρου μάζας και α η γωνιακή επιτάχυνσή του.
Η ροπή αδράνειας Ι είναι:

$$I = I_k + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{4} mL^2 = \frac{1}{3} mL^2 \qquad (3).$$

Επίσης ισχύει:

$$a_t = \alpha \cdot \frac{L}{2} \qquad (4)$$

Βάσει των σχέσεων (3) και (4) η σχέση (2) γίνεται:

$$\tau = I \cdot a \Rightarrow mg\frac{L}{2} = \frac{1}{3} mL^2 \frac{a_t}{L/2} \Rightarrow a_t = \frac{3}{4} g \qquad (5)$$

Επομένως :

$$F_t = m(g - \alpha_t) = \frac{1}{4} mg \qquad (6)$$

Η κεντρομόλος δύναμη είναι :

$$F_k = m \cdot a_k = m \frac{u^2}{L/2} \; (7),$$

όπου u η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή που η ράβδος είναι οριζόντια . Αυτή υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{u^2}{(L/2)^2} = 2I\frac{u^2}{L^2} \qquad (8)$$

Η παραπάνω σχέση λόγω (3) δίδει:

$$mg\frac{L}{2} = 2\frac{1}{3} mL^2 \frac{u^2}{L^2} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{3}{4} gL} \qquad (9)$$

Άρα η κεντρομόλος δύναμη (7)θα είναι :

$$F_k = m \cdot a_k = m \frac{u^2}{L/2} = \frac{3}{2} mg$$

Επομένως η δύναμη που ασκεί το σημείο στήριξης στη ράβδο έχει μέτρο:

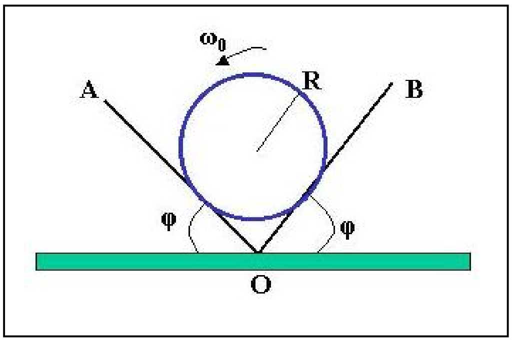
$$F = \sqrt{{F_k}^2 + {F_t}^2} = \frac{\sqrt{37}}{4} mg$$

και σχηματίζει γωνία με την οριζόντια :

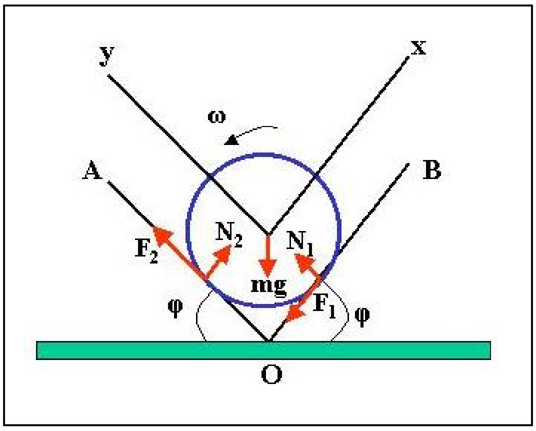
$$\phi = \arctan\left(\frac{F_t}{F_k}\right) = \arctan\left(\frac{1}{6}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Σε κοίλο κύλινδρο με λεπτά τοιχώματα, μάζας m και ακτίνας R δίνουμε αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 και τον τοποθετούμε στη γωνία AOB (βλ. σχήμα). Ξέρουμε ότι ο συντελεστής τριβής μεταξύ γωνίας και κυλίνδρου είναι μ και ότι $\varphi=\pi/4$. Βρείτε πόσες στροφές θα κάνει ο κύλινδρος μέχρι να σταματήσει και σε πόσο χρόνο θα συμβεί αυτό.



Λύση



Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στον κύλινδρο είναι το βάρος του, οι τριβές F_1 και F_2 και οι αντιδράσεις N_1, N_2 (βλ. σχήμα).

