ΘΕΜΑ 1

Ένα αεροπλάνο πετάει οριζόντια σε ύψος h=2km με σταθερή ταχύτητα V=600km/h, ως προς ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος. Ο πιλότος αφήνει μια βόμβα να πέσει ελεύθερα:

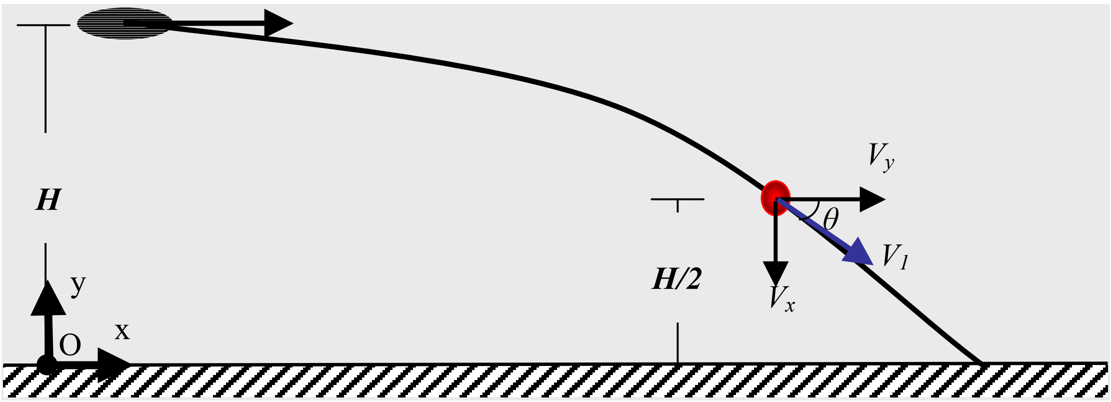
(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης (δηλαδή τις σχέσεις που εκφράζουν τις συντεταγμένες της θέσης και της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου) της βόμβας ως προς τον πιλότο και ως προς κάποιο ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος.

(β) Όταν η βόμβα βρεθεί σε ύψος h/2, εκρήγνυται και σπάει σε 3 ίσα κομμάτια, τα οποία κινούνται με ταχύτητες ίσου μέτρου ως προς παρατηρητή που κινείται μαζί με τη βόμβα. Βρείτε τις γωνίες μεταξύ των θραυσμάτων ως προς τον ίδιο παρατηρητή και το διάνυσμα της ταχύτητας της βόμβας, αμέσως πριν την έκρηξη, ως προς ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος..

(γ) Υπολογίστε το χρόνο που μεσολάβησε μεταξύ της ρίψης της βόμβας και της χρονικής στιγμής κατά την οποία το κέντρο μάζας των τριών κομματιών συναντά το έδαφος.

(Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή και ίση με $g=10m/s^2$ και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα)

Λύση



(α)

πιλότος	**Ακίνητος παρατηρητής (Ο)**
$x_1 = 0$	$x = Vt = \frac{1000}{6}t, \mathrm{m}$ (1)
$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 = 5t^2, \mathrm{m}$	$y = H - \frac{1}{2}gt^2 = 2000 - 5t^2, \mathrm{m}$ (2)
$V_1 = -gt = 10t, \mathrm{m/s}$	$V_x(t) = \frac{1000}{6}, \mathrm{m/s}$ (3)
	$V_y(t) = -gt = 10t, \mathrm{m/s}$ (4)

(β) Η ταχύτητα της βόμβας, V_1, ως προς ακίνητο παρατηρητή, πριν την έκρηξη την χρονική στιγμή t_1 και σε ύψος $y = h/2$:

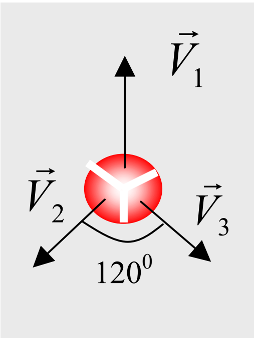
$$V_1 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \tag{5}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{H}{2} = H - \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{H}{g}} \Rightarrow \qquad \boxed{t_1 = 10\sqrt{2}\ \mathrm{s}}$$

