

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα

Θέμα 1**A)**i) Να βρεθούν τα συνημίτονα κατευθύνσεως του διανύσματος $\vec{a} = 3\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$.ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο στο σημείο $x_0=2$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$.**B)** Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει εκτός της μηδενικής και άλλη λύση.

$$x + \lambda(y + z) = 0$$

$$-2y + z = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda x + y = -z$$

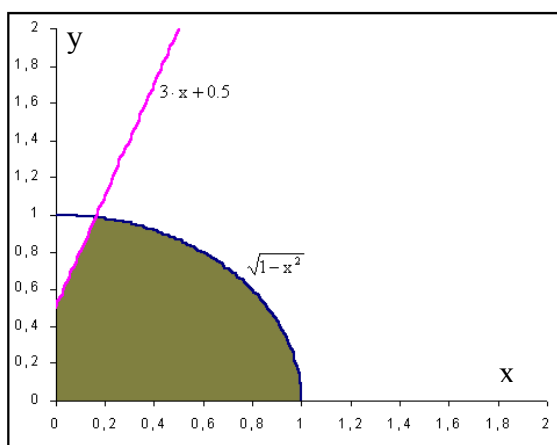
Θέμα 2**A)** Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 4y = \lambda \\ 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \text{ έχει λύση, καθώς και την λύση αυτή.}$$

B) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής που ορίζεται από τις καμπύλες

$$y(x) = 3x + 0.5$$

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

και τους άξονες x και y όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θέμα 3**A)** Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι πίνακες

α) $C = A + B$

β) $D = A \cdot B$

γ) $E = B^{-1}$

B) Το διάνυσμα θέσης κινητού δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου, t , από τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{r} = ae^{-t} \cos(\omega \cdot t) \cdot \hat{x} + be^{-t} \sin(\omega \cdot t) \cdot \hat{y}$ όπου $a, \omega, b \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ και \hat{x}, \hat{y} τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x και y ενός τρισσορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων. Υπολογίσατε τη στροφορμή του κινητού ως προς την αρχή των αξόνων. (Η διανυσματική συνάρτηση της στροφορμής δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{L}(t) = M \cdot (\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt}) \text{ όπου } M \text{ θετική σταθερά.}$$

Θέμα 4

A) i) Δίνονται οι πίνακες $A = (2,1)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Να βρεθούν αν υπάρχουν οι πίνακες:

α) $C = A \cdot B$

β) $D = B \cdot A$

ii) Δίδεται η συνάρτηση:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^x$$

Δείξτε ότι ικανοποιεί την εξίσωση: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = e^x$

B) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x^2 \ln x dx$.

Θέμα 5

A) Δίνεται η συνάρτηση y της ανεξάρτητης μεταβλητής x , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:
 $x^2 + y^2 - 4 = 0$, με $x, y > 0$.

Να βρεθεί η $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$.

B) Να μελετηθεί η συνάρτηση $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 6x + 8$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Θέμα 6

A) Δίνεται η καμπύλη $\vec{r}(t) = 3 \cos 2t \cdot \hat{i} + 3 \sin 2t \cdot \hat{j} + (8t - 4)\hat{h}$ όπου $\hat{x}, \hat{y}, \hat{h}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y και z αντίστοιχα ενός τρισσορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων.

Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα κατά μήκος της καμπύλης.

B) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} dx$$

Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα

Να απαντηθούν 5 από τα 6 θέματα.

Καλή επιτυχία