Οι δυνάμεις τριβής προκαλούν την επιβράδυνση και τελικά το σταμάτημα του κυλίνδρου. Επομένως για την περιστροφική του κίνηση ισχύει:

$$\tau = I\frac{d\omega}{dt} = -(F_1 + F_2)R, \qquad (1)$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου. Επειδή όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στο λεπτό φλοιό θα ισχύει $I = mR^2$ (2)

Ο αριθμός των περιστροφών που θα κάνει ο κύλινδρος είναι $N = \dfrac{\theta}{2\pi}$ (3)

Η γωνιακή επιτάχυνση μπορεί να γραφτεί σα συνάρτηση της γωνίας περιστροφής:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \quad (4)$$

Άρα

$$\begin{aligned}
&\tau = I\frac{d\omega}{dt} = -\left(F_1 + F_2\right)R \Rightarrow mR^2\omega\frac{d\omega}{d\theta} = -\left(F_1 + F_2\right)R \Rightarrow \\
&\Rightarrow mR^2\omega d\omega = -\left(F_1 + F_2\right)Rd\theta \Rightarrow \\
&\Rightarrow mR^2\int_{\omega_0}^{0}\omega d\omega = -\left(F_1 + F_2\right)R\int_0^{\theta}d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 = \left(F_1 + F_2\right)R\theta \Rightarrow \qquad (5) \\
&\Rightarrow \theta = \frac{mR\omega_0^2}{2\left(F_1 + F_2\right)}
\end{aligned}$$

Άρα για την εύρεση της γωνίας θ αρκεί να υπολογιστούν οι τριβές F_1και F_2

Για το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος (λαμβάνοντας υπ` όψη ότι $A\hat{O}B = \dfrac{\pi}{2}$), οι συνθήκες ισορροπίας του κυλίνδρου δίνουν:

$$\begin{aligned}
&N_1 + F_2 = mg\cos\phi \Rightarrow N_1 = mg\cos\phi - F_2 \\
&N_2 = mg\cos\phi + F_1
\end{aligned} \qquad (6)$$

Άρα οι δυνάμεις τριβής είναι:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \mu N_1 = \mu\cdot\left(mg\cos\phi - F_2\right) \\
F_2 &= \mu N_2 = \mu\cdot\left(mg\cos\phi + F_1\right)
\end{aligned} \qquad (7)$$

Συνεπώς η γωνία περιστροφής (5) είναι:

$$\theta = \frac{\left(1+\mu^2\right)R\omega_0^2}{4\mu g\cos\varphi} \quad (8)$$

και ο αριθμός των περιστροφών μέχρι να σταματήσει ο κύλινδρος είναι:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\left(1+\mu^2\right)R\omega_0^2}{8\pi\mu g\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\left(1+\mu^2\right)R\omega_0^2}{\pi\mu g} \qquad (9)$$

Ο χρόνος που θα περάσει μέχρι να σταματήσει ο κύλινδρος υπολογίζεται από τη σχέση (1):

$$\tau = I\frac{d\omega}{dt} = -\left(F_1+F_2\right)R \Rightarrow mR^2\int_{\omega_0}^{0} d\omega = -\left(F_1+F_2\right)R\int_0^t dt \Rightarrow$$
$$mR\omega_0 = \left(F_1+F_2\right)t \Rightarrow t = \frac{mR\omega_0}{\left(F_1+F_2\right)} \qquad (10)$$

Άρα λόγω της σχέσης (7) ο χρόνος είναι:

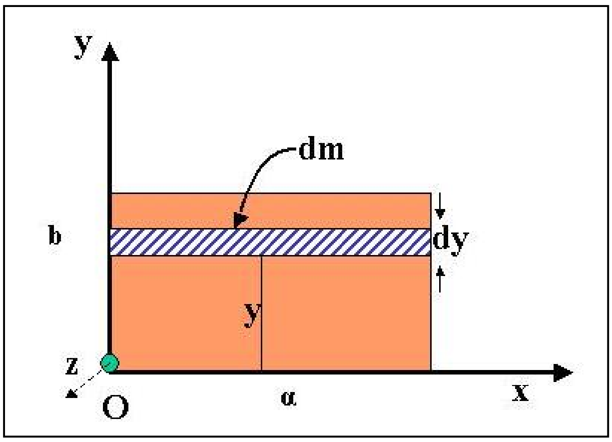
$$t = \frac{\left(1+\mu^2\right)R\omega_0}{2\mu g\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(1+\mu^2\right)R\omega_0}{\mu g}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να υπολογιστούν οι ροπές αδράνειας των ακόλουθων ομογενών σωμάτων:
Α) ορθογώνιας λεπτής πλάκας με πλευρές α και b και μάζα M, ως προς άξονα που συμπίπτει 1) με την πλευρά της α, 2) με την πλευρά της b, 3) ως προς άξονα κάθετο στην πλάκα, που περνά από μια κορυφή της (να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα των καθέτων αξόνων $I_z = I_x + I_y$) και 4) ως προς άξονα παράλληλο προς τη μια πλευρά, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της.
Β) κύβου μάζας m και ακμής α ως προς άξονα μια ακμή του (να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα του Α).