Άρα $V_y = -g t_1 \quad \Rightarrow$ $\qquad \boxed{V_y = 100\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}}$

και μέσω της (5) παίρνουμε $\qquad \boxed{V_1 \sim 432 \quad \mathrm{m/s}\ \text{και}\ \tan\theta = \frac{V_y}{V_x} \sim 0.85}$

Σε κάθε θέση της βόμβας, ο παρατηρητής που κινείται μαζί της, βλέπει την βόμβα ακίνητη. Κατά την διάρκεια της έκρηξης , για τον κινούμενο παρατηρητή έχουμε:



$$\vec{P}_{αρχ} = \vec{P}_{τελ} \Rightarrow \vec{0} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 \Rightarrow$$

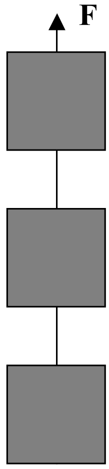
$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0} \qquad (6)$$

Για να ισχύει η σχέση (6) πρέπει οι ταχύτητες $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$, ίσου μέτρου, να σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120^0.

(γ) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας των θραυσμάτων παραμένει αμετάβλητη τόσο πριν όσο και μετά την έκρηξη και είναι ίση με $\vec{V}_1$, όπως υπολογίστηκε στο ερώτημα (α). Άρα ο ζητούμενος χρόνος είναι ίσος με τον χρόνο που απαιτείται, ώστε η βόμβα να φτάσει στο έδαφος. Έτσι, από την σχέση (2) έχουμε

$$0 = H - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow \qquad \boxed{t_{ολ} = 20\ s}$$

ΘΕΜΑ 2



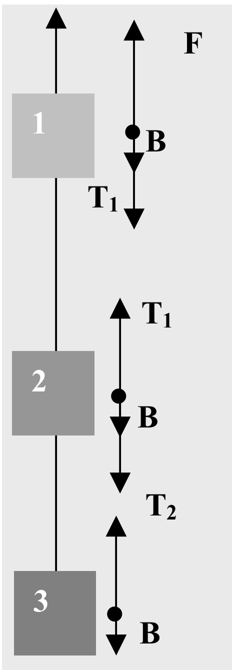
Τρία ίδια σώματα, το καθένα με μάζα m, είναι συνδεδεμένα όπως δείχνει το διπλανό Σχήμα με νήματα μη εκτατά και αβαρή. Η δύναμη F ασκείται κατακόρυφα προς τα πάνω, στο επάνω σώμα.

(α) Δείξτε ότι όλο το σύστημα των τριών σωμάτων κινείται με την ίδια σταθερή επιτάχυνση α. Βρείτε τις τάσεις των νημάτων.

(β) Κάποια χρονική στιγμή η δύναμη F παύει να δρα στο σύστημα και τα σώματα, μετά από λίγο χρονικό διάστημα, πέφτουν ελεύθερα (με επιτάχυνση g). Δείξτε ότι κατά την πτώση οι τάσεις των νημάτων έχουν μηδενικό μέτρο και ότι τα σώματα διατηρούν σταθερές τις σχετικές τους αποστάσεις.

(γ) Γιατί είναι πιο εύκολο να ισορροπεί κανείς πάνω σε ένα ποδήλατο που κινείται παρά σε ένα ποδήλατο που είναι ακίνητο;

Λύση



(α) Αφού τα νήματα είναι μη εκτατά, σε χρόνο dt όλα τα σώματα μετατοπίζονται κατά dx. Άρα θα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση $\alpha = \dfrac{d^2x}{dt^2}$.

<u>Σύστημα σωμάτων:</u>

$$\sum \vec{F} = m_{ολ}\vec{\alpha} \Rightarrow F - 3B = 3m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F-3B}{3m} \qquad (1)$$

<u>Για κάθε σώμα</u>:

$$\left.\begin{aligned} &1:\ F - B - T_1 = m\alpha \\ &2:\ T_1 - T_2 - B = m\alpha \\ &3:\ T_2 - B = m\alpha \end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{aligned} &T_1 = 2F/3 \\ \\ &T_2 = F/3 \end{aligned}$$

(β) κατά την πτώση $\alpha = g$. Αφού πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση διατηρούν σταθερές και τις σχετικές τους θέσεις.

