1^{η} Εργασία 2005-2006

(Καταληκτική ημερομηνία αποστολής 15/11/2005)

Άσκηση 1 (10 μονάδες).

(α) Δείξτε αλγεβρικά πώς βρίσκονται δύο διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$, εάν είναι γνωστά το άθροισμά τους $\vec{S}$ και η διαφορά τους $\vec{D}$

(β) Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα της συνισταμένης των διανυσμάτων

$\vec{r}_1 = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ και $\vec{r}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

(γ). Δείξτε ότι οι διαγώνιοι ενός ρόμβου είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Λύση

(α) Ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{S}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{D}$$

$$2\vec{A} = \vec{S} + \vec{D}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{S} + \vec{D}\right)$$

$$2\vec{B} = \vec{S} - \vec{D}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\left(\vec{S} - \vec{D}\right)$$

(β) Η συνισταμένη των διανυσμάτων είναι

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \left(2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}\right) + \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

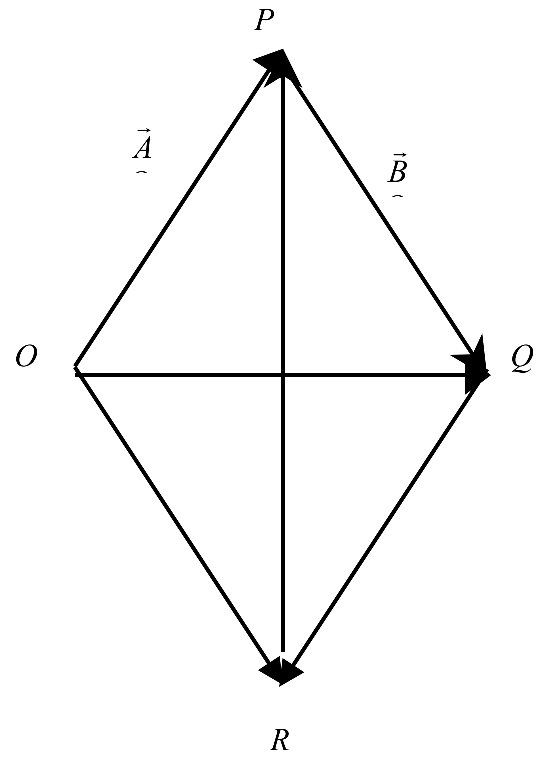
Το μέτρο του διανύσματος είναι

$$R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = 7$$

Επομένως το μοναδιαίο διάνυσμα είναι

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{7} = \frac{3}{7}\hat{i} + \frac{6}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}$$

(γ)



$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{A} + \vec{B}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}$

ή

$\vec{A} = \vec{B} + \overrightarrow{RP}$

$\overrightarrow{RP} = \vec{A} - \vec{B}$

Επομένως,

$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{RP} = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{A} - \vec{B}\right) = \left|\vec{A}\right|^2 - \left|\vec{B}\right|^2 = 0$

αφού $\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{B}\right|$ επειδή είναι ρόμβος.

Συμπερασματικά, τα διανύσματα που παριστούν τις διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα μεταξύ τους.

Άσκηση 2 (10 μονάδες).

(α) Αποδείξτε ότι σε ένα τρίγωνο ισχύει

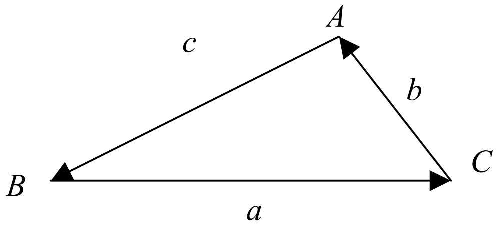
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως ο Νόμος των Ημιτόνων για Τρίγωνα.

(β) Προσδιορίστε τις γωνίες α , β και γ τις οποίες σχηματίζει ένα διάνυσμα $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ με τις θετικές κατευθύνσεις των αξόνων σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και δείξτε ότι $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Λύση

(α)



Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

Σχηματίζουμε το εξωτερικό γινόμενο της σχέσης αυτής διαδοχικά με $\vec{a}\times$, $\vec{b}\times$ και $\vec{c}\times$

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} = 0$$

$$\vec{b}\times\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c} = 0$$

$$\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b} = 0$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν οι σχέσεις

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c}$$

$$\vec{c}\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{c}$$

Αναπτύσσοντας τα εξωτερικά γινόμενα παίρνουμε

$$ab\sin C = ca\sin B$$

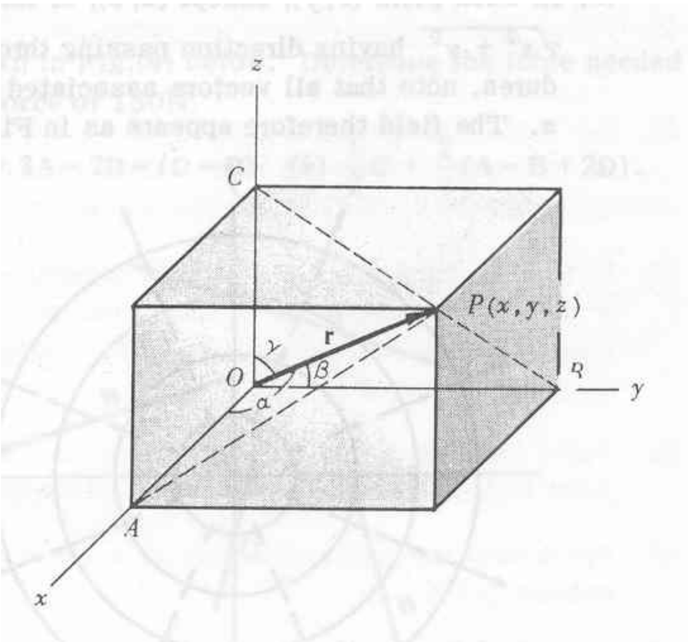
$$ab\sin C = bc\sin A$$

$$ca\sin B = bc\sin A$$

και τελικά

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

(β)



Από το σχήμα προκύπτει ότι το τρίγωνο OAP είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\widehat{OAP}$ και επομένως ισχύει

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}$$

Επίσης από τα ορθογώνια τρίγωνα $\widehat{OBP}$ και $\widehat{OCP}$ προκύπτουν οι σχέσεις

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} \text{ και } \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

όπου $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Από τις σχέσεις αυτές, υψώνοντας στο τετράγωνο, προκύπτει η σχέση

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Άσκηση 3 (10 μονάδες).