Λύση

Α)
1) Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος όπου ο άξονας y είναι παράλληλος προς την πλευρά b και ο άξονας x παράλληλος προς την πλευρά α. Έστω στοιχειώδης λωρίδα μάζας dm παράλληλη προς τον άξονα x. Αν σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα και S το εμβαδό της πλάκας , τότε:



$$dm = \sigma\cdot dS = \sigma\cdot ady \qquad (1)$$

Αλλά: $\sigma = \dfrac{M}{S} = \dfrac{M}{ab}$ (2)

Οπότε η (1) γίνεται: $dm = \dfrac{M}{ab} a dy = \dfrac{M}{b} dy$ (3)

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα x (λαμβάνοντας υπ' όψη την (3)) είναι:

$$I_x = \int y^2 dm = \int_0^b y^2 \frac{M}{b} dy \Rightarrow I_x = \frac{1}{3} M b^2 \quad (4)$$

2) Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y :

Θεωρούμε στοιχειώδη λωρίδα μάζας dm παράλληλη προς τον άξονα y, οπότε:

$$dm = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot b dx \quad (5)$$

και λόγω της (2):

$$dm = \frac{M}{ab} \cdot b dx = \frac{M}{a} dx \quad (6)$$

$$I_y = \int x^2 dm = \int_0^a x^2 \frac{M}{a} dx \Rightarrow I_y = \frac{1}{3} M a^2 \quad (7)$$

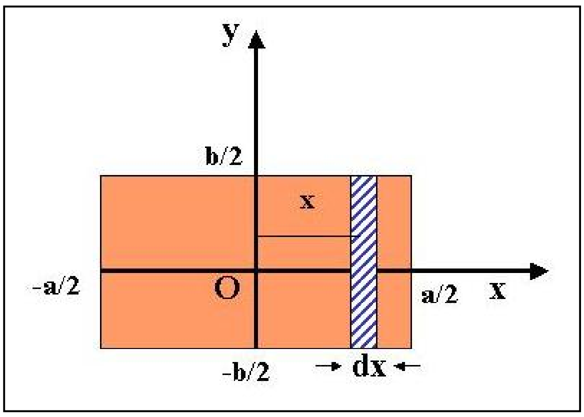
3) Θεωρώντας ως άξονα z τον κάθετο άξονα στην πλάκα που περνά από μια κορυφή της και σύμφωνα με το θεώρημα των καθέτων αξόνων προκύπτει:

$$I_z = I_x + I_y = \int x^2 dm = \frac{1}{3} M a^2 + \frac{1}{3} M a^2 = \frac{1}{3} M \left(a^2 + b^2\right) \quad (8)$$

4) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Steiner μεταξύ του άξονα που συμπίπτει με τη μια πλευρά και του παραλλήλου που διέρχεται από το κέντρο μάζας :

$$I_y = I_{yc} + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{yc} = I_y - M\frac{a^2}{4} = \frac{1}{3} M a^2 - \frac{1}{4} M a^2 = \frac{1}{12} M a^2 \quad (9)$$

<u>Δεύτερος τρόπος:</u>



Έστω ο άξονας y παράλληλος προς τη μια πλευρά της πλάκας (έστω την πλευρά b) διερχόμενος από το κέντρο μάζας της. Θεωρούμε στοιχειώδη μάζα dm παράλληλη στον παραπάνω άξονα, οπότε:

$$dm = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot bdx \quad (10)$$

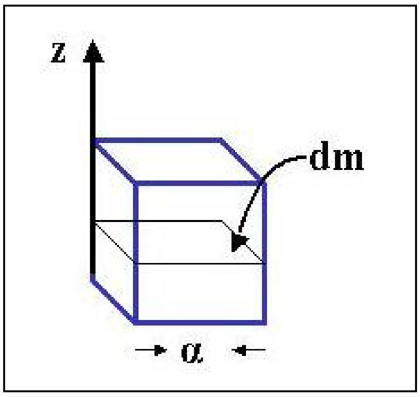
Αλλά: $\sigma = \dfrac{M}{S} = \dfrac{M}{ab}$

