Θέματα και Λύσεις 1ης Εργασίας

① Είναι δυνατόν τό άθροισμα δύο διανυσμάτων διαφορετικού μέτρου νά δώσει συνισταμένη μηδέν; Τριών διανυσμάτων;

α' ερώτηση: $\vec{X}_1+\vec{X}_2=0 \Rightarrow |\vec{X}_1|=|\vec{X}_2|$, δηλαδή όχι, αφού άν τό άθροισμα είναι μηδέν επιβάλλεται τά μέτρα νά είναι ίσα.

β' ερώτηση: $\vec{X}_1+\vec{X}_2+\vec{X}_3=0$, ναι, όπως φαίνεται στό παρακάτω παράδειγμα:

ανύσματα: $(x,0,y)+(-x,z,0)+(0,-z,-y)=0$

μέτρα: $\sqrt{x^2+y^2} \neq \sqrt{x^2+z^2} \neq \sqrt{z^2+y^2}$

② Η τιμή ενός βαθμωτού μεγέθους εξαρτάται από τό σύστημα αναφοράς.

όχι (εξ' ορισμού)

③ Πότε α) τό εσωτερικό, β) τό εξωτερικό και γ) ταυτόχρονα τό εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μηδέν;

α) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\theta_{\vec{a},\vec{b}}=0 \Rightarrow |\vec{a}|=0;\ |\vec{b}|=0;\ \cos\theta_{\vec{a},\vec{b}}=0$

β) $\vec{a}\times\vec{b}=0 \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\theta_{\vec{a},\vec{b}}=0 \Rightarrow$ " " $\sin\theta_{\vec{a},\vec{b}}=0$

γ) και τά δύο άν $|\vec{a}|=0$ ή $|\vec{b}|=0$

④ Γράψτε ένα πίνακα πού νά ταυτίζεται μέ τόν αντίστροφό του.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑤ Μπορεί νά υπάρχουν δύο διαφορετικοί αντίστροφοι ενός πίνακα A; Τεκμηριώστε τήν απάντησή σας.

όχι. Έστω ότι υπάρχουν δύο αντίστροφοι ο B και C

$\Rightarrow$ $B\cdot A=A\cdot B=I$ και $C\cdot A=A\cdot C=I$ (I = μοναδιαίος)

$\Rightarrow$ $\underbrace{B\cdot A}_{I}\cdot C=C$ και $B\cdot\underbrace{A\cdot C}_{I}=B \Rightarrow C=B$

6. Ποιός πίνακας ταυτίζεται μέ τόν ανάστροφό του; Γράψτε τήν γενική μορφή.

$$A = A^T \Rightarrow [a_{ij} = a_{ji}]$$

7. Φανταστείται ότι ένα φορτισμένο σωματίδιο μέ φορτίο q κινείται μέ ταχύτητα $\vec{v}$ σέ μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\vec{B}$. Τότε μπορεί νά δειχτεί ότι ή δύναμη $\vec{F}$ πού ασκείται στό σωματίδιο είναι ίση μέ $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$.
Μέ χρήση τριών πειραμάτων βρίσκουμε ότι:

όταν $\vec{v} = \vec{i}$ τότε $\frac{\vec{F}}{q} = 2\vec{k} - 4\vec{j}$

όταν $\vec{v} = \vec{j}$ τότε $\frac{\vec{F}}{q} = 4\vec{i} - \vec{k}$

όταν $\vec{v} = \vec{k}$ τότε $\frac{\vec{F}}{q} = \vec{j} - 2\vec{i}$

Από τά παραπάνω αποτελέσματα βρείτε τά διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$.

Η γενική μορφή της $\vec{B}$ είναι: $\vec{B} = \vec{i}B_1 + \vec{j}B_2 + \vec{k}B_3$

Από τήν πρώτη σχέση: $\vec{i} \times \vec{B} = \vec{k}B_2 - \vec{j}B_3 = 2\vec{k} - 4\vec{j} \Rightarrow B_2 = 2,\ B_3 = 4$

" " δεύτερη " : $\vec{j} \times \vec{B} = -\vec{k}B_1 + \vec{i}B_3 = 4\vec{i} - \vec{k} \Rightarrow B_1 = 1$

άρα: $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ καί ή τρίτη σχέση επαληθεύεται.

8. Ένας πίνακας A λέγεται ορθογώνιος όταν $A^T = A^{-1}$. Δείξτε ότι τό γινόμενο δύο ορθογώνιων πινάκων είναι κι' αυτό ορθογώνιος πίνακας.