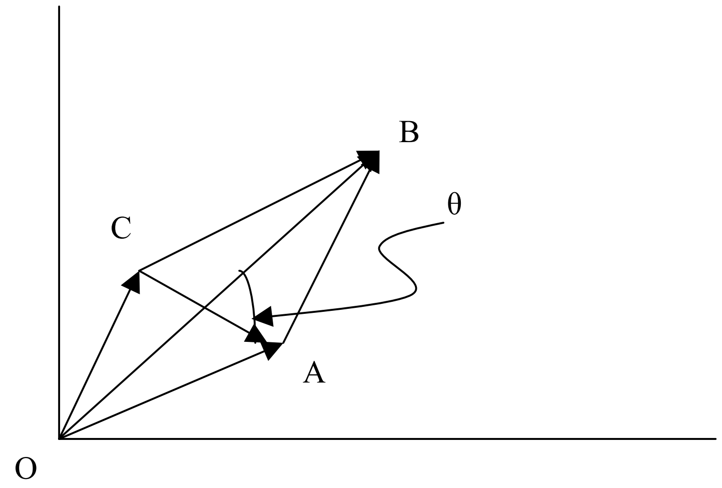
(α) Βρείτε την οξεία γωνία μεταξύ των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου με κορυφές O(0,0,0), A(3,2,0), B(4,6,0), C(1,3,0).

Υπόδειξη: Να γίνει αρχικά το σχήμα.

(β). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ και $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$. Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο των δύο διανυσμάτων.

Λύση

(α)



Η γωνία μεταξύ των $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{CA}$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$\left(\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}\right) = \left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\left(\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}\right)}{\left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|}$$

$$\overrightarrow{OB} = \left[(4-0)\hat{i} + (6-0)\hat{j} + (0-0)\hat{k}\right] = 4\hat{i} + 6\hat{j}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \left(3\hat{i} + 2\hat{j}\right) - \left(\hat{i} + 3\hat{j}\right) = 2\hat{i} - \hat{j}$$

Επομένως

$$\cos\theta = \frac{\left(4\hat{i} + 6\hat{j}\right)\cdot\left(2\hat{i} - \hat{j}\right)}{\left(\sqrt{4^2 + 6^2}\right)\left(\sqrt{2^2 + (-1)^2}\right)} = \frac{4\cdot 2 - 6\cdot 1}{\left(\sqrt{52}\right)\left(\sqrt{5}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{52}\right)\left(\sqrt{5}\right)} = 0,124$$

$$\theta = \arccos 0,124 = 82,87^{\circ}$$

(β). Το εξωτερικό γινόμενο των $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι διάνυσμα $\vec{C}$ κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα αυτά. Υπολογίζουμε το διάνυσμα αυτό.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4-4)\hat{i} - (-6-4)\hat{j} + (3+2)\hat{k} = 10\hat{j} + 5\hat{k}$$

Το μέτρο του $\vec{C}$ είναι ίσο προς

$$\left|\vec{C}\right| = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Επομένως, το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα είναι

$$\hat{u} = \frac{\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|} = \frac{10\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{k}$$

Άσκηση 4 (10 μονάδες).

(α)

I. Εάν $\left|\vec{A}\right| = 3,\ \left|\vec{B}\right| = 4,\ \left|\vec{C}\right| = 5$ και $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ τι μπορεί να λεχθεί για τα διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$;

II. Εάν $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι διανύσματα που έχουν αρχή το σημείο O προς τα σημεία A και B αντίστοιχα και P είναι το μέσο του διανύσματος $\vec{B} - \vec{A}$, βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$

(β) Αποδείξτε ότι δύο διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, εάν το άθροισμά τους και η διαφορά τους είναι διανύσματα κάθετα μεταξύ τους.

(γ) Δίνεται ότι $\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{B}\right| = \left|\vec{C}\right| = 1$ και $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{C} = -2$. Να δειχθεί ότι $\vec{A} = \vec{C}$ και τα διανύσματα $\vec{B}$ και $\vec{C}$ είναι αντιπαράλληλα.

Λύση

(α)

I. Από τη σχέση $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ προκύπτει ότι

$$\vec{A} + \vec{B} = -\vec{C}$$

$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \left|\vec{A}\right|^2 + 2\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\left(\widehat{AB}\right) + \left|\vec{B}\right|^2 = \left(-\vec{C}\right) \cdot \left(-\vec{C}\right) = \left|\vec{C}\right|^2$$

$$\left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 = \left|\vec{C}\right|^2$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$

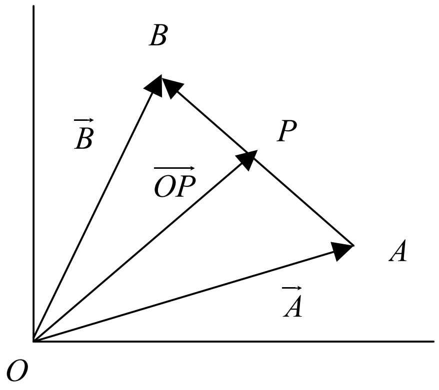
$$2\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\left(\widehat{AB}\right) = 0$$

$$\cos\left(\widehat{AB}\right) = 0$$

$$\left(\widehat{AB}\right) = 90^{\circ}$$

Επομένως τα διανύσματα σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

II.