Οπότε η (10) γίνεται: $dm = \dfrac{M}{ab} bdx = \dfrac{M}{a} dx \, (11)$

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y (λαμβάνοντας υπ’ όψη την (11)) είναι:

$$I_y = \int x^2 dm = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \frac{M}{a} dx \Rightarrow I_y = \frac{1}{12} Ma^2 \quad (12)$$

Β) Θεωρούμε στοιχειώδη τετραγωνική πλάκα μάζας dm, οπότε σύμφωνα με το ερώτημα (3) η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα z που συμπίπτει με μια ακμή του κύβου είναι:



$$dI_z = \frac{1}{3} dm\left(a^2 + a^2\right) = \frac{2}{3} a^2 dm \quad (13)$$

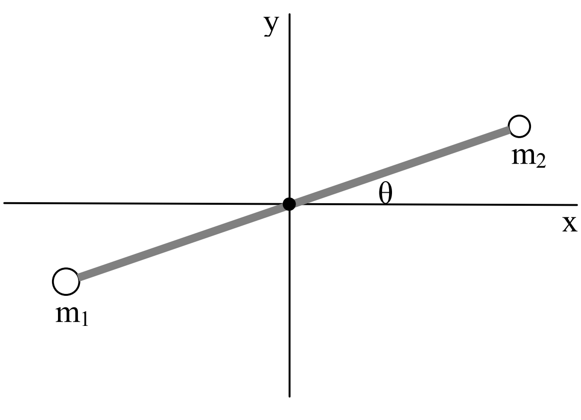
(επειδή α=b)

Άρα

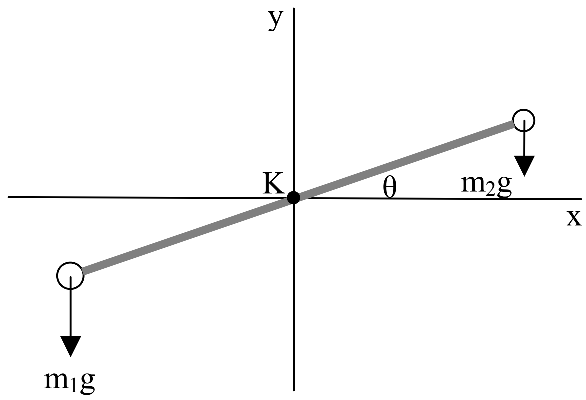
$$I_z = \int dI_z = \frac{2}{3} \int a^2 dm = \frac{2}{3} Ma^2 \quad (14)$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4</u>

Μία συμπαγής ράβδος αμελητέου πάχους, μάζας M και μήκους l περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Στα δύο άκρα της έχουν στερεωθεί δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα ($m_1 > m_2$). α) Να υπολογιστεί η στροφορμή του συστήματος όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι ω. β) Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



Λύση



α) Θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας του συστήματος γύρω από τον άξονα z, ο οποίος διέρχεται από το K.

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right) \qquad (1)$$

Επομένως, όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι *ω*, η στροφορμή είναι:

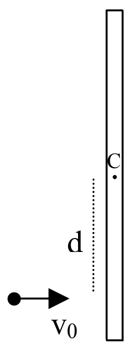
$$L = I\omega = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\omega$$

β) Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης η συνισταμένη ροπή ως προς το K ισούται:

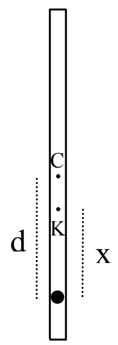
$$\sum \tau_K = \mathrm{I}\alpha \Rightarrow m_1 g\frac{l}{2}\cos\theta - m_2 g\frac{l}{2}\cos\theta = I\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{2(m_1 - m_2)g\cos\theta}{l\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ράβδος μάζας *M* και μήκους *L* βρίσκεται σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Μία μικρή σφαίρα μάζας *m* με ταχύτητα v_0 χτυπά κάθετα τη ράβδο και καρφώνεται σε αυτή σε απόσταση *d* από το μέσο της C. α) Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος μετά την κρούση. β) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος μετά την κρούση.



Λύση



α) Στο σύστημα ράβδου-σφαίρας δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$mv_0 = (M+m)v_{CM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{CM} = \frac{mv_0}{(M+m)}$$

όπου v_{CM} η ταχύτητα του κέντρου μάζας (Κ.Μ.) του συστήματος. Άρα το Κ.Μ. του συστήματος μετά την κρούση εκτελεί μεταφορική κίνηση.