Σώμα 3: $T_2 - B = m\alpha \Rightarrow T_2 - B = mg \Rightarrow T_2 = 0$

Ομοίως και $T_1 = 0$.

(γ) Θεωρία Τόμος ΙΙ σελ. 395 και 416-417.

ΘΕΜΑ 3

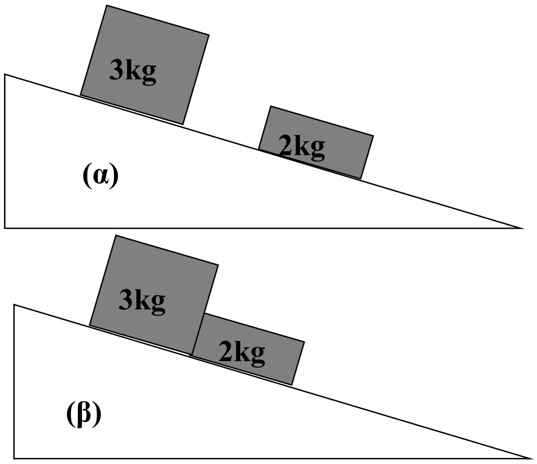
Δύο σώματα με μάζες M=3kg και m=2kg, αντίστοιχα, μπορούν να ολισθαίνουν πάνω στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο. Ο συντελεστής ολίσθησης μεταξύ του βαρύτερου σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου είναι 0,2 και μεταξύ του άλλου σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου είναι 0,4.

(α) Τα σώματα αφήνονται να ολισθήσουν συγχρόνως, από τις αρχικές θέσεις που δείχνει το Σχήμα (α) .Δείξτε ότι τα δύο σώματα θα συναντηθούν.

(β) Τα σώματα βρίσκονται σε επαφή (βλέπε Σχήμα (β)) όταν αφήνονται ελεύθερα να ολισθήσουν. Δείξετε ότι θα συνεχίσουν να ευρίσκονται σε επαφή καθ' όλο το διάστημα που ολισθαίνουν. Υπολογίστε την κοινή τους επιτάχυνση και το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο.

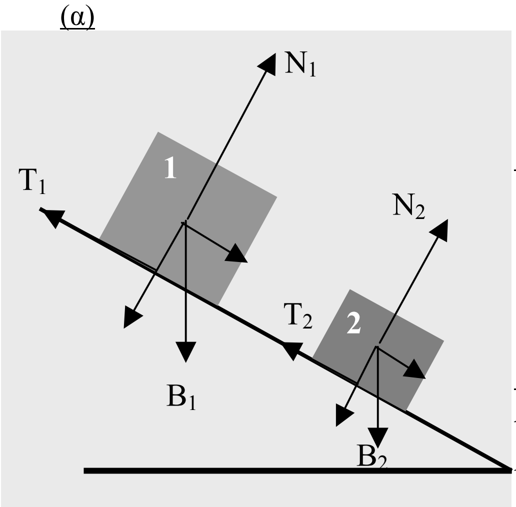
(γ) Υπολογίστε το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων που δρουν στο σύστημα των σωμάτων της ερώτησης (β) , εάν τα σώματα έχουν ολισθήσει διάστημα 0,5m κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

(Η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου είναι 30^o και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$)



Λύση

(α)

