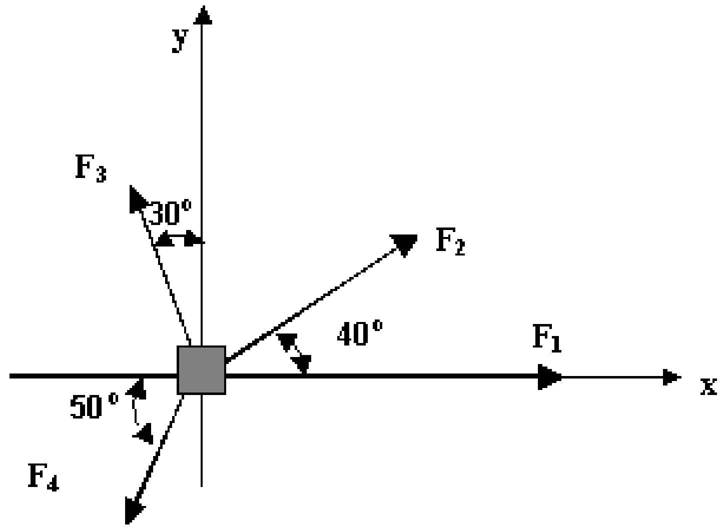
ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η

(αποστολή μέχρι Δευτέρα 1/4/2003 + 1 βδομάδα)

Άσκηση 1 (5 μονάδες):

Να βρεθεί η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν πάνω στο σώμα μάζας 2Kg , όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποιό είναι το μέτρο και η διεύθυνσή της; Ποιο είναι το μέτρο και η διεύθυνση της επιτάχυνσης του σώματος;
Δίνονται F_1=120N, F_2=90N, F_3=30N, F_4=80N.



Λύση

Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στο σώμα είναι:

$$\vec{F}_1 = 120\,\hat{x}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \cos 40^0\,\hat{x} + F_2 \sin 40^0\,\hat{y} = 68.94\hat{x} + 57.85\hat{y}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \cos 120^0\,\hat{x} + F_3 \sin 120^0\,\hat{y} = -15\hat{x} + 25.98\hat{y}$$

$$\vec{F}_4 = F_4 \cos 230^0\,\hat{x} + F_4 \sin 230^0\,\hat{y} = -51.42\hat{x} - 61.28\hat{y}$$

Η συνισταμένη τους είναι: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

επομένως:

$$F_x = \sum F_{ix} = 120 + 68.94 - 15 - 51.42 = 122.52\ N$$

$$F_y = \sum F_{iy} = 0 + 57.85 + 25.98 - 61.28 = 22.55\ N$$

Άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν πάνω στο σώμα είναι:

$$\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} = 122.52\,\hat{x} + 22.55\hat{y}\ N$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το μέτρο της είναι:

$$F = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = 124.54\ N$$

και η διεύθυνσή της : $\tan\theta = \dfrac{F_y}{F_x} = 0.184 \Rightarrow \theta = 10.42^0$

Το σώμα μάζας 2 Kg επιταχύνεται υπό την επίδραση της δύναμης F, με επιτάχυνση μέτρου: $a = \frac{F}{m} = \frac{124.54}{2} = 62.27\ {}^{m}\!/\!_{s^2}$ και διεύθυνσης : $\theta = 10.42^0$

Άσκηση 2 (7 μονάδες):

Οι εξισώσεις συντεταγμένων θέσης-χρόνου ενός υλικού σημείου είναι :

$x = t^2$ και $y = t^4 - 2t^2 - 3$ (όπου το t μετριέται σε sec)

Να βρεθεί :

α) η εξίσωση της τροχιάς (δηλαδή η συντεταγμένη y σαν συνάρτηση της συντεταγμένης x).
β) η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του την χρονική στιγμή t = 1.5 s.
Τα x,y μετρούνται σε μέτρα (m)

Λύση:

α) Από τις εξισώσεις συντεταγμένων θέσης-χρόνου του σώματος $x = t^2$ και $y = t^4 - 2t^2 - 3$, με απαλοιφή του χρόνου t προκύπτει η εξίσωση της τροχιάς :

$y = x^2 - 2x - 3$, που είναι παραβολή.