$$\frac{1}{2}\vec{C}+\overrightarrow{OP}=\vec{B}$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{B}-\vec{A}\right)+\overrightarrow{OP}=\vec{B}$$

$$\overrightarrow{OP}=\vec{B}-\frac{1}{2}\left(\vec{B}-\vec{A}\right)=\vec{B}-\frac{1}{2}\vec{B}+\frac{1}{2}\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}+\frac{1}{2}\vec{A}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)$$

(β)

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$. Το άθροισμά τους είναι $\vec{A}+\vec{B}$ και η διαφορά τους $\vec{A}-\vec{B}$. Αφού τα διανύσματα είναι κάθετα, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο προς μηδέν. Επομένως, θα έχουμε.

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right)=0$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A}-\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{B}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|^2-\left|\vec{B}\right|^2=0$$

$$\left|\vec{A}\right|=\left|\vec{B}\right|$$

(γ)

Έχουμε

$$\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{C}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\left(\widehat{AB}\right)+\left|\vec{B}\right|\left|\vec{C}\right|\cos\left(\widehat{BC}\right)=-2$$

Επειδή τα μέτρα των διανυσμάτων είναι ίσα, προκύπτει ότι

$$\cos\left(\widehat{AB}\right)+\cos\left(\widehat{BC}\right)=-2$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$\cos\left(\widehat{AB}\right)=\cos\left(\widehat{BC}\right)=-1$$

και οι γωνίες είναι

$\left(\widehat{AB}\right)=\left(\widehat{BC}\right)=\pi$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι τα διανύσματα $\vec{A}=\vec{C}$ και τα διανύσματα $\vec{B}$ και $\vec{C}$ είναι αντιπαράλληλα.

Άσκηση 5 (10 μονάδες).

Εάν $\vec{r}_1=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{r}_2=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{r}_3=-2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ και $\vec{r}_4=3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$

υπολογίστε τα *a, b* και *c* ώστε να ισχύει

$\vec{r}_4=a\vec{r}_1+b\vec{r}_2+c\vec{r}_3$

Λύση

Ζητείται να ισχύει

$$3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}=a\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+b\left(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}\right)+c\left(-2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}\right)=$$

$$=\left(2a+b-2c\right)\hat{i}+\left(-a+3b+c\right)\hat{j}+\left(a-2b-3c\right)\hat{k}$$

θα πρέπει λοιπόν να επιλυθεί το σύστημα

$$2a+b-2c=3$$
$$-a+3b+c=2$$
$$a-2b-3c=5$$

Η ορίζουσα των συντελεστών είναι

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=-14$$

και $a=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 1\\ 5 & -2 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}}=\dfrac{28}{-14}=-2$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -5 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}}=\frac{-14}{-14}=1$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix}2&1&3\\-1&3&2\\1&-2&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1&-2\\-1&3&1\\1&-2&-3\end{vmatrix}}=\frac{42}{-14}=-3$$

Τελικά προκύπτει

$\vec{r}_4=-2\vec{r}_1+\vec{r}_2-3\vec{r}_3$

Άσκηση 6 (10 μονάδες).

α) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τετραγωνικοί πίνακες X και Y που επαληθεύουν τις ισότητες:

$$\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix} \text{ και } Y\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

β) Να υπολογιστεί επαγωγικά η ν-οστή δύναμη του πίνακα $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\alpha&b\\0&\dfrac{1}{a}\end{bmatrix}$ όπου $a,b\in R$ και α≠0

γ) Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&-2\\-1&1&-3\end{bmatrix}$.

1. Να βρεθεί ο πίνακας $B=A-\lambda I_3$ όπου $\lambda\in R$ και να βρεθούν οι τιμές του λ που επαληθεύουν την εξίσωση $\det(B)=0$. Οι τιμές αυτές λέγονται ιδιοτιμές του πίνακα A
2. Για κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A (λ_i) να βρεθεί ο 1x3 πίνακας X_i που ικανοποιεί την εξίσωση $(A^T-\lambda_i I_3)X_i^T=0$. Οι πίνακες X_i ονομάζονται αριστερά ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.
3. Υπολογίστε τον πίνακα PAP^{-1} όπου P ο 3x3 πίνακας που έχει ως γραμμές τους πίνακες X_i δηλαδή $P=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}$
4. Υπολογίστε το πίνακα A^{ν} όπου $\nu\in \mathrm{N}^*$

Λύση

α) Θέτουμε $X=\begin{bmatrix}x&y\\z&\omega\end{bmatrix}$ οπότε έχουμε

$$\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x+z&2y+\omega\\2x+z&2y+\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}2x+z=2\\2y+\omega=1\end{Bmatrix}$$

Η λύση του συστήματος αυτού είναι x=α y=b z=2-2α ω=1-2b με $a,b\in R$. Άρα όλοι οι πίνακες της μορφής $X=\begin{bmatrix}\alpha&b\\2-2a&1-2b\end{bmatrix}$ όπου $a,b\in R$

Θέτουμε $Y=\begin{bmatrix}x&y\\z&\omega\end{bmatrix}$ οπότε έχουμε

$$\begin{bmatrix}x&y\\z&\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x+2y&x+y\\2z+2\omega&z+\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}2(x+y)=1\\x+y=0\\2(z+\omega)=0\\z+\omega=1\end{Bmatrix}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο άρα δεν υπάρχει πίνακας Υ που να επαληθεύει την εξίσωση