Έστωσαν ορθογώνιοι πίνακες A καί B $\Rightarrow A^T = A^{-1}$, $B^T = B^{-1}$

$$\Rightarrow (AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$$

9. Τά 3 σημεία P_1, P_2, P_3 ορίζονται στό καρτεσιανό σύστημα $Oxyz$ μέ ανύσματα $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ αντίστοιχα. Στό σύστημα αυτό ισχύει: $\lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2 + \lambda_3\vec{r}_3 = 0$. Εάν ή σχέση αυτή ισχύει καί αναφορικά μέ τυχούσα άλλη αρχή O' τών αξόνων, δείξτε ότι: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

Αν $\vec{O'O} = \vec{m} \Rightarrow \vec{r}_1' = \vec{r}_1 + \vec{m}$, $\vec{r}_2' = \vec{r}_2 + \vec{m}$ καί $\vec{r}_3' = \vec{r}_3 + \vec{m}$

εφ' όσον $\lambda_1\vec{r}_1' + \lambda_2\vec{r}_2' + \lambda_3\vec{r}_3' = 0 \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\vec{m} = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

(10) α) Γιά κάθε $\nu \in N^*$ δείξτε ότι τό $7^\nu - 1$ είναι πολλαπλάσιο τού 6.

β) Γιά κάθε $\nu \geq 2$ δείξτε ότι $1+3+5+\dots+(2\nu-1)=\nu^2$

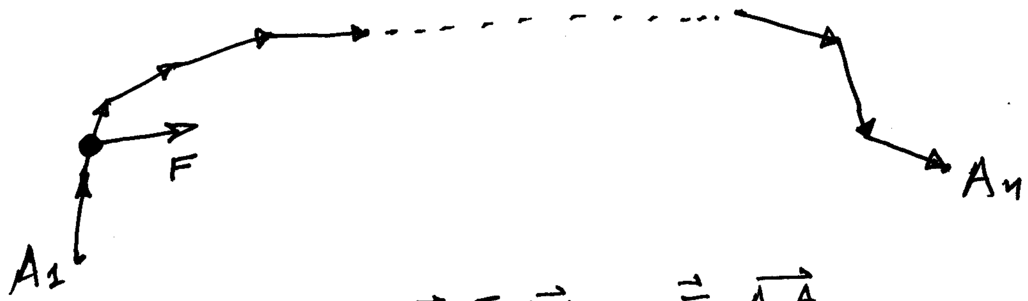
(α) $7^\nu - 1 = (7-1)(7^{\nu-1}+7^{\nu-2}+\dots+1) = 6\cdot(7^{\nu-1}+7^{\nu-2}\dots+1)$

(β) Χρησιμοποιούμε τήν μέθοδο επαγωγής: ισχύει γιά $\nu=1$,

$$S_\nu = 1+3+\dots+(2\nu-1) = \nu^2$$

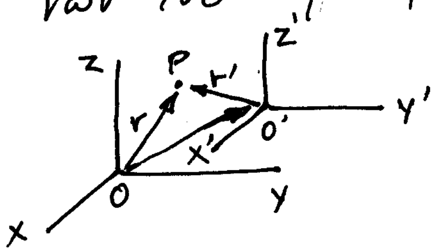
$$S_{\nu+1} = 1+3+\dots+(2\nu+1) = \nu^2+2\nu+1 = (\nu+1)^2 \quad \text{ο.ε.δ.}$$

(11) Μιά σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μετακινεί ένα σωμάτιο από τό σημείο A_1 στό σημείο A_n ακολουθώντας τεθλασμένη γραμμή, όπως φαίνεται στό σχήμα. Δείξτε ότι τό έργο πού παράγει ή δύναμη είναι ανεξάρτητο της μορφής πού έχει ή τεθλασμένη γραμμή και ισούται μέ $W = \vec{F}\cdot\vec{A_1A_n}$



$$W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}\cdot\vec{\Delta x_i} = \vec{F}\cdot\sum\vec{\Delta x_i} = \vec{F}\cdot\vec{A_1A_n}$$

(12) Ένας παρατηρητής Α καταγράφει τή θέση σωματιδίου Ρ, χρησιμοποιώντας σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων OXYZ μέ κέντρο τόν εαυτό του, ως (1,1,1). Ένας άλλος παρατηρητής Β καταγράφει τή θέση του ίδιου σωματιδίου Ρ, χρησιμοποιώντας σύστημα συντεταγμένων O'X'Y'Z' ώς (2,3,4). Αν οι άξονες των δύο καρτεσιανών συστημάτων είναι παράλληλοι νά ευρεθεί ή θέση του παρατηρητή Β στό σύστημα συντεταγμένων του παρατηρητή Α.