β) Έστω Κ το Κ.Μ. του συστήματος και x η απόσταση μεταξύ του σημείου πρόσκρουσης της σφαίρας και του Κ. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$mv_0 x = I_{\mathrm{K}}\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{mv_0 x}{I_{\mathrm{K}}} \qquad (1)$$

όπου I_{K} είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα κάθετο στο Κ.Μ. και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από το Κ.Μ.
Επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε το x και το I_{K}.
Εύκολα βρίσκουμε ότι το Κ.Μ. απέχει από το σημείο πρόσκρουσης:

$$(M+m)x = Md \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{M}{M+m}d \qquad (2)$$

Επομένως η απόσταση του Κ.Μ. από το σημείο C είναι:

$$d - x = \frac{m}{M+m}d \qquad (3)$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το Κ.Μ. και η ροπή αδράνειας της σφαίρας:

$$I_{\mathrm{K}} = \frac{1}{12}ML^2 + M(d-x)^2 + mx^2 \quad (4)$$

Σημειώνουμε ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το Κ.Μ. υπολογίστηκε με εφαρμογή του θεωρήματος του Steiner. Με αντικατάσταση της (2) και της (3) στην (4) προκύπτει:

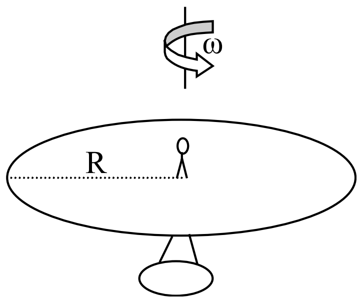
$$I_{\mathrm{K}} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{Mm}{M+m}d^2 \quad (5)$$

Τέλος με αντικατάσταση της (5) και της (2) στην (1) υπολογίζεται η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μετά την κρούση:

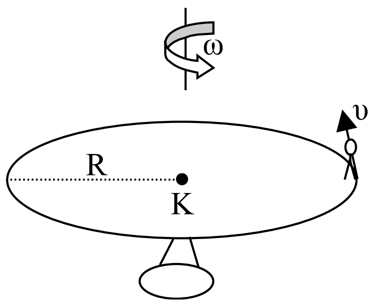
$$\omega = \frac{12mv_0d}{(M+m)L^2 + 12md^2}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 6</u>

Δίσκος μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα κάθετο στο κέντρο του. Στο κέντρο του βρίσκεται άνθρωπος μάζας m. Ποια θα είναι η γραμμική ταχύτητα του ανθρώπου αν μετακινηθεί στην άκρη του δίσκου; (Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $I = MR^2/2$).



Λύση



Το σύστημα δίσκου ανθρώπου είναι απομονωμένο, δηλ. δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές ως προς το κέντρο Κ. Επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς το Κ. Αρχικά, η στροφορμή του ανθρώπου ως προς το Κ είναι μηδέν επειδή βρίσκεται στο κέντρο του δίσκου, ενώ όταν μετακινηθεί στην άκρη του θα είναι $mR^2\omega_1$. Οπότε:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \mathrm{I_K}\,\omega + 0 = \mathrm{I_K}\,\omega_1 + mR^2\omega_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\mathrm{I_K}\,\omega}{\mathrm{I_K} + mR^2} \qquad (1)$$

Η γραμμική ταχύτητα του ανθρώπου θα είναι:

$$\upsilon = \omega_1 R \qquad (2)$$

Επίσης $I_K = MR^2/2$ (3)

Αντικαθιστώντας τις (1) και (3) στη (2) προκύπτει:

$$\upsilon = \frac{\mathrm{I_K}\,\omega}{\mathrm{I_K} + mR^2}R = \frac{M}{M+2m}\omega R$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Οι κρεμαστές γέφυρες αποτελούνται από ζεύγος συρματόσχοινων που κρέμονται ανάμεσα σε δύο πύργους από το ίδιο ύψος. Το οδόστρωμα αναρτάται από αυτά τα συρματόσκοινα με τη βοήθεια πυκνοτοποθετημένων καθέτων συρμάτων. Υποθέστε

το βάρος του οδοστρώματος είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σ΄ όλο το μήκος του και αμελήστε το βάρος των συρματόσκοινων. Ποιο είναι το σχήμα των συρματόσκοινων;
Υπόδειξη: Η τάση των συρμάτων είναι παράλληλη με το έδαφος στο μέσον της γέφυρας.