β) $A^2=\begin{bmatrix}\alpha&b\\0&\frac{1}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&b\\0&\frac{1}{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^2&\frac{b}{a}(1+a^2)\\0&\frac{1}{a^2}\end{bmatrix}$

$$A^3=\begin{bmatrix}\alpha&b\\0&\frac{1}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha^2&\frac{b}{a}(1+a^2)\\0&\frac{1}{a^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^3&\frac{b}{a^2}(1+a^2+a^4)\\0&\frac{1}{a^3}\end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει $A^\nu=\begin{bmatrix}\alpha^\nu&\frac{b}{a^{\nu-1}}(1+a^2+...+a^{2(\nu-1)})\\0&\frac{1}{a^\nu}\end{bmatrix}$

τότε

$$A^{\nu+1}=A^\nu A=\begin{bmatrix}\alpha^\nu&\frac{b}{a^{\nu-1}}(1+a^2+...+a^{2(\nu-1)})\\0&\frac{1}{a^\nu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&b\\0&\frac{1}{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^{\nu+1}&\alpha^\nu b+\frac{b}{a^{\nu-1}}(1+a^2+...+a^{2(\nu-1)})\frac{1}{a}\\0&\frac{1}{a^{\nu+1}}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\alpha^{\nu+1}&\frac{b}{a^\nu}(1+a^2+...+a^{2(\nu-1)}+a^{2\nu})\\0&\frac{1}{a^{\nu+1}}\end{bmatrix}$$

Επομένως ο τύπος ισχύει και για το ν+1 επομένως ισχύει για κάθε ν>1

γ)

$$B = A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[\lambda(\lambda+3)+2\right] = -(\lambda-1)(\lambda^2+3\lambda+2) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι : $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ και $\lambda_3=-2$

<u>Ιδιοτιμή λ_1</u>

$$(A^T - \lambda_i I_3)X_i^T = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y-z & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \\ -2y-4z & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y-z & = & 0 \\ -2y-4z & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right\}$$

Άρα $X_1 = \left[a_1 \quad 0 \quad 0 \right],\ a_1 \in R$

<u>Ιδιοτιμή λ_2</u>

$$(A^T - \lambda_i I_3)X_i^T = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ -2y-2z & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -z \end{array} \right\}$$

Άρα $X_2 = \left[a_2 \quad -a_2 \quad a_2 \right],\ a_2 \in R$

<u>Ιδιοτιμή λ_3</u>

$$(A^T-\lambda_i I_3)X_i^T=0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&2&1\\0&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}3x+y-z&=&0\\2y+z&=&0\\-2y-z&=&0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x&=&\frac{z}{2}\\y&=&-\frac{z}{2}\end{matrix}\right\}$$

Άρα $X_3=\begin{bmatrix}\frac{a_3}{2}&-\frac{a_3}{2}&a_3\end{bmatrix},\ a_3\in R$

Ο πίνακας P είναι $P=\begin{bmatrix}a_1&0&0\\a_2&-a_2&a_2\\\frac{a_3}{2}&-\frac{a_3}{2}&a_3\end{bmatrix}$

Η ορίζουσά του και οι ελάσσονες ορίζουσες είναι:

$$\det(P)=\begin{vmatrix}a_1&0&0\\a_2&-a_2&a_2\\\frac{a_3}{2}&-\frac{a_3}{2}&a_3\end{vmatrix}=a_1(-a_2a_3+\frac{a_2a_3}{2})=-\frac{a_1a_2a_3}{2}$$

Θα πρέπει $\alpha_1\neq 0$ και $\alpha_2\neq 0$ και $\alpha_3\neq 0$. Τότε:

$$P_{11}=\begin{vmatrix}-a_2&a_2\\-\frac{a_3}{2}&a_3\end{vmatrix}=-\frac{a_2a_3}{2}\ P_{12}=-\begin{vmatrix}a_2&a_2\\\frac{a_3}{2}&a_3\end{vmatrix}=-\frac{a_2a_3}{2}\ P_{13}=\begin{vmatrix}a_2&-a_2\\\frac{a_3}{2}&-\frac{a_3}{2}\end{vmatrix}=-\frac{a_2a_3}{2}+\frac{a_2a_3}{2}=0$$

$$P_{21}=-\begin{vmatrix}0&0\\-\frac{a_3}{2}&a_3\end{vmatrix}=0\ P_{22}=\begin{vmatrix}a_1&0\\\frac{a_3}{2}&a_3\end{vmatrix}=a_1a_3\ P_{23}=-\begin{vmatrix}a_1&0\\\frac{a_3}{2}&-\frac{a_3}{2}\end{vmatrix}=\frac{a_1a_3}{2}$$

$$P_{31}=\begin{vmatrix}0&0\\-\frac{a_3}{2}&a_3\end{vmatrix}=0\ P_{32}=-\begin{vmatrix}a_1&0\\a_2&a_2\end{vmatrix}=-a_1a_2\ P_{33}=\begin{vmatrix}a_1&0\\a_2&-a_2\end{vmatrix}=-a_1a_2$$

οπότε ο αντίστροφος είναι:

$$P^{-1} = -\frac{2}{a_1a_2a_3}\begin{bmatrix} -\frac{a_2a_3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a_2a_3}{2} & a_1a_3 & -a_1a_2 \\ 0 & \frac{a_1a_3}{2} & -a_1a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & -\frac{2}{a_2} & \frac{2}{a_3} \\ 0 & -\frac{1}{a_2} & \frac{2}{a_3} \end{bmatrix}$$