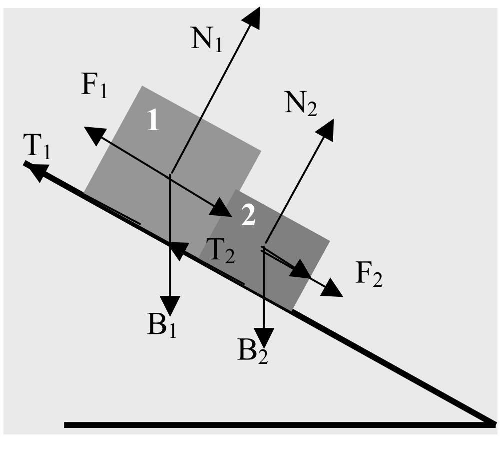


$$\left.\begin{array}{l}\sum \vec{F}y = 0 \Rightarrow N = mg\cos 30^0 \\ T = \mu N\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} T_1 = 3\sqrt{3}\ N \\ T_2 = 4\sqrt{3}\ N \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum \vec{F}x = ma \\ \sum \vec{F}x = B_x - T \\ B_x = mg\sin 30^0\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} a_1 \sim 3.3\ m/s^2 \\ \text{και} \\ a_2 \sim 1.5\ m/s^2 \end{array}$$

Αφού $a_1 > a_2$ το πάνω σώμα θα συναντήσει το κάτω.

(β) Την στιγμή που αφήνονται ελεύθερα τα σώματα ισχύει η σχέση $a_1 > a_2$. Άρα τα σώματα θα εξακολουθήσουν να βρίσκονται σε επαφή.



Σύστημα σωμάτων:

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = (M+m)a \\ \sum F_x = B_{1x} + B_{2x} - T_1 - T_2 \\ B_{1x} = Mg\sin 30^0 \text{ και } B_{1x} = \mu g \sin 30^0\end{array}\right\} a \sim 2.6 \quad m/s^2$$

Για κάθε σώμα:

$$\left.\begin{aligned} B_{1x} - F_1 - T_1 &= Ma \\ B_{2x} + F_2 - T_2 &= ma \end{aligned}\right\} \qquad F_1 = F_2 \sim 2.1\ \mathrm{N}$$

(γ) $W_N = W_{F1} + W_{F2} = 0$

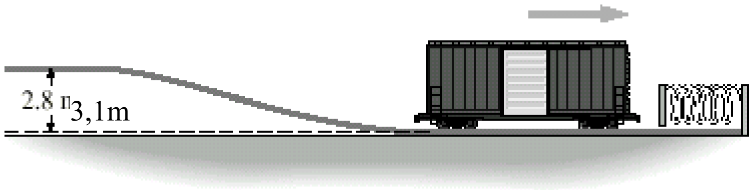
$$\left.\begin{aligned} W_{B1} &= Mg\sin 30^0\ S \\ W_{B2} &= mg\sin 30^0\, S \\ W_{T1} &= -T_1 S \\ W_{T2} &= -T_2 S \end{aligned}\right\} \qquad W_{o\lambda} \sim 6.4\ Joule$$

Όπου S η μετατόπιση των σωμάτων.

ΘΕΜΑ 4

(α) Δύο σώματα, ίδιας μάζας, κινούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις, με ταχύτητες ίδιου μέτρου υ και συγκρούονται πλαστικά. Μετά τη σύγκρουση η ταχύτητα του συσσωματώματος έχει μέτρο υ/2. Βρείτε τη γωνία μεταξύ των αρχικών ταχυτήτων των δύο σωμάτων.

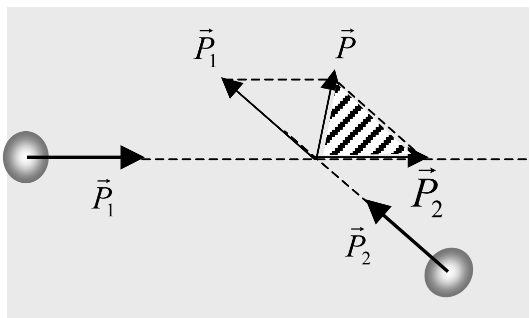
(β) Το βαγόνι του σχήματος αρχίζει να κινείται από την ηρεμία από το υψηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου (3,1m υψηλότερα του εδάφους) και σταματά συγκρουόμενο με το ελατήριο στο τέλος της σιδηροτροχιάς. Εάν η σταθερά του ελατηρίου είναι $5{,}2\mathrm{x}10^6$ N/m και η μάζα του οχήματος είναι 54000 kg, να υπολογιστεί η συμπίεση του ελατηρίου. (Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g=10\mathrm{m/s}^2$ και οι τριβές θεωρούνται αμελητέες)



(γ) Ένας συμπαγής και ένας κοίλος κύλινδρος, ιδίων διαστάσεων και μαζών, τοποθετούνται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο και αρχικά ηρεμούν. Τα δύο αντικείμενα αφήνονται ελεύθερα να διανύσουν απόσταση S κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Να βρεθεί ποίο από τα δύο αντικείμενα χρειάστηκε το λιγότερο χρόνο, εάν ι) οι κύλινδροι ολισθαίνουν χωρίς τριβές και ιι) εάν κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν.