<u>Λύση</u>

Θεωρήστε ένα τμήμα της γέφυρας, από το μέσο της γέφυρας ως την απόσταση x. Στο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος αυτού του τμήματος . Οι εξωτερικές δυνάμεις είναι το βάρος $B \cdot x$ του τμήματος του οδοστρώματος (όπου B είναι το βάρος ανά μονάδα μήκους) και οι τείνουσες δυνάμεις στο δεξί και στο αριστερό άκρο του τμήματος του συρματόσκοινου. Αυτές οι τείνουσες δυνάμεις , που συμβολίζονται με T_c και T στο σχήμα δεν έχουν ίσα μέτρα , αφού η έλξη των κατακόρυφων συρμάτων έχει συνιστώσα κατά μήκος του συρματόσκοινου, η οποία μεταβάλλει την τάση. Υποθέτοντας ότι στο διάγραμμα «ελευθέρου σώματος» οι τάσεις παριστάνουν το συνδυασμό των τάσεων και στα δύο συρματόσκοινα της γέφυρας, η συνθήκη της ισορροπίας των οριζοντίων συνιστωσών των δυνάμεων είναι

$$T\cos\theta = T_c$$

Και η συνθήκη ισορροπίας των κατακόρυφων συνιστωσών των δυνάμεων είναι

$$T\sin\theta = B \cdot x$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις δυο αυτές εξισώσεις παίρνουμε

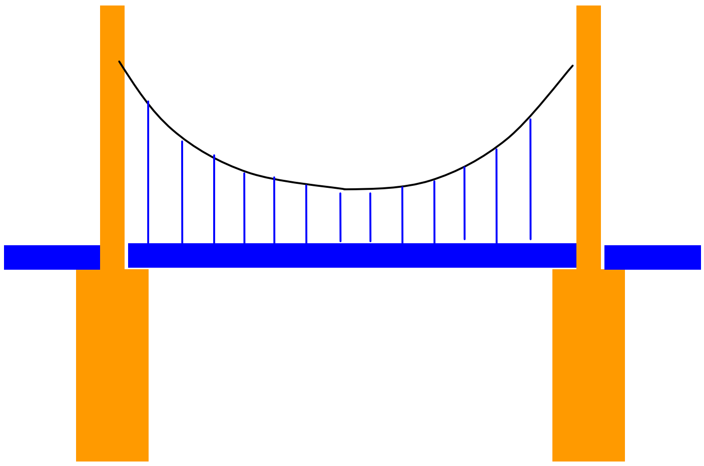
$$\tan\theta = \frac{B \cdot x}{T_c}$$

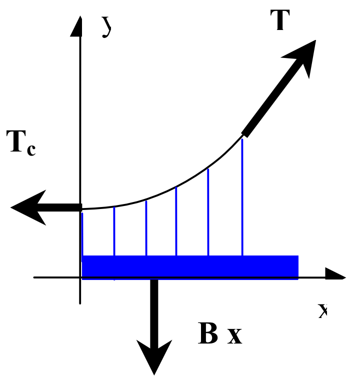
Ομως , $tan\theta$ είναι η κλίση $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B \cdot x}{T_c}$ ή $dy = \dfrac{B}{T_c} x dx$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο σκέλη αυτής της εξίσωσης παίρνουμε

$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{B}{T_c} x dx \Rightarrow \qquad y = \frac{B}{2T_c} x^2 + c$$

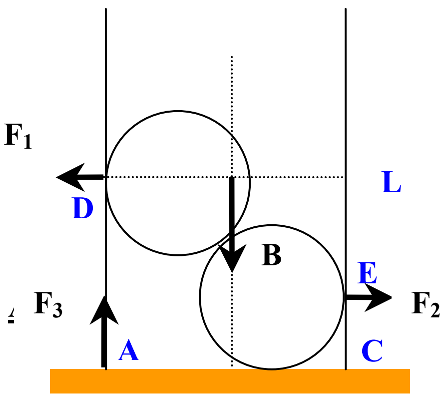
Η οποία είναι εξίσωση παραβολής με κορυφή στο x=0.





ΑΣΚΗΣΗ 8

Κυλινδρικός σωλήνας χωρίς πυθμένα έχει ακτίνα R και βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι με τον άξονα του κατακόρυφο. Μέσα στον κύλινδρο βάζουμε δυο όμοιες σφαίρες που έχουν ακτίνα r. Αν είναι R>r>R/2 να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή του λόγου M/m (όπου M, η μάζα του σωλήνα και m, η μάζα κάθε σφαίρας) για την οποία η βάση του κυλίνδρου αποσπάται από το τραπέζι (ο σωλήνας γέρνει λόγω της ροπής της πάνω σφαίρας και πέφτει πλάγια). Τριβές δεν υπάρχουν.