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & -a_2 & a_2 \\ \frac{a_3}{2} & -\frac{a_3}{2} & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & -\frac{2}{a_2} & \frac{2}{a_3} \\ 0 & -\frac{1}{a_2} & \frac{2}{a_3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & -a_2 \\ -a_3 & a_3 & -2a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & -\frac{2}{a_2} & \frac{2}{a_3} \\ 0 & -\frac{1}{a_2} & \frac{2}{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$PA^{\nu}P^{-1} = P(A^{\nu-1}A^{1})P^{-1} = PA^{\nu-1}P^{-1}PAP^{-1} = \underbrace{PAP^{-1}\cdot PAP^{-1}\cdot ...PAP^{-1}}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1^{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{\nu} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A}^{\nu} = P^{-1}\begin{bmatrix} 1^{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{\nu} \end{bmatrix}P = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & -\frac{2}{a_2} & \frac{2}{a_3} \\ 0 & -\frac{1}{a_2} & \frac{2}{a_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{\nu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & -a_2 & a_2 \\ \frac{a_3}{2} & -\frac{a_3}{2} & a_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1^{\nu}}{a_1} & 0 & 0 \\ \frac{1^{\nu}}{a_1} & -2\frac{(-1)^{\nu}}{a_2} & 2\frac{(-2)^{\nu}}{a_3} \\ 0 & -\frac{(-1)^{\nu}}{a_2} & 2\frac{(-2)^{\nu}}{a_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & -a_2 & a_2 \\ \frac{a_3}{2} & -\frac{a_3}{2} & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^{\nu} & 0 & 0 \\ 1^{\nu}-2(-1)^{\nu}+(-2)^{\nu} & 2(-1)^{\nu}-(-2)^{\nu} & -2(-1)^{\nu}+2(-2)^{\nu} \\ -(-1)^{\nu}+(-2)^{\nu} & (-1)^{\nu}-(-2)^{\nu} & -(-1)^{\nu}+2(-2)^{\nu} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 7 (10 μονάδες).

α) Να λυθούν τα συστήματα

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y-z & = & 4 \\ 3x+4y-2z & = & 11 \\ 3x-2y+4z & = & 11 \end{array}\right\}$$

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 4 \\ x+y+z & = & 3 \\ x+2y+z & = & 4 \end{array}\right\}$$

β) Να λυθεί και να διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in R$ το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} (\lambda+3)x+y+2z & = & \lambda \\ \lambda x+(\lambda-1)y+z & = & 2\lambda \\ 3(\lambda+1)x+\lambda y+(\lambda+3)z & = & 3 \end{array}$$

γ) Να λυθεί και να διερευνηθεί, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $a,b \in R$, το σύστημα

$$\begin{aligned} ax+by+z &= 1 \\ x+aby+z &= b \\ x+by+az &= 1 \end{aligned}$$

Λύση

α)

I. Η ορίζουσες του συστήματος είναι:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180, \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60$$

Επομένως η μοναδική λύση είναι η (3,1,1)

II. Οι ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$ και επομένως η μοναδική λύση είναι:

$$x = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad y = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad z = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

β) Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3\lambda+3 & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda+3)\left[(\lambda-1)(\lambda+3)-\lambda\right]-\left[\lambda(\lambda+3)-(3\lambda+3)\right]+2\left[\lambda^2-(\lambda-1)(3\lambda+3)\right]=$$

$$(\lambda+3)(\lambda^2+\lambda-3)-(\lambda^2-3)+2(\lambda^2-3\lambda^2+3)=$$

$$\lambda^3+\lambda^2-3\lambda+3\lambda^2+3\lambda-9-\lambda^2+3+2\lambda^2-6\lambda^2+6=$$

$$\lambda^3-\lambda^2=\lambda^2(\lambda-1)$$

Οι υπόλοιπες ορίζουσες είναι:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3 & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda\left[(\lambda-1)(\lambda+3)-\lambda\right]-\left[2\lambda(\lambda+3)-3\right]+2\left[2\lambda^2-3(\lambda-1)\right]=$$

$$\lambda(\lambda^2+\lambda-3)-(2\lambda^2+6\lambda-3)+4\lambda^2-6\lambda+6=$$

$$\lambda^3+\lambda^2-3\lambda-2\lambda^2-6\lambda+3+4\lambda^2-6\lambda+6=$$

$$\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \lambda+3 & \lambda & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 1 \\ 3(\lambda+1) & 3 & \lambda+3 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda+3)\left[2\lambda(\lambda+3)-3\right]-\lambda\left[\lambda(\lambda+3)-3(\lambda+1)\right]+2\left[3\lambda-6\lambda(\lambda+1)\right]=$$

$$(\lambda+3)(2\lambda^2+6\lambda-3)-\lambda(\lambda^2+3\lambda-3\lambda-3)-12\lambda^2-6\lambda=$$

$$2\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda+6\lambda^2+18\lambda-9-\lambda^3+3\lambda-12\lambda^2-6\lambda=$$

$$\lambda^3+12\lambda-9$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 2\lambda \\ 3\lambda+3 & \lambda & 3 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda+3)\left[3(\lambda-1)-2\lambda^2\right]-\left[3\lambda-2\lambda(3\lambda+3)\right]+\lambda\left[\lambda^2-(\lambda-1)(3\lambda+3)\right]=$$

$$(\lambda+3)(-2\lambda^2+3\lambda-3)-(-6\lambda^2-3\lambda)+\lambda(\lambda^2-3\lambda^2+3)=$$

$$-2\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda-6\lambda^2+9\lambda-9+6\lambda^2+3\lambda+\lambda^3-3\lambda^3+3\lambda=$$

$$-4\lambda^3+3\lambda^2+12\lambda-9$$

1. Αν $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ τότε το σύστημα έχει μόνο μια λύση την
   $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $\mathrm{y}=\frac{\Delta_y}{\Delta}$, $\mathrm{z}=\frac{\Delta_z}{\Delta}$
2. Αν λ=0 τότε
   $\Delta_x=9$, $\Delta_y=-9$ $\Delta_z=-9$ και το σύστημα είναι αδύνατο
3. λ=1 τότε