β) Το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου της τροχιάς είναι:

$$\vec{r} = t^2\ \hat{x} + (t^4 - 2t^2 - 3)\ \hat{y}$$

Άρα η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του είναι:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\ \hat{x} + (4t^3 - 4t)\ \hat{y}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = 2\ \hat{x} + (12t^2 - 4)\ \hat{y}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t=1.5 s η ταχύτητά του είναι:

$$\vec{u} = 3\ \hat{x} + 7.5\ \hat{y} \qquad u = \sqrt{3^2 + 7.5^2} = 8.08\ {}^{m}\!/\!_{s}$$

και η επιτάχυνσή του είναι:

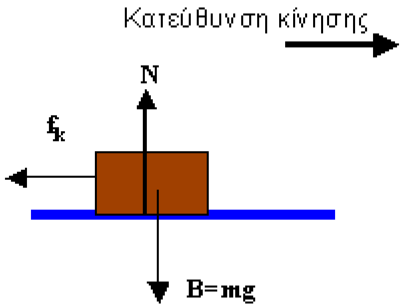
$$\vec{a} = 2\ \hat{x} + 23\hat{y} \qquad \text{με μέτρο :} \qquad a = \sqrt{2^2 + 23^2} = 23.09\ {}^{m}\!/\!_{s^2}$$

Άσκηση 3 (5 μονάδες)

Σε μια παγωμένη λίμνη κάποιος χτυπά ένα δίσκο και του δίνει αρχική ταχύτητα 20 m/s. Βρείτε τον συντελεστή ολισθήσεως ανάμεσα στο δίσκο και στον πάγο εάν ξέρετε ότι ο δίσκος ολίσθησε συνολικά 120 m προτού σταματήσει. Δίδεται g=9.8m/sec^2

Λύση:

Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στο δίσκο είναι α) το βάρος του B=mg, β) η κάθετη αντίδραση του πάγου (N) και γ) η δύναμη της τριβής (f_k), η οποία προκαλεί μια σταθερή επιβράδυνση πάνω στο δίσκο.
Ο δίσκος ισορροπεί κατά την κατακόρυφη διεύθυνση ενώ κινείται επιβραδυνόμενος κατά την οριζόντια διεύθυνση. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, οι συνθήκες κίνησής του είναι:



$-f_k = -m\alpha$ (1)

$N - mg = 0$ (2)

Αλλά $f_k = \mu_\kappa N$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έπεται ότι η επιτάχυνση του δίσκου είναι:
$\alpha = \mu_\kappa g$ (4)

Θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή t=0 ο δίσκος βρίσκεται στη θέση $x_0=0$ και έχει αρχική ταχύτητα $u=u_0$, η εξίσωση ταχύτητας-χρόνου του δίσκου είναι: $u = u_0 - a\cdot t$ (5) και η εξίσωση θέσης-χρόνου: $x = u_0\cdot t - a\cdot \frac{t^2}{2}$ (6).

Απαλείφοντας τον χρόνο από τις εξισώσεις (5) και (6) καταλήγουμε στη σχέση:

$$x = \frac{u_0^{\,2} - u^2}{2\cdot a} \quad (7).$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση u=0 (για την τελική ταχύτητα του δίσκου) και αντικαθιστώντας την επιτάχυνση από τη σχέση (4), προκύπτει ότι ο συντελεστής ολίσθησης είναι :

$$\mu_k = \frac{u_0^{\,2}}{2\cdot g\cdot x} \Rightarrow \mu_k = \frac{\left(20\, m/s^2\right)^2}{2\cdot 9.8\, m/s^2 \cdot 120m} = 0.17$$

Άσκηση 4 (10 μονάδες):

Πύραυλος κινείται από την επιφάνεια της Γης προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση, διπλάσια από την επιτάχυνση της βαρύτητας, όσο λειτουργεί ο κινητήρας του. Ο χρόνος λειτουργίας του κινητήρα είναι 50s. Η αντίσταση του αέρα και η μεταβολή της επιτάχυνσης της βαρύτητας με το ύψος θεωρείται αμελητέα. Δίνεται g=10 m/s^2

α) Υπολογίστε το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει ο πύραυλος.