Λύση

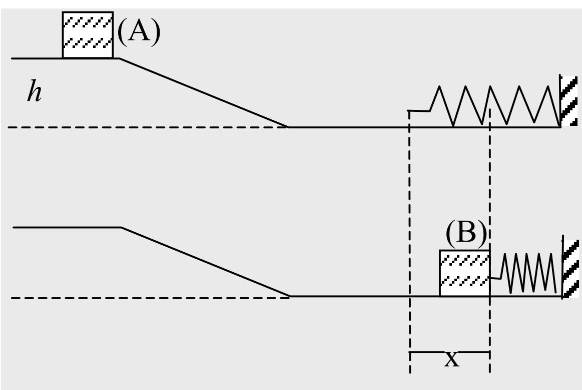
(α)



$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}$ (η σχέση παριστάνεται γραφικά στο διπλανό σχήμα).

Αφού τα διανύσματα $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}$ είναι ίσου μέτρου, το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Άρα η γωνία μεταξύ των $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ είναι 120^0.

(β)



Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Τριβές αμελητέες) έχουμε:

Εμηχ(Α) = Εμηχ(Β)

$$Mgh = \frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow$$

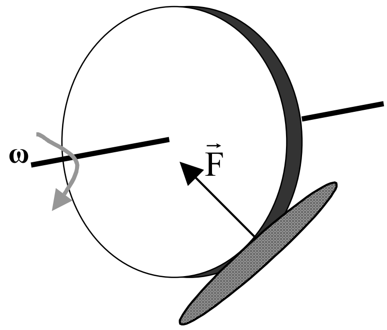
$$x \sim 0.8\ m$$

(γ) (ι) ίδια επιτάχυνση α = gsinφ

(ιι) Η ροπή αδράνειας και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας κάθε σώματος δίνεται από τις σχέσεις $I = \lambda MR^2$ και $a_{cm} = \dfrac{g}{\lambda + 1}\sin\phi$ αντίστοιχα [ΘΕΩΡΙΑ Τόμος ΙΙ σελ. 386-388]. Είναι όμως $\lambda_{κοίλου} > \lambda_{συμπαγούς}$ άρα $\alpha_{κοίλου} < \alpha_{συμπαγούς}$. Επομένως πιο γρήγορα θα φθάσει ο συμπαγής κύλινδρος.

ΘΕΜΑ 5

(α) Ένας ομογενής και συμπαγής τροχός έχει ακτίνα 0,5m , μάζα 100 kg και αμελητέο πάχος. Περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα εκτελώντας 50 στροφές/min. Ο τροχός σταματά σε 6 s όταν κάποιος πιέσει ένα βρεγμένο πανί στην περίμετρο του, ασκώντας έτσι μία ακτινική δύναμη $\vec{F}$ με φορά προς το κέντρο του δίσκου, μέτρου 70N. Βρείτε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του βρεμένου πανιού και της περιφέρειας του τροχού.



(β) Το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου δίνεται ως:

$\vec{r}(t) = \alpha \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{i} + \alpha \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{j} + \beta \cdot t \cdot \vec{k}$.

Όπου ο χρόνος (t) μετρείται σε δευτερόλεπτα, το μέτρο του διανύσματος θέσης σε μέτρα και τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$ αντιστοιχούν στους άξονες X, Y και Z.

i) Σε τι μονάδες μετρούνται οι ποσότητες α, β και ω;

ii) Βρείτε τα διανύσματα της στιγμιαίας ταχύτητας και επιτάχυνσης.