Λύση

Στον σωλήνα ασκούνται οι δυνάμεις F_1 , F_2 από τις σφαίρες και το βάρος του B=Mg (πάνω στον άξονα του σωλήνα). Επίσης ασκείται μια δύναμη από το τραπέζι . Όταν είναι έτοιμη να αποσπαστεί η βάση του κυλίνδρου από το τραπέζι, στηρίζεται μόνο στο A. άρα έχουμε:

$$\sum \tau_A = 0$$

$$F_1(AD) - F_2(CE) - MgR = 0 \quad (1)$$

Εξάλλου από την ισορροπία κάθε σφαίρας έχουμε :

1) από τη σφαίρα 1 :

$\sum F_x = 0$ επομένως $F_1' = F\cos\phi$ και $F\sin\phi = mg$ άρα

$F_1' = mg\cot\phi \quad (2)$

2) Από τη σφαίρα 2:

$F_2' - F'\cos\phi = 0 \Rightarrow F_2' = F'\cos\phi$

Αλλά $F' = F = \dfrac{mg}{\sin\phi}$

Άρα $F_2' = mg\cot\phi = F_1'$

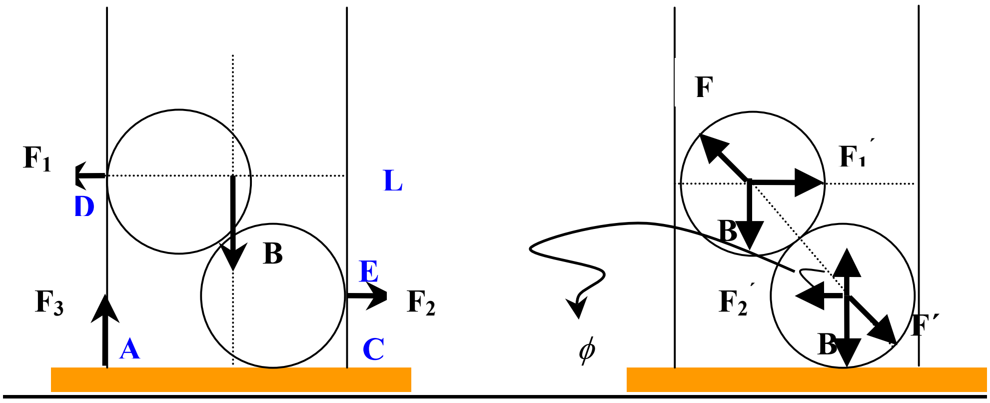
Επίσης $\cot\phi = \dfrac{2R - 2r}{(LE)}$

Επομένως η (1), γίνεται: $F_1(AD) - F_2(CE) = MgR \Rightarrow$

$mg(LE)\cot\phi = MgR \Rightarrow$

$m\dfrac{2R - 2r}{(LE)}(LE) = MR$

$\dfrac{M}{m} = 2(1 - r/R)$



ΑΣΚΗΣΗ 9

Ένα ελαφρύ σχοινί περνάει από μια ελαφριά τροχαλία χωρίς τριβή. Στο ένα άκρο του σχοινιού είναι δεμένο ένα τσαμπί με μπανάνες μάζας Μ και στο άλλο άκρο του σχοινιού είναι γαντζωμένος ένας πίθηκος μάζας Μ. Ο πίθηκος αρχίζει να σκαρφαλώνει στο σχοινί προσπαθώντας να φθάσει τις μπανάνες. Θεωρήστε το σύστημα που αποτελείται από το πίθηκο, τις μπανάνες, το σχοινί και τη τροχαλία. Α) υπολογίστε τη συνισταμένη ροπή ως προς άξονα της τροχαλίας. Β) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του πρώτου ερωτήματος προσδιορίστε την ολική στροφορμή ως προς άξονα της τροχαλίας και περιγράψετε την κίνηση του συστήματος. Θα φθάσει ο πίθηκος στις μπανάνες;