β) Υπολογίστε το συνολικό χρόνο πτήσης από τη στιγμή της εκτόξευσης μέχρι την επιστροφή του στη Γη.

γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου σ' όλη τη διάρκεια της πτήσης του πυραύλου.

δ) Σχεδιάστε το διάγραμμα ύψους–χρόνου, σ' όλη τη διάρκεια της πτήσης του πυραύλου.

Λύση :

Η κίνηση του πυραύλου όσο λειτουργεί ο κινητήρας του (δηλαδή για χρόνο t_1=50s) είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, με επιτάχυνση: $\vec{a} = 2g\ \hat{z}$ (1).

Η ταχύτητά του κάθε χρονική στιγμή $t \le t_1$ δίνεται από τη σχέση: $\vec{u} = 2gt\ \hat{z}$ (2) και η θέση του από τη σχέση: $\vec{z} = gt^2\ \hat{z}$ (3)

Τη χρονική στιγμή t_1=50s, όταν σταματά να λειτουργεί ο κινητήρας του πυραύλου, η ταχύτητά του, λόγω της (1), είναι: $\vec{u}_1 = 2gt_1\ \hat{z}$ (4) και η θέση του, λόγω της (3) είναι: $\vec{z}_1 = gt_1^{\ 2}\ \hat{z}$ (5)

Από τη στιγμή που θα σταματήσει ο κινητήρας , ο πύραυλος θα συνεχίσει να κινείται προς τα πάνω μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του με επιτάχυνση: $\vec{a} = -g\ \hat{z}$ (6).

Η εξίσωση ταχύτητας -χρόνου είναι: $\vec{u} = [\vec{u}_1 - g(t - t_1)]\ \hat{z}$ (7)

και η εξίσωση θέσης-χρόνου: $\vec{z} = \vec{z}_1 + [\vec{u}_1(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2]\ \hat{z}$ (8)

Η χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία μηδενίζεται η ταχύτητά του υπολογίζεται από τη σχέση (7):

$$\vec{u} = [\vec{u}_1 - g(t_2 - t_1)]\ \hat{z} = 0 \quad \Rightarrow \vec{u}_1 = g(t_2 - t_1)] \xrightarrow{(5)} t_2 = 3t_1 = 150s \quad (9)$$

Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει ο πύραυλος (δηλαδή η θέση του τη χρονική στιγμή t_2=150s) υπολογίζεται από τη σχέση (8):

$$\vec{z}_{\max} = \vec{z}_1 + [\vec{u}_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}g(t_2 - t_1)^2]\ \hat{z} \xrightarrow{(9),(4),(5)} \vec{z}_{\max} = 3gt_1^2 \quad (10)$$

β) Μετά τη χρονική στιγμή t_2, όπου ο πύραυλος φτάνει στο μέγιστο ύψος του, η κίνηση του πυραύλου είναι ελεύθερη πτώση χωρίς αρχική ταχύτητα. Η επιτάχυνσή του δίνεται από τη σχέση (6).

Η εξίσωση ταχύτητας-χρόνου είναι: $\vec{u} = -g(t - t_2)\ \hat{z}$ (11)

και η εξίσωση θέσης-χρόνου:

$$\vec{z} = \vec{z}_2 - [\frac{1}{2}g(t - t_2)^2]\ \hat{z} \xrightarrow{(10)} \vec{z} = [3gt_1^2 - \frac{1}{2}g(t - t_2)^2]\ \hat{z} \quad (12)$$

Από την παραπάνω σχέση (12) μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή $t=t_3$ που ο πύραυλος φτάνει στη Γη, θέτοντας z=0:

$$\vec{z} = \vec{z}_3 = [3gt_1^2 - \frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2]\ \hat{z} = 0 \xrightarrow{(9)} [3gt_1^2 - \frac{1}{2}g(t_3 - 3t_1)^2]\ \hat{z} = 0 \Rightarrow t_3 = t_1(3 \pm \sqrt{6})$$

