ΘΕΜΑ 1

Α. Αν $\vec{r} = \vec{a}\cos(\omega t) + \vec{b}\sin(\omega t)$, όπου $\vec{a}, \vec{b}, \omega$ είναι σταθερές ποσότητες. Να δείξετε ότι ισχύει:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega \vec{a} \times \vec{b},$$

και επιπλέον να δείξετε ότι το $\vec{r}$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2 \vec{r} = 0$$

Β. Αν $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{a}$ και $\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{b}$ να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{\omega} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

Λύση

Α)

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\vec{a}\cos(\omega t) + \vec{b}\sin(\omega t)\right] \times \left[-\vec{a}\omega\sin(\omega t) + \vec{b}\omega\cos(\omega t)\right] =$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\omega\cos^2(\omega t) - \left(\vec{b} \times \vec{a}\right)\omega\sin^2(\omega t) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\omega\cos^2(\omega t) + \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\omega\sin^2(\omega t) =$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\omega\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\omega$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = \frac{d(\left[-\vec{a}\omega\sin(\omega t) + \vec{b}\omega\cos(\omega t)\right])}{dt} + \omega^2\left[\vec{a}\cos(\omega t) + \vec{b}\sin(\omega t)\right] =$$

$$\left[-\vec{a}\omega^2\cos(\omega t) - \vec{b}\omega^2\sin(\omega t)\right] + \omega^2\left[\vec{a}\cos(\omega t) + \vec{b}\sin(\omega t)\right] = 0$$

Β)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{a}) \times \vec{b} + \vec{a} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{b}\right) = -\vec{b} \times (\vec{\omega} \times \vec{a}) + \vec{a} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{b}\right) =$$

$$-\vec{\omega}(\vec{\alpha} \cdot \vec{b}) + \vec{a}(\vec{\omega} \cdot \vec{b}) + \vec{\omega}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\alpha}(\vec{\omega} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

ΘΕΜΑ 2

Α. Αν ισχύει $y^3 - x^4 + 2xy = 2$

1. Να βρεθεί η $\frac{dy}{dx}$ ως συνάρτηση των (x, y)
2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (1,1)

(υποθέτουμε ότι το x περιορίζεται σε εκείνες τις τιμές για τις οποίες έχει νόημα η y)

Β. Να βρεθεί η $\frac{dy}{dx}$ αν $\sin(x + y) = y^2\cos x$

Λύση :

Α.

1.

$$y^3 - x^4 + 2xy = 2 \Rightarrow 3y^2y' - 4x^3 + 2y + 2xy' = 0 \Rightarrow$$

$$y'(3y^2 + 2x) = 4x^3 - 2y \Rightarrow y' = \frac{4x^3 - 2y}{3y^2 + 2x}$$

2.

για $x = 1, y = 1 \Rightarrow y' = \frac{4 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 2 \cdot 1} = \frac{2}{5}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - 1 = \frac{2}{5}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{5}(2x+3)$$

Β.

$$\cos(x+y) \cdot (1+y') = 2yy'\cos x + y^2(-\sin x) \Rightarrow$$

$$\cos(x+y) + y^2 \sin x = y'[2y\cos x - \cos(x+y)] \Rightarrow$$

$$y' = \frac{\cos(x+y) + y^2 \sin x}{2y\cos x - \cos(x+y)}$$

ΘΕΜΑ 3

Α. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int \sin^4 2x \; dx$ και $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$

Β. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες:

$$f(x) = 8x,\; g(x) = x,\; h(x) = \frac{1}{x^2}$$

Λύση

Α.

$$\int \sin^4 2x \; dx = \int (\sin^2 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos 4x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + \cos^2 4x - 2\cos 4x) dx =$$

$$\frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 4x dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\int (\frac{1+\cos 8x}{2}) dx - \frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4} + C =$$

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\int \cos 8x dx - \frac{1}{8}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x + \frac{\sin 8x}{64} - \frac{\sin 4x}{8} + C$$

Β. $x^4 + 3x^2 + 2 = x^2(x^2+1) + 2(x^2+1) = (x^2+1)(x^2+2)$

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \Rightarrow$$

$$(Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 2 \Rightarrow$$

$$Ax^3 + Bx^2 + 2Ax + 2B + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D = x^3 + x^2 + x + 2 \Rightarrow$$

$$A + C = 1,\; B + D = 1,\; 2A + C = 1,\; 2B + D = 2 \Rightarrow$$

$$A = 0,\; C = 1,\; B = 1,\; D = 0$$

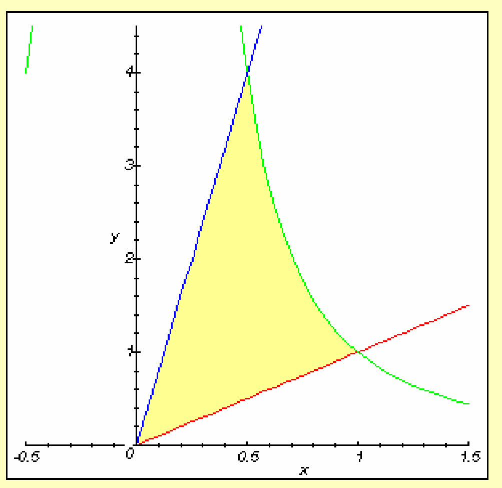
$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{xdx}{x^2+2}$$

$$x = \tan u \Rightarrow dx = d\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right) = \frac{d\sin u}{\cos u} - \frac{\sin u \; d\cos u}{\cos u} = du + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}du = du(1+\tan^2 u)$$

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx = \int \frac{du(1+\tan^2 u)}{(1+\tan^2 u)} + \int \frac{d(x^2)}{2(x^2+2)} = u + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| + C_1 = a\tan x + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| + C$$

C. Βρίσκουμε τα σημεία τομής για κάθε ζεύγος συναρτήσεων:

a. Σημείο τομής των f και g είναι το x=0.
b. Σημείο τομής των f και h είναι το x=0.5
c. Σημείο τομής των g και h είναι το x=1



Στο διάστημα [0,0.5] $f(x) \geq g(x)$ και στο [0.5,1] $h(x) \geq g(x)$. Το εμβαδόν της επιφάνειας προκύπτει από το άθροισμα των δύο ολοκληρωμάτων.

$$\int_0^{0.5}(8x-x)dx + \int_{0.5}^{1}(x^{-2}-x)dx = \left.\frac{7x^2}{2}\right|_0^{0.5} + \left.\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^2}{2}\right|_{0.5}^{1} =$$

$$\frac{7\cdot(0.5)^2}{2} - \frac{7\cdot(0)^2}{2} + \frac{1^{-1}}{-1} - \frac{1^2}{2} - \left[\frac{0.5^{-1}}{-1} - \frac{0.5^2}{2}\right] = 1.5$$