

## ΕΡΓΑΣΙΑ 2

(Παράδοση: 24-01-2005)

**Σημείωση:** Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

### Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε τα όρια:

I.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$ , II.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1}$ , III.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$

Όπου χρειαστεί να θεωρήσετε γνωστό ότι  $\lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\sin z}{z} \right) = 1$

### Άσκηση 2

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in (-\infty, -1) \\ 2, & x \in [-1, 1) \\ 3, & x = 1 \\ x+1, & x \in (1, 2] \\ \frac{-1}{(x-2)^2}, & x \in (2, \infty) \end{cases}$	Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ . Να παρασταθεί γραφικά και να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:
	1.) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ , 2.) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ , 3.) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ , 4.)
	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , 5.) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , 6.) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , 7.)
	$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ , 8.) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ , 9.) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , 10.)
$\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ , 11.) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ και 12.) $\lim_{x \rightarrow 1.5} f(x)$	

### Άσκηση 3

A) Δίδεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{ax^3 + bx + c}{x^2 + dx + e}$ . που έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$ , μια πλάγια ασύμπτωτη με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 1$  και ακρότατο το  $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . Να ευρεθούν τα  $a, b, c, d, e$ .

B) Να ευρεθεί η συνάρτηση  $f(x)$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, +\infty)$  και για την οποία ισχύει  $\frac{df(x)}{dx} \cdot e^{f(x)} = 3x^2 + 2$ . Επίσης η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο  $M(2, f(2))$  να έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{7}{6}$ .

### Άσκηση 4

Δίδεται η συνάρτηση:  $f(x) = \begin{cases} a \sin x + \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \tan x + 2a \cdot \cot x, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \end{cases}$ . Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi/3} f(x) dx$$

### Άσκηση 5

A) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$  και την ευθεία  $x = 1$ .

B) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 8$  και την

παραβολή  $y = \frac{1}{2}x^2$

Γ) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f(x)$  για την οποία ισχύει:  $f'(x) = \frac{2x-1}{e^x}$  και  $f(0) = -1$

I) Να ευρεθεί η συνάρτηση.

II) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  με  $g(x) = \frac{f(x)}{2x+1}$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = 1$ .

### Άσκηση 6

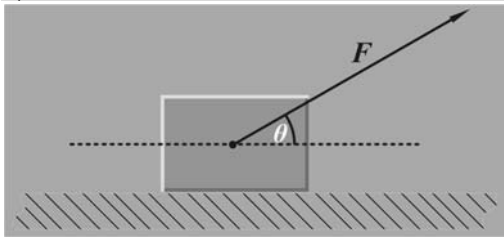
A. Να μελετηθεί η συνάρτηση  $y = \ln(4 - x^2)$  και να γίνει η γραφική της παράσταση.

B. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_{-2}^2 |x^2 - 4x| dx, \beta) \int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} dx, \gamma) \int (x^2 - bx) \sin 2x dx, \delta) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{4x+1}} dx$$

### Άσκηση 7

*Υπόδειξη: Η άσκηση αυτή δεν απαιτεί γνώσεις Μηχανικής. Θα πρέπει να θεωρήσετε ότι η δύναμη  $F$  είναι συνάρτηση της γωνίας  $\theta$*



Σώμα βάρους  $W$  τοποθετείται σε οριζόντιο επίπεδο και μετακινείται με την βοήθεια τεντωμένου σχοινού. Όταν το σχοινί σχηματίζει γωνία  $\theta$  με το οριζόντιο επίπεδο, τότε η δύναμη,  $F$ , που ασκείται στο σώμα μέσω του σχοινού

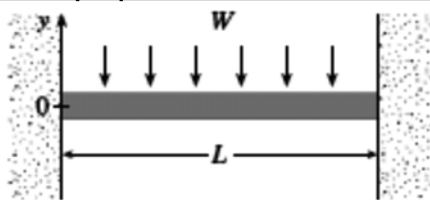
δίνεται από την σχέση:  $F = \frac{\mu W}{\mu \sin \theta + \cos \theta}$ , όπου  $\mu$  είναι

μια σταθερά που παίρνει πάντα θετικές τιμές (συντελεστής

τριβής) και  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Δείξτε ότι η δύναμη ελαχιστοποιείται όταν  $\tan \theta = \mu$ .

### Άσκηση 8



Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται δοκός μήκους  $L$ . Τα δύο άκρα της είναι ακλόνητα συνδεδεμένα (πακτωμένα) σε τοίχους. Η εφαρμογή ενός σταθερού φορτίου  $W$ , που κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος της δοκού, έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή του σχήματός της. Το νέο σχήμα της δοκού περιγράφεται από την συνάρτηση

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

Όπου  $E$  και  $I$  είναι θετικές σταθερές (Το  $E$  ορίζεται ως το μέτρο ελαστικότητας Young της δοκού και το  $I$  ως η ροπή αδράνειας της δοκού). (α) Μελετήστε την συνάρτηση και (β) κάντε την γραφική της παράσταση για να δείτε το νέο σχήμα της δοκού αν  $\frac{W}{24EI} = 1$ .

### Άσκηση 9

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα σημεία  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$  και  $C(2,2)$ .

### Άσκηση 10

A. Να γίνει πλήρης μελέτη της εξίσωσης  $2x^2 + 5y - 3x + 4 = 0$ . Τι είδους καμπύλη παριστά;

B. Αρχίζοντας με την γενική εξίσωση  $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ ,  $A \neq 0$ , δείξτε ότι

$\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} = r^2$ , όπου  $r$  είναι η ακτίνα του κύκλου που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση.

Καλή επιτυχία και χαρούμενα Χριστούγεννα 