Η λύση $t_3 = t_1(3 - \sqrt{6}) = 0.5t_1$ δεν έχει φυσική σημασία, άρα ο συνολικός χρόνος πτήσης του πυραύλου είναι:

$$t_3 = t_1(3 + \sqrt{6}) \quad = 5.45\ t_1 \quad = 272\ s$$

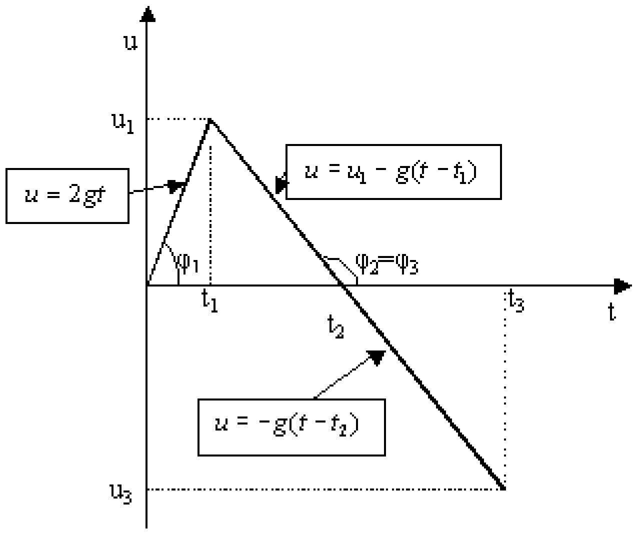
γ) Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η ταχύτητα του πυραύλου στα τρία στάδια της κίνησής του δίδεται από τις παρακάτω εξισώσεις, οι οποίες παριστάνουν ευθείες με κλίσεις που αναγράφονται δίπλα τους:

$$0 \le t \le t_1 \qquad u = 2gt\ \hat{z} \qquad \tan\varphi_1 = 2g$$

$$t_1 \le t \le t_2 \qquad u = u_1 - g(t - t_1)\ \hat{z} \qquad \tan\varphi_2 = -g$$

$$t_2 \le t \le t_3 \qquad u = -g(t - t_2)\ \hat{z} \qquad \tan\varphi_3 = -g$$

Το διάγραμμα ταχύτητας χρόνου παριστάνεται στο σχήμα 1 :



Σχήμα 1: Διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου πτήσης του πυραύλου

δ) Σύμφωνα με τα προηγούμενα , τα διανύσματα θέσης στις τρεις φάσεις της κίνησης του πυραύλου έχουν μέτρα που δίνονται από τις σχέσεις:

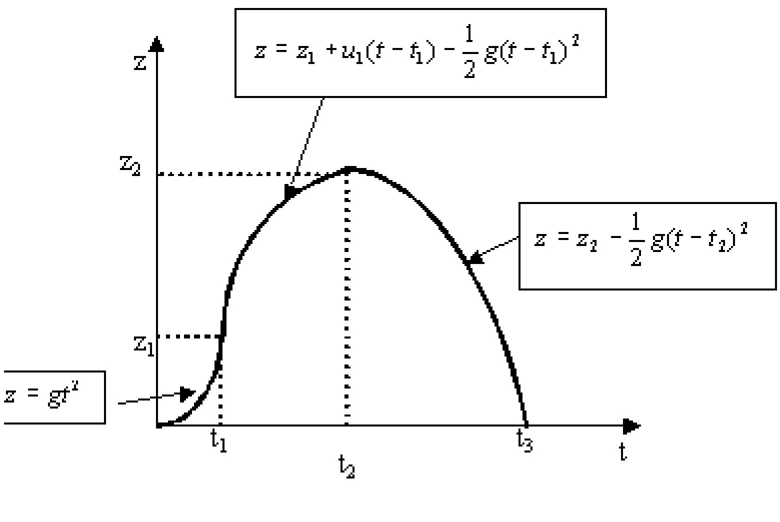
$$0 \le t \le t_1 \quad z = gt^2$$

$$t_1 \le t \le t_2 \quad z = z_1 + u_1(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2$$

$$t_2 \le t \le t_3 \quad z = z_2 - \frac{1}{2}g(t - t_2)^2$$

οι οποίες είναι παραβολές.
Επίσης είδαμε ότι $z_1 = gt_1^{\,2}$ και $z_2 = 3gt_1^{\,2}$

Το διάγραμμα ύψους-χρόνου του πυραύλου δίνεται στο σχήμα 2 :