   $\Delta_x=-2$, $\Delta_y=4$ $\Delta_z=2$ και το σύστημα είναι αδύνατο

γ)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a(a^2b-b)-b(a-1)+(b-ab)=ab(a-1)(a+1)-b(a-1)-b(a-1)=$$

$$=b(a-1)\left[a(a+1)-1-1\right]=b(a-1)(a^2+a-2)=b(a-1)^2(a+2)$$

1. $b \neq 0, a \neq -2, a \neq 1$

Τότε Δ≠0 και το σύστημα έχει μόνο μια λύση:

$$x = z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, y = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$$

2. $b = 0$

Τότε

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a-(a-1)+1 = -2a+2,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 0$$

a. Αν $a \neq 1$, τότε αφού δεν είναι όλες οι ορίζουσες μηδενικές, το σύστημα είναι αδύνατο.
b. Αν $a = 1$ τότε το σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+z & = & 1 \\ x+z & = & 0 \\ x+z & = & 1 \end{array}\right\} \text{ το οποίο είναι αδύνατο}$$

3. $a = 1$

Τότε το σύστημα γίνεται

$$\left\{\begin{array}{ccc} ax+by+z & = & 1 \\ x+aby+z & = & b \\ x+by+az & = & 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x+by+z & = & 1 \\ x+by+z & = & b \\ x+by+z & = & 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x+by+z & = & 1 \\ x+by+z & = & b \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 1 \\ b & = & 1 \end{array}\right\}$$

Επομένως το σύστημα είναι αδύνατο αν b≠1 ενώ για b=1 έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(1-y-z, y, z)$ με $y, z \in R$

4. α=-2

Τότε

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & -2b & 1 \\ 1 & b & -2 \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = b\left[3-(-2b-1)+(b+2)\right] = b(3b+6) = 3b(b+2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2(-2b-1)-(-2-1)+(1-b) = 4b+2+3+1-b = 3b+6 = 3(b+2)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -2 & b & 1 \\ 1 & -2b & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b\left[-2(-2-b)-(1-b)+(1+2)\right] =$$

$$b(4+2b-1+b+3) = 3b(b+2)$$

Δεδομένου ότι b≠0 (η περίπτωση b=0 έχει εξεταστεί) συμπεραίνουμε ότι αν b≠-2 τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Αν b=-2 τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -2x-2y+z &= 1 \\ x+4y+z &= -2 \\ x-2y-2z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y+z &= x-2y-2z \\ x+4y+z &= -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x &= -3z \\ x+4y+z &= -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(z,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z,z)$ με $z \in R$

Άσκηση 8 (10 μονάδες).

α) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 10x + \lambda^2$ με ρίζες ρ_1, ρ_2. Υπολογίστε το λ.

i) αν οι ρίζες είναι πραγματικές

ii) αν οι ρίζες είναι ίσες

iii) αν οι ρίζες είναι αντίστροφες

iv) αν μία ρίζα είναι κατά 4 μεγαλύτερη από την άλλη

v) αν ισχύει $3\rho_1^2 - 4\rho_1\rho_2 + 3\rho_2^2 = 50$

vi) αν $\rho_1=\lambda$ και τις ρίζες ρ_1, ρ_2

vii) αν $\rho_1^3 + \rho_2^3 - 25(\rho_1 + \rho_2) < 0$

β) Να βρείτε το $\kappa \in R$ ώστε η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\kappa(1-x)^2+(1-\kappa)x^2$$

να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $y=x^2+(p+1)x+p$. Να καθορίσετε τις τιμές του p για τις οποίες η γραφική της παράσταση

a. εφάπτεται στον άξονα xx'

b. έχει άξονα συμμετρίας τον yy'

c. έχει για κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη –4

Λύση

α)

i) Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές εάν

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-10)^2 - 4\times1\times\lambda^2 \geq 0 \Leftrightarrow 100-4\lambda^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \leq 25 \Leftrightarrow |\lambda| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq \lambda \leq 5$$

ii) Έχει ρίζες ίσες εάν $\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda = \pm 5$

iii) Αν οι ρίζες ρ_1, ρ_2 είναι αντίστροφες θα ισχύει $\rho_1\,\rho_2=1$. Από τους τύπους του Vieta ισχύει $\rho_1\,\rho_2=\lambda^2$ και άρα $\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

iv) Έστω ότι η ρίζα ρ_1 είναι κατά 4 μεγαλύτερη της ρ_2 τότε θα είναι

$\rho_1= \rho_2+4$ (1).

Από τους τύπους του Vieta έχουμε επίσης

$\rho_1+ \rho_2=10$ (2) και

$\rho_1\,\rho_2=\lambda^2$ (3)

Άρα από το σύστημα των (1) (2) (3) $\lambda^2 = 21 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{21}$
Τελικά ρ_1=7, ρ_2=3, $\lambda = \pm\sqrt{21}$
v) Από τους τύπους του Vieta έχουμε
$\rho_1 + \rho_2$=10 και $\rho_1 \rho_2 = \lambda^2$ οπότε η σχέση $3\rho_1^2 - 4\rho_1\rho_2 + 3\rho_2^2 = 50$ γίνεται διαδοχικά

$$3\rho_1^2 - 4\rho_1\rho_2 + 3\rho_2^2 = 50 \Leftrightarrow 3\left(\rho_1^2 + \rho_2^2\right) - 4\rho_1\rho_2 = 50 \Leftrightarrow 3[\left(\rho_1 + \rho_2\right)^2 - 2\rho_1\rho_2] - 4\rho_1\rho_2 = 50 \Leftrightarrow$$

$$3\left(10^2 - 2\lambda^2\right) - 4\lambda^2 = 6 \Leftrightarrow 300 - 6\lambda^2 - 4\lambda^2 = 50 \Leftrightarrow 10\lambda^2 = 250 \Leftrightarrow \lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda = \pm 5$$

vi) επειδή μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 10x + \lambda^2$ είναι η $\rho_1 = \lambda$ αν θέσουμε στην εξίσωση όπου x=λ αυτή επαληθεύεται δηλαδή έχουμε

$$\lambda^2 - 10\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 10\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 5$$