Λύση

Όταν αρχίζει να κινείται ο πίθηκος η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών που ασκούνται στο σύστημα πίθηκος –τροχαλία –μπανάνες είναι:

$$\sum \tau_{\varepsilon\xi} = B_{\pi}R - B_{\mu}R = 0$$

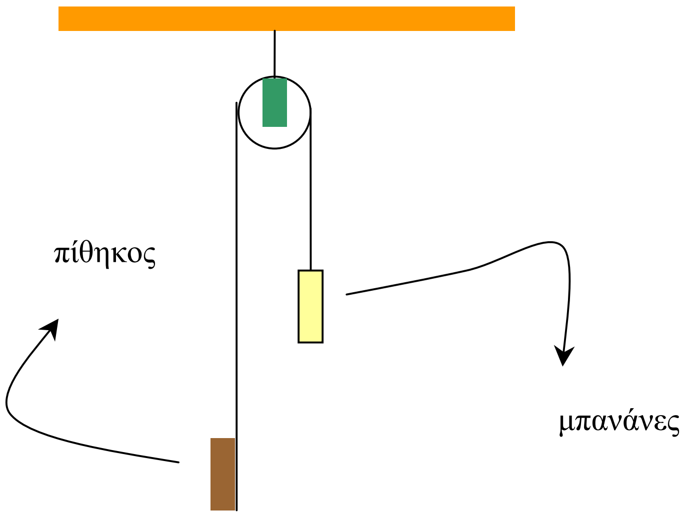
Επειδή η συνιστάμενη των εξωτερικών ροπών που ασκούνται στο σύστημα είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος δεν θα μεταβάλλεται.

Επομένως

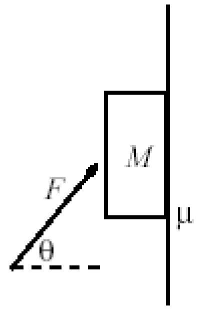
$$L_{\alpha\rho} = L_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$0 = m_{\pi}u_{\pi}R - m_{\mu}u_{\mu}R \Rightarrow u_{\pi} = u_{\mu}$$

Άρα όσο διάστημα ανέρχεται σε χρόνο t ο πίθηκος, τόσο ανέρχονται και οι μπανάνες, επομένως δεν μπορεί να τις πλησιάσει.



ΑΣΚΗΣΗ 10



A. Βιβλίο μάζας M τοποθετείται πάνω σε κάθετο τοίχο με συντελεστή τριβής μ σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας. Δύναμη $\vec{F}$ πιέζει το βιβλίο προς τον τοίχο υπο γωνία θ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ ως προς την οριζόντιο. Βρείτε την ελάχιστη δύναμη που απαιτείται ώστε να μην πέσει το βιβλίο. Ποια είναι η ελάχιστη (αρνητική) τιμή του θ ώστε να υπάρχει πεπερασμένη δύναμη που να συγκρατεί το βιβλίο;

B.

Ράβδος μάζας M συγκρατείται από στηρίγματα στα άκρα της. Κάθε στήριγμα ασκεί δύναμη $Mg/2$. Τοποθετούμε άλλο ένα στήριγμα σε αποστάσεις a και b από τα στηρίγματα στα άκρα. Ποιες είναι οι δυνάμεις στα τρία στηρίγματα; Μπορούν να βρεθούν και οι τρεις δυνάμεις;

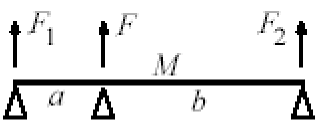
<u>Λύση</u>

A. Η κάθετη δύναμη στον τοίχο είναι $F\cos\theta$ και η μέγιστη τριβή είναι $F\mu\cos\theta$. Για να ισορροπεί το βιβλίο θα πρέπει

$F\mu\cos\theta + F\sin\theta - Mg = 0$ και επομένως θα πρέπει $F > \dfrac{Mg}{\mu\cos\theta + \sin\theta}$.

Η F απειρίζεται όταν $\tan\theta = -\mu$. Επομένως όταν η θ είναι πιο αρνητική από $-\tan^{-1}\mu$ δεν υπάρχει F που να μπορεί να συγκρατήσει το βιβλίο.

B.



Έστω F η δύναμη που ασκεί το εσωτερικό στήριγμα. Οι συνθήκες για ισορροπία είναι

$F_1 + F_2 + F = Mg$

και για τις ροπές ως προς το αριστερό στήριγμα.

$$Fa + F_2\left(a+b\right) = Mg\frac{a+b}{2}.$$

Το παραπάνω σύστημα έχει δύο εξισώσεις με τρεις αγνώστους άρα λύνεται μόνο παραμετρικά με λύση

$$\left(F_1, F, F_2\right) = \left(\frac{Mg}{2} - \frac{Fb}{a+b}, F, \frac{Mg}{2} - \frac{Fa}{a+b}\right).$$