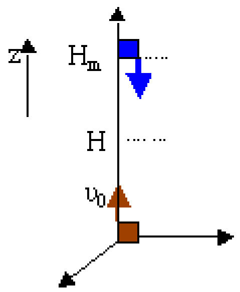


Σχήμα 2: Διάγραμμα ύψος-χρόνου του πυραύλου

Άσκηση 5 (6 μονάδες):

Σώμα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα U_0=30 m/s^2. Ταυτόχρονα ένα δεύτερο σώμα αφήνεται από ύψος H_m να πέσει ελεύθερα. Τα δύο σώματα συναντιούνται όταν το πρώτο απέχει από το έδαφος το 1/3 του μέγιστου ύψους στο οποίο μπορεί να ανεβεί. Να βρεθεί το ύψος H_m. Δίνεται g=10 m/s^2

Λύση:
Το πρώτο σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση κατά τον άξονα z (βλ. σχήμα 3), με επιτάχυνση αντιπαράλληλη με τον άξονα z και μέτρο ίσο με την επιτάχυνση της βαρύτητας: $a\,\hat{z} = -g\,\hat{z}$ (1) .



Η ταχύτητά του κάθε χρονική στιγμή t δίδεται από τη σχέση : $u\,\hat{z} = (u_0 - gt)\,\hat{z}$ (2)

και η θέση του από τη σχέση: $h\,\hat{z} = \left(u_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right)\hat{z}$ (3) .

Σχήμα 3.

Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει είναι το σημείο στο οποίο η ταχύτητά του μηδενίζεται, άρα από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται:

$$h_{\max}\,\hat{z} = \left(\frac{u_0^{\,2}}{2g}\right)\hat{z} = 45\text{m} \qquad (4)$$

Τα δύο σώματα συναντιούνται τη χρονική στιγμή (t_1) όπου το πρώτο σώμα βρίσκεται σε ύψος $\frac{h_{\max}}{3}\hat{z}$, άρα από τη σχέση (3) έπεται:

$$\frac{h_{\max}}{3}\hat{z} = \left(u_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^{\,2}\right)\hat{z} \xrightarrow{(4)} 15 = 30t_1 - 5t_1^2 \Rightarrow t_1^2 - 6t_1 + 3 = 0$$

Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι τα δύο σώματα συναντιούνται τις χρονικές στιγμές $t_1' = 0.55\,s$ και $t_1'' = 5.45\,s$ που αντιστοιχούν στην άνοδο και στην κάθοδο του πρώτου σώματος.

Η εξίσωση θέσης-χρόνου του δεύτερου σώματος είναι: $H\,\hat{z} = \left(H_m - \frac{1}{2} g t^2\right)\hat{z}$ (5)

Τη χρονική στιγμή t_1 όπου τα δύο σώματα συναντιούνται ισχύει: $H = \frac{h_{\max}}{3}$, άρα λόγω της σχέσης (5) :

$$\frac{h_{\max}}{3} = H_m - \frac{1}{2} g t_1^{\,2} \Rightarrow H_m = \frac{h_{\max}}{3} + \frac{1}{2} g t_1^{\,2} .$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει (με αριθμητική αντικατάσταση) ότι αν τα δύο σώματα συναντιούνται τη χρονική στιγμή $t_1 = t_1' = 0.55\,s$ (δηλαδή όταν το πρώτο σώμα ανεβαίνει), τότε το δεύτερο σώμα έχει αφεθεί από ύψος $H_m = 16.5\,m$, ενώ εάν συναντιούνται τη χρονική στιγμή $t_1 = t_1'' = 5.45\,s$, τότε το ύψος από το οποίο έχει αφεθεί το δεύτερο σώμα είναι $H_m = 164\,m$

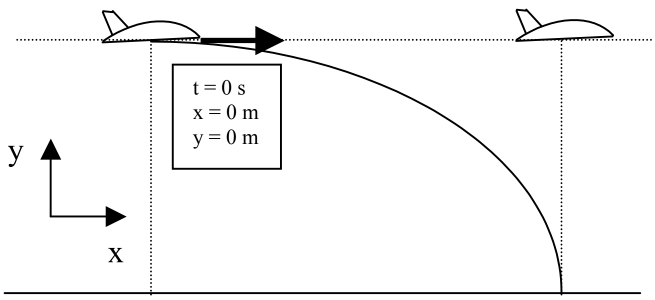
Άσκηση 6 (5 μονάδες):