- αν λ=0 τότε η εξίσωση $x^2 - 10x + \lambda^2 = 0$ γίνεται
  $x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 10$
- αν λ=5 τότε τότε η εξίσωση $x^2 - 10x + \lambda^2 = 0$ γίνεται

  $x^2 - 10x + 25 = 0$ η οποία έχει Δ=0 δηλαδή έχει ρίζες ίσες με
  $$\rho_1 = \rho_2 = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{-10}{2} = 5$$

vii) Από τους τύπους του Vieta έχουμε $\rho_1 + \rho_2$=10 και $\rho_1 \rho_2 = \lambda^2$ οπότε η σχέση
$\rho_1^3 + \rho_2^3 - 25(\rho_1 + \rho_2) < 0$ γίνεται

$$\rho_1^3 + \rho_2^3 - 25(\rho_1 + \rho_2) < 0 \Leftrightarrow \left(\rho_1 + \rho_2\right)^3 - 3\rho_1\rho_2\left(\rho_1 + \rho_2\right) - 25\left(\rho_1 + \rho_2\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$10^3 - 3\lambda^2 10 - 25 \times 10 < 0 \Leftrightarrow 1000 - 30\lambda^2 - 250 < 0 \Leftrightarrow -30\lambda^2 + 750 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 > 25 \Leftrightarrow |\lambda| > 5 \Leftrightarrow \lambda < -5 \text{ ή } \lambda > 5$$

β)

Η παράσταση γίνεται $\kappa(1-x)^2 + (1-\kappa)x^2 = \kappa(1-2x+x^2) + x^2 - \kappa x^2 = x^2 - 2\kappa x + \kappa$
η οποία είναι τριώνυμο ως προς x και επειδή α=1>0 το τριώνυμο έχει ελάχιστο που ισούται με

$$\frac{-\Delta}{4\alpha} = -\frac{4\kappa^2 - 4\kappa}{4} = -\kappa^2 + \kappa$$

αλλά και η παράσταση αυτή είναι τριώνυμο ως προς κ: $-\kappa^2 + \kappa = 0$ και επειδή α=-1<0 έχει μέγιστο όταν

$$\kappa = -\frac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow \kappa = -\frac{1}{2(-1)} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{2}$$

Άρα για την τιμή κ=1/2 η ελάχιστη τιμή της παράστασης είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη.

γ)

a. Η γραφική παράσταση είναι παραβολή και εφάπτεται στον άξονα xx' μόνο αν Δ=0 δηλαδή

$$(p+1)^2-4p=0 \Leftrightarrow (p-1)^2=0 \Leftrightarrow p=1$$

b. Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον yy' μόνο άν η συνάρτηση είναι άρτια δηλαδή αν ισχύει f(-x)=f(x) $\forall x \in R$ δηλαδή

$x^2-(p+1)x+p=x^2+(p+1)x+p \Leftrightarrow 2(p+1)x=0$ που θα ισχύει $\forall x \in R$ άρα και για $x \neq 0$ μόνο αν p= -1.

c. Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $M\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ δηλαδή το σημείο $M\left(-\frac{p+1}{2}, f\left(-\frac{p+1}{2}\right)\right)$

Άρα θα πρέπει $f\left(-\frac{p+1}{2}\right)$=-4 που γράφεται

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+(p+1)\left(-\frac{p+1}{2}\right)+p=-4 \Leftrightarrow (p+1)^2-2(p+1)^2+4p=-16 \Leftrightarrow p^2-2p-15=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες p_1=-3 και p_2=5.

Άσκηση 9 (10 μονάδες).

α) Δίνονται οι εξισώσεις

$x^2 - 4\alpha x - 20 = 0$ (1)

$x^2 + 2x - (\alpha+1) = 0$ (2) με $\alpha \in R$

Να βρείτε το α και τις ρίζες της εξίσωσης (2) αν γνωρίζετε ότι μία ρίζα της (1) είναι ίση με το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της (2).

β) Να δείξετε ότι το κλάσμα $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ παίρνει θετικές τιμές $\forall x \in R$ και να βρείτε το διάστημα στο οποίο αυτές περιέχονται.

Λύση

α)

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της (2) τότε έχουμε

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\frac{\gamma}{\alpha}=(-2)^2-2[-(\alpha+1)]=4+2\alpha+2=6+2\alpha$$

Αλλά αν ρ είναι μία ρίζα της (10 θα έχουμε $\rho=x_1^2+x_2^2\Rightarrow\rho=2\alpha+6$

Επειδή η ρ είναι ρίζα της (1) θα την επαληθεύει δηλαδή

$$(2\alpha+6)^2-4\alpha(2\alpha+6)-20=0\Rightarrow 4\alpha^2+24\alpha+36-8\alpha^2-24\alpha-20=0\Rightarrow$$

$$-4\alpha^2+16=0\Rightarrow\alpha^2-4=0\Rightarrow(\alpha=2\ \text{ή}\quad\alpha=-2)$$

a) όταν α=2 οι (1) και (2) γίνονται

$$x^2-8x-20=0\quad(3)$$

$$x^2+2x-3=0\quad(4)$$

οι ρίζες της (3) είναι

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+80}}{2}=\left|\begin{array}{l}x_1=10\\x_{2=}-2\end{array}\right.$$

οι ρίζες της (4) είναι

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\left|\begin{array}{l}x_1=1\\x_{2=}-3\end{array}\right.$$

b) όταν α =-2 οι (1) και (2) γίνονται

$$x^2+8x-20=0\quad(5)$$

$$x^2+2x+1=0\quad(6)$$

οι ρίζες της (5) είναι

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm12}{2}=\left|\begin{array}{l}x_1=2\\x_{2=}-10\end{array}\right.$$

οι ρίζες της (6) είναι

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{-2}{-2}=-1\,\text{διπλή ρίζα}$$

β)

Ο αριθμητής του κλάσματος είναι πάντοτε θετικός γιατί

$\Delta_1=(-1)^2-4\ 1=-3<0$ και $\alpha=1>0$.