$\vec{r} = (1,1,1)$ $\quad\vec{r}' = (2,3,4)$

$\vec{OO'} + \vec{r}' = \vec{r} \Rightarrow \vec{OO'} = \vec{r} - \vec{r}' = (-1,-2,-3)$

(13) Δίδεται ή σχέση $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix}$. Να βρεθούν τά a, β, λ αν τό διάνυσμα $\begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix}$ έχει μέτρο τή μονάδα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} a+\beta = \lambda a & (1) \\ a-\beta = \lambda \beta & (2) \end{array}$$

Επίσης ισχύει $a^2+\beta^2 = 1$ (3)

Υψώνοντας στό τετράγωνο καί προσθέτοντας τίν (1) καί (2) $\Rightarrow$

$2(a^2+\beta^2) = \lambda^2(a^2+\beta^2) \Rightarrow$ λόγω τής (3) $\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$

Γιά $\lambda = \sqrt{2}$ $\quad a+\beta = \sqrt{2}\cdot a \Rightarrow \beta = (\sqrt{2}-1)a$ (4)

$a-\beta = \sqrt{2}\cdot\beta$

$$a^2+\beta^2 = 1 = \alpha^2+(\sqrt{2}-1)^2a^2 = \alpha^2+(2+1-2\sqrt{2})a^2 \Rightarrow$$

$$1 = 4a^2 - 2\sqrt{2}\alpha^2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4-2\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{16-8} = \frac{4+2\sqrt{2}}{8}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1+\sqrt{2}/2}{2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Επομένως $\beta^2 = \dfrac{1-\sqrt{2}/2}{2} \Rightarrow \beta = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

λόγω τής σχέσης (4) μόνο λύσεις τών a, β μέ το ίδιο πρόσημο επιτρέπονται

Γιά $\lambda = -\sqrt{2}$ $\quad a+\beta = -\sqrt{2}\cdot\alpha \Rightarrow \beta = -(\sqrt{2}+1)\alpha$ (5)

$\alpha-\beta = -\sqrt{2}\cdot\beta$

$$a^2+\beta^2 = 1 = a^2+(\sqrt{2}+1)^2a^2 = a^2+(2+1+2\sqrt{2})a^2 \Rightarrow$$

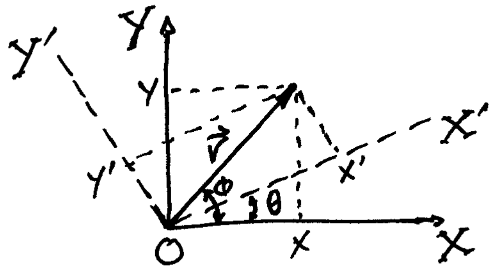
$$1 = 4a^2+2\sqrt{2}a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4+2\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{16-8} = \frac{4-2\sqrt{2}}{8}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1-\sqrt{2}/2}{2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Επομένως $\beta^2 = \dfrac{1+\sqrt{2}/2}{2} \Rightarrow \beta = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}/2\right)}$

λόγω τής σχέσης (5) οί λύσεις τών a, β πού επιτρέπονται είναι αυτές μέ αντίθετο πρόσημο.

(14) Δύο συστήματα συντεταγμένων OXY και OX'Y' έχουν κοινή αρχή O. Το σύστημα OX'Y' είναι στραμμένο κατά γωνία θ ως πρός το σύστημα OXY, όπως στό σχήμα. Το διάνυσμα $\vec{r}$ στο σύστημα OXY έχει συντεταγμένες (x,y). Να εκφράσετε τις συντεταγμένες (x',y') του ίδιου διανύσματος στο σύστημα OX'Y' συναρτήσει των x, y, θ. Στή συνέχεια να βρείτε τά στοιχεία του 2×2 πίνακα A, για τόν οποίο ισχύει: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Από το σχήμα βλέπουμε ότι ισχύει:

$x = r\cos\phi$ όπου $r = |\vec{r}|$

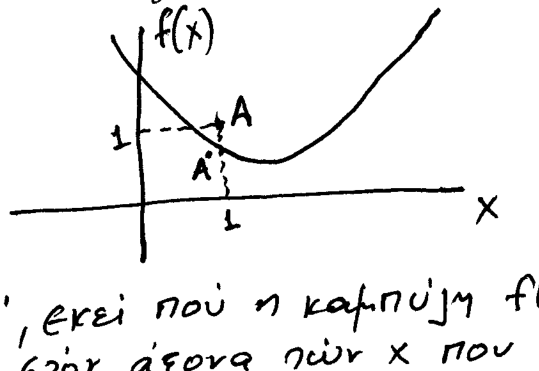
$y = r\sin\phi$

Επίσης: $x' = r\cos(\phi-\theta) = r\cos\phi\cos\theta + r\sin\phi\sin\theta$
$= x\cdot\cos\theta + y\cos\theta$

$y' = r\sin(\phi-\theta) = r\sin\phi\cdot\cos\theta - r\cos\phi\sin\theta$
$= y\cos\theta - x\sin\theta$

δηλαδή: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ άρα $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda^2 x^2 + 5\lambda x - 1$. Να βρεθούν οι τιμές του λ, για τις οποίες το σημείο με συντεταγμένες $(1,1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό της παραβολής πού περιγράφεται από τήν παραπάνω συνάρτηση.



Τό σημείο A', εκεί πού η καμπύλη $f(x) = \lambda^2x^2 + 5\lambda x - 1$ τέμνει τήν κάθετο στόν άξονα τών x που περνά από τό σημείο $A=(1,1)$ θα πρέπει νά είναι κάτω από τό A $\Rightarrow$ $f(1) = \lambda^2 + 5\lambda - 1 \leq 1 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda - 2 \leq 0$. Γιά να ισχύει η ανισότητα το λ θα πρέπει να βρίσκεται μεταξύ τών ριζών: $\frac{-5+\sqrt{33}}{2} > \lambda > \frac{-5-\sqrt{33}}{2}$

16) Θεωρούμε τόν πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 6\end{bmatrix}$ καί τήν εξίσωση $A\cdot X=\lambda X$, όπου X πίνακας 2×1 καί $\lambda\in\mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες ή εξίσωση αυτή έχει μή μηδενική λύση.

(β) Γιά κάθε τιμή του λ που θά βρείτε, νά λύσετε τήν εξίσωση.

α) $A\cdot X=\lambda X \Rightarrow A\cdot X-\lambda X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ -3 & 6-\lambda\end{pmatrix}X=0$

οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι μή μηδενικές όταν ή ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ -3 & 6-\lambda\end{pmatrix}$ είναι μηδέν, δηλαδή:

$(1-\lambda)(6-\lambda)+6=12-7\lambda+\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\frac{7+1}{2}=4$

$\lambda_2=\frac{7-1}{2}=3$

(β) Γιά $\lambda=3$

$x+2y=3x \Rightarrow 2x=2y \Rightarrow x=y \Rightarrow X=\begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix}$

$-3x+6y=3y$

Γιά $\lambda=4$

$x+2y=4x \Rightarrow y=\frac{3}{2}x \Rightarrow X=\begin{pmatrix}x\\ \frac{3}{2}x\end{pmatrix}$

$-3x+6y=4y$

17) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, γιά τις οποίες ο πίνακας

$A=\begin{bmatrix}1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & -1\\ \lambda & 0 & 1\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος καί νά βρεθεί ο αντίστροφος.

Πολλαπλασιάζουμε μέ $-\lambda$ τήν πρώτη σειρά καί προσθέτουμε στήν $3^{η}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -\lambda^2 & 1\end{bmatrix}$ Ανάλογα πολλαπλασιάζουμε τήν $2^{η}$ σειρά μέ λ^2 καί προσθέτουμε στήν $3^{η}$.

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ ή ορίζουσα είναι $\Delta=1-\lambda^2$ γιά να υπάρχει αντίστροφος πρέπει $\lambda\neq\pm 1$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\operatorname{adj}A=\frac{1}{1-\lambda^2}\begin{bmatrix}1 & -\lambda & -\lambda\\ -\lambda & 1 & 1\\ -\lambda & \lambda^2 & 1\end{bmatrix}$

18 Να λυθεί το σύστημα

$$(\lambda+1)x+y=\lambda+1 \quad (1)$$
$$x+(\lambda+1)y=1 \quad (2)$$
$$x+y=2\lambda+1 \quad (3)$$