Ένα βομβαρδιστικό αεροπλάνο ενώ πετάει οριζόντια με ταχύτητα 275 m/s ως προς το έδαφος και σε ύψος 3000 m πάνω από μία πεδιάδα, ρίχνει μία βόμβα. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα και υπολογίστε: Σε ποια οριζόντια απόσταση από το σημείο από το οποίο αφέθηκε η βόμβα, θα προσκρούσει η βόμβα στο έδαφος; Αν το αεροπλάνο διατηρεί την αρχική του πορεία και ταχύτητα, πού θα βρίσκεται κατά τη στιγμή που η βόμβα θα προσκρούσει στο έδαφος; (Δίδεται: g = 9.81 m/sec^2)

Πρώτος τρόπος.

Η κίνηση της βόμβας μπορεί να αναλυθεί σε δύο κινήσεις. Μία κατακόρυφη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση g=9.81 m/s2 και μία ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα υ_0=275 m/s δηλαδή ίση με την ταχύτητα του αεροπλάνου.

Ας υποθέσουμε ότι το αεροπλάνο αφήνει την βόμβα τον χρόνο t=0 στην αρχή των αξόνων. Ο άξονας x είναι προς τα δεξιά όπως φαίνεται στο σχήμα και ο άξονας y είναι προς τα πάνω.



Η θέση της βόμβας κάθε χρονική στιγμή δίδεται από τις εξισώσεις:

$$x = \upsilon_0 t \qquad (6.1)$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 \qquad (6.2)$$

Από την εξίσωση (6.2) βρίσκουμε ότι ο χρόνος που θα απαιτηθεί για να χτυπήσει η βόμβα στο έδαφος είναι

$$t^2 = -\frac{2y}{g} = -\frac{2(-3000\,m)}{9.81\,ms^{-2}} \Rightarrow t = 24.73\,s$$

Σε αυτό τον χρόνο η βόμβα θα έχει διανύσει οριζοντίως

$$x = \left(275\,ms^{-1}\right)\left(24.73\,s\right) = 6801\,m$$

Το αεροπλάνο έχει την ίδια ταχύτητα όπως και η βόμβα στην κατεύθυνση x. Κατά συνέπεια θα βρίσκεται 3000 m ακριβώς πάνω από την βόμβα όταν αυτή θα κτυπήσει το έδαφος.

Δεύτερος τρόπος.

Αν απαλείψουμε τον χρόνο μεταξύ των εξισώσεων (6.1) και (6.2) παίρνουμε την εξίσωση τροχιάς της βόμβας. Θα έχουμε

$$x = \sqrt{\left(-\frac{2y}{g}\right)\upsilon_0^2}$$

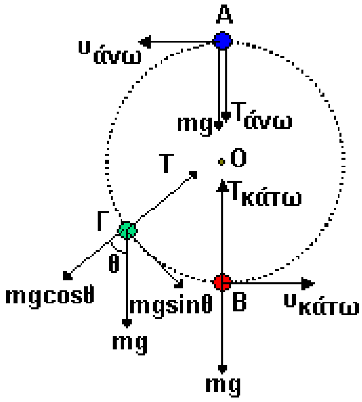
Την στιγμή της πρόσκρουσης θα έχουμε y = -3000 m. Άρα το x θα είναι

$$x = \sqrt{\left(-\frac{2(-3000\,m)}{9.81\,ms^{-2}}\right)\left(275\,ms^{-1}\right)^2} = 6801\,m$$

Άσκηση 7 (5 μονάδες)

Μια μικρή πέτρα μάζας m είναι δεμένη με νήμα μήκους R και περιστρέφεται κυκλικά σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ένα σταθερό σημείο Ο. Προσδιορίσετε την τάση του νήματος την στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας είναι |**υ**| και το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Για ποια γωνία η τάση του νήματος είναι μέγιστη και για ποια είναι ελάχιστη ;