Όμοια ο παρονομαστής του κλάσματος είναι πάντοτε θετικός γιατί

$\Delta_2=1^2-4.1.1=-3<0$ και $\alpha=1>0$

Άρα το κλάσμα είναι πάντοτε θετικό γιατί είναι πηλίκο δύο θετικών αριθμών $\forall x\in R$

Για να βρούμε τις τιμές του κλάσματος θέτουμε

$$y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\Rightarrow y\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=0\Rightarrow yx^2+yx+y-x^2+x-1=0\Rightarrow$$

$(y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0$ και επειδή $x\in R$ πρέπει

$\Delta\geq 0\Leftrightarrow (y+1)^2-4(y-1)(y-1)\geq 0\Leftrightarrow$

$y^2+2y+1-4\left(y^2-2y+1\right)\geq 0\Leftrightarrow y^2+2y+1-4y^2+2y-1\geq 0\Leftrightarrow -3y^2+10y-3\geq 0$

Το τριώνυμο έχει Δ=10^2-4(-3)(-3)=100-36=64>0 και α=-3<0 άρα γίνεται θετικό εντός του διαστήματος των ριζών

$$y_{1,2}=\frac{-10\pm 8}{2(-3)}=\frac{-10\pm 8}{-6}\left|\begin{array}{l} y_1=\dfrac{-10+8}{-6}=\dfrac{-2}{-6}=\dfrac{1}{3}\\ y_2=\dfrac{-10-8}{-6}=\dfrac{-18}{-6}=3\end{array}\right.$$

Επομένως $-3y^2+10y-3\geq 0\Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq y\leq 3$

Άρα $\frac{1}{3}\leq\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\leq 3$

Άσκηση 10 (10 μονάδες)

α) Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R_+$ με τύπο $f(x)=\left||x-2|-3x\right|$. Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \gamma\iota\alpha\quad x<0\\ x+\lambda-2 & \gamma\iota\alpha\quad x\geq 0\end{cases}$

I. Να προσδιοριστεί ο $\lambda\in R$, ώστε η f να είναι αντιστρέψιμη
II. Να προσδιοριστεί η αντίστροφη συνάρτηση

Λύση

α) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}|-4x+2| & \alpha\nu \quad x<2\\ |-2x-2| & \alpha\nu \quad x\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-4x & \alpha\nu \quad x<\frac{1}{2}\\ 4x-2 & \alpha\nu \quad \frac{1}{2}\leq x<2\\ 2x+2 & \alpha\nu \quad x\geq 2\end{cases}$$

Για να είναι αντιστρέψιμη η συνάρτηση θα πρέπει να είναι «1-1» και «επί».
Παρατηρούμε ότι

- αν $x\in(-\infty,\frac{1}{2})$ τότε $f(x)\in(0,+\infty)$
- αν $x\in[\frac{1}{2},2)$ τότε $f(x)\in[0,6)$ που είναι υποσύνολο του $(0,+\infty)$

Άρα για κάποιο x_q του διαστήματος $(-\infty,\frac{1}{2})$ θα δίνει την ίδια τιμή με ένα x_2 από το $[\frac{1}{2},2)$. Πράγματι πχ f(0)=f(1)=2 άρα η f δεν είναι «1-1» οπότε δεν είναι αντιστρέψιμη.

β) Θα εξετάσουμε αν είναι «επί»
Για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f έχουμε:

$$\begin{matrix}x<0\\ x\geq 0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x^2>0\\ x+\lambda-2\geq\lambda-2\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}-x^2<0\\ f(x)\geq\lambda-2\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}1-x^2<1\\ f(x)\geq\lambda-2\end{matrix}$$

Για να είναι η συνάρτηση «επί» θα πρέπει $\lambda-2\leq 1\Leftrightarrow\lambda\leq 3$

Θα εξετάσουμε αν είναι «1-1»

1. Για κάθε ζευγάρι από άνισα στοιχεία $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ έχουμε $x_1\neq x_2\Rightarrow x_1^2\neq x_2^2\Rightarrow 1-x_1^2\neq 1-x_2^2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$
2. Για κάθε ζευγάρι από άνισα στοιχεία $x_1,x_2\in[0,+\infty]$ έχουμε $x_1\neq x_2\Rightarrow x_1+\lambda-2\neq x_2+\lambda-2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$
3. Για κάθε ζευγάρι από άνισα στοιχεία $x_1<0, x_2\geq 0$ έχουμε $f(x_1)<1$ και $f(x_2)\geq\lambda-2$. Επομένως θα πρέπει να ισχύει $\lambda-2\geq 1\Leftrightarrow\lambda\geq 3$

Άρα τελικά **λ=3**

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης γίνεται $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \mu\varepsilon \quad (-\infty,0)\to(-\infty,1]\\ x+1 & \mu\varepsilon \quad [0,+\infty)\to[1,+\infty)\end{cases}$

και έχουμε:

$$y=\begin{cases}1-x^2 & \gamma\iota\alpha \quad x<0\\ x+1 & \gamma\iota\alpha \quad x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\begin{cases}-\sqrt{1-y} & \gamma\iota\alpha \quad -\infty<y<1\\ y-1 & \gamma\iota\alpha \quad 1\leq y<\infty\end{cases}$$