$(3)-\frac{(1)}{\lambda+1}$: $y-\frac{y}{\lambda+1}=2\lambda \quad (1)'$

$(2)-\frac{(1)}{\lambda+1}$: $(\lambda+1)y-\frac{y}{\lambda+1}=0 \quad (2)'$

$(2)' \Rightarrow y\cdot((\lambda+1)^2-1)=0 \Rightarrow y=0$ ή $\lambda=0$ ή $\lambda=-2$

α) $y=0$: $\left.\begin{array}{l}(1)\Rightarrow (\lambda+1)x=\lambda+1\\ (2)\Rightarrow x=1\\ (3)\Rightarrow x=2\lambda+1\end{array}\right\} \Rightarrow x=1,\ \lambda=0,\ y=0$ λύση

β) $\lambda=0$ $\left.\begin{array}{l}(1)\Rightarrow x+y=1\\ (2)\Rightarrow x+y=1\\ (3)\Rightarrow x+y=1\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=0,\ x+y=1$ η λύση

γ) $\lambda=-2$ $\left.\begin{array}{l}(1)\Rightarrow -x+y=-1\\ (2)\Rightarrow x-y=1\\ (3)\Rightarrow x+y=-3\end{array}\right\}$ $(2)+(3)$: $2x=-2 \Rightarrow x=-1$

(2) : $-1-y=1 \Rightarrow y=-2$

$(1)\equiv(2)$

$\Rightarrow$ λύση : $\lambda=-2,\ x=-1,\ y=-2$

η λύση β) περιλαμβάνει τη λύση α) άρα έχουμε "δύο" λύσεις :

$\lambda=0,\ x+y=1$

και $\lambda=-2,\ x=-1,\ y=-2$

(19) Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss:

α) $\begin{aligned} 2x+y-2z&=10 \\ 3x+2y+2z&=1 \\ 5x+4y+3z&=4 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 2x+3y+8z&=4 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} 2x+3y-2z&=5 \\ x-2y+3z&=2 \\ 4x-y+4z&=1 \end{aligned}$

Τι γενικά συμπεράσματα μπορείτε να εξάγετε από τα παραπάνω τρία παραδείγματα, όσον αφορά την επίλυση συστημάτων με τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss;

α)
$$\left.\begin{aligned} 2x+y-2z&=10 \quad (1) \\ 3x+2y+2z&=1 \quad (2) \\ 5x+4y+3z&=4 \quad (3) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1): \\ &(2)-\tfrac{3}{2}(1): \\ &(3)-\tfrac{5}{2}(1): \end{aligned} \left.\begin{aligned} 2x+y-2z&=10 \quad (1)' \\ \tfrac{1}{2}y+5z&=-14 \quad (2)' \\ \tfrac{3}{2}y+8z&=-21 \quad (3)' \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1)': && 2x+y-2z=10 \\ &(2)': && \tfrac{1}{2}y+5z=-14 \\ &(3)'-3(2)': && -7z=21 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x&=1 \\ y&=2 \\ z&=-3 \end{aligned}$$

<u>μία λύση</u>

β)
$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \quad (1) \\ 2x+3y+8z&=4 \quad (2) \\ 3x+2y+17z&=1 \quad (3) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1): \\ &(2)-2\cdot(1): \\ &(3)-3\cdot(1): \end{aligned} \left.\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \quad (1)' \\ -y+2z&=-2 \quad (2)' \\ -4y+8z&=-8 \quad (3)' \end{aligned}\right\}$$

παρατηρούμε ότι (2)' και (3)' είναι ταυτόσημες $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ y&=2(z+1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=-1-7z \\ y&=2(z+1) \end{aligned}\right\} \quad z\in\mathbb{R}$$

<u>άπειρες λύσεις</u>

γ)
$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-2z&=5 \quad (1) \\ x-2y+3z&=2 \quad (2) \\ 4x-y+4z&=1 \quad (3) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1): \\ &(2)-(1)/2: \\ &(3)-(1)/2: \end{aligned} \left.\begin{aligned} 2x+3y-2z&=5 \quad (1)' \\ -\tfrac{7}{2}y+4z&=-\tfrac{1}{2} \quad (2)' \\ -7y+8z&=-9 \quad (3)' \end{aligned}\right\}$$

$(3)'-2\cdot(2)':\quad 0=-8 \Rightarrow$ <u>αδύνατον</u>

20 Δίδονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

(α) Να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και νά βρεθεί ο αντίστροφός του.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $A \cdot X = B$

(α)
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} (1): \\ (2)-(1)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}: \\ (3): \end{matrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ορίζουσα $\Delta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(β)
$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c & c \cdot s & -s^2 \\ -s & c^2 & -sc \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$ όπου $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$