Λύση



Παρατηρούμε πρώτα ότι το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται, διότι λόγω του βάρους της πέτρας υπάρχει εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης. Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε την πέτρα σε τρία σημεία της κυκλικής της τροχιάς. Σε κάθε σημείο (όπως π.χ. στο σημείο Γ), οι μόνες δυνάμεις που δρουν στην πέτρα είναι α) το βάρος της mg, και β) η τάση T του νήματος. Αναλύουμε το βάρος σε μια ακτινική (=mgcosθ) και μια εφαπτομενική συνιστώσα (=mgsinθ). Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην εφαπτομενική (ή επιτρόχια) διεύθυνση βρίσκουμε:

$\Sigma F_t = mg \sin\theta = ma_t$ από όπου προκύπτει:

$$a_t = g\sin\theta \tag{7.1}$$

Η γωνία θ μεταβάλλεται από θ = 0 (0^o) στο κατώτατο σημείο της κυκλικής τροχιάς, ως θ = 2π (=360^o). Από την σχέση 7.1 προκύπτει ότι η επιτρόχια επιτάχυνση στο κατώτατο και στο ανώτατο σημείο της τροχιάς είναι μηδέν ($\sin 0^o = \sin 180^o = 0$). Ακολουθώντας την κίνηση της πέτρας, όπως στο σχήμα, το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται καθώς η πέτρα πλησιάζει το κατώτερο σημείο ($|\boldsymbol{\upsilon}|_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega}$), γιατί η επιτρόχια επιτάχυνση έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα, και αφού το περάσει ελαττώνεται καθώς η επιτρόχια επιτάχυνση ενεργεί αντίθετα προς την κίνηση (επιβράδυνση). Άρα στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της πέτρας το μέτρο της ταχύτητας έχει μέγιστη τιμή. Φτάνοντας στο ανώτατο σημείο της τροχιάς της, η πέτρα θα έχει μέτρο ταχύτητας ελάχιστο ($|\boldsymbol{\upsilon}|_{\acute{\alpha}\nu\omega}$) γιατί στην συνέχεια το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται (εφ' όσον, όπως είπαμε, η επιτρόχια επιτάχυνση έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα) για να γίνει ξανά μέγιστο στο κατώτατο σημείο της τροχιάς. Έχουμε λοιπόν φτάσει στο συμπέρασμα ότι:

$$|\boldsymbol{\upsilon}|_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega} > |\boldsymbol{\upsilon}|_{\acute{\alpha}\nu\omega} \quad \text{και} \quad |\boldsymbol{\upsilon}|_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega} = \text{μέγιστο}, \quad |\boldsymbol{\upsilon}|_{\acute{\alpha}\nu\omega} = \text{ελάχιστο} \tag{7.2}$$

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην ακτινική διεύθυνση, έχουμε ότι η συνισταμένη των δυνάμεων στην πέτρα είναι η κεντρομόλος δύναμη στην οποία οφείλεται η κεντρομόλος επιτάχυνση:

$\Sigma F_r = T - mg\cos\theta = m\upsilon^2 / R$, από τη σχέση αυτή προκύπτει:

$$T = m (g \cos\theta + \upsilon^2 / R) \tag{7.3}$$

Για θ = 0, cosθ = 1 και δεδομένης της ανισότητας 7.2, η σχέση 7.3 γίνεται:

$T = m (g + \upsilon^2_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega} / R)$ δηλαδή η τάση παίρνει την μέγιστη τιμή στο κατώτατο σημείο της κυκλικής τροχιάς

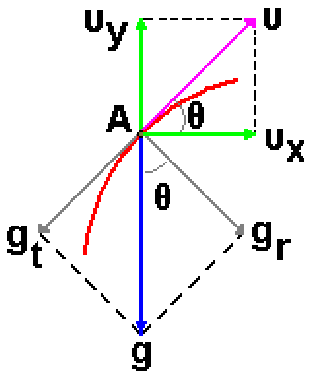
Για θ = 180^o , δηλαδή στο ανώτατο σημείο της κυκλικής τροχιάς, δεδομένης της ανισότητας 7.2, η τάση παίρνει την ελάχιστη τιμή της, αφού η σχέση 7.3 γίνεται:

$T = m (-g + \upsilon^2_{