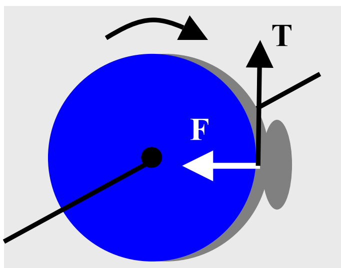
iii) Δείξετε ότι το υλικό σημείο εκτελεί συγχρόνως, ομαλή κυκλική κίνηση στο επίπεδο XY και ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κατά τον άξονα Z.

(γ) Προτείνετε ένα πείραμα που μπορεί να εκτελέσει ένας επιβάτης:

i) ενός κλειστού οχήματος που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ως προς ακίνητο αδρανειακό παρατηρητή ώστε να βεβαιωθεί ότι κινείται

ii) ενός κλειστού οχήματος που κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση ως προς ακίνητο αδρανειακό παρατηρητή ώστε να βεβαιωθεί ότι επιταχύνεται.

Λύση



(α) Από το διπλανό σχήμα προκύπτει ότι:

$$T = \mu F \qquad (1)$$

όπου T είναι η τριβή ολίσθησης μεταξύ πανιού και της περιφέρειας του τροχού και μ ο αντίστοιχος συντελεστής τριβής ολίσθησης.

Για την ροπή της τριβής ως προς τον άξονα περιστροφής του τροχού έχουμε:

$$TR = aI \qquad (2)$$

όπου $I = \frac{1}{2}MR^2$ [Θεωρία , ΤΟΜΟΣ Ι, σελ. 347-348]. Έτσι από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$T = \frac{aMR}{2} \qquad (3)$$

Δεδομένου ότι ο τροχός επιβραδύνεται με σταθερή γωνιακή επιβράδυνση α και σε χρόνο Δt = 6 s σταματά έχουμε:

$$\omega = \omega_0 - at \Rightarrow 0 = \omega_0 - a\Delta t \Rightarrow$$

$$a = \frac{\omega_0}{\Delta t} \qquad (4).$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (3) και (4) παίρνουμε

$$\mu = \frac{\omega_0 MR}{2\Delta t} \Rightarrow \qquad \mu = 0.3$$

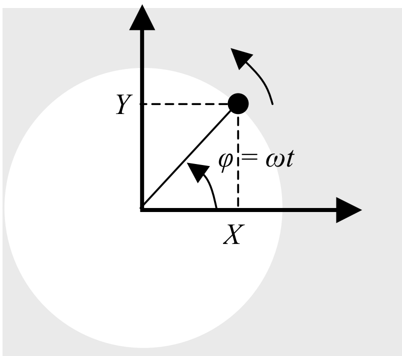
(β) Θέτω όπου $X = a\cos\omega t$, $Y = a\sin\omega t$ και $Z = \beta t$.

(ι) $\omega \to$ s^{-1}, $a \to$ m, $\beta \to$ m/s

(ιι) $\frac{dX}{dt} = -a\omega \sin\omega t$, $\frac{dY}{dt} = a\omega\cos\omega t$ και $\frac{dZ}{dt} = \beta$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t,\ \frac{d^2Y}{dt^2} = -a\omega^2\sin\omega t \text{ και } \frac{d^2Z}{dt^2} = 0$$

(ιιι) Θα βρούμε το διάνυσμα θέσης σώματος που εκτελεί κυκλική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα *ω,* σε κυκλική τροχιά ακτίνας *a* στο επίπεδο XY (βλ. Διπλανό σχήμα):



Έχουμε

$X = a\sin\omega t$ και $Y = a\cos\omega t$. Άρα

$$\vec{r}_1(t) = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$$

Στον άξονα Z η ταχύτητα είναι σταθερή αφού $\frac{dZ}{dt} = \beta$.

(γ)

(ι) ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΜΟΣ Ι, σελ. 55

(ιι) Στην περίπτωση αυτή ο κινούμενος παρατηρητής μπορεί να εκτοξεύσει ένα σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω. Αφού επιταχύνεται θα δει το σώμα να πέφτει στο δάπεδο, αλλά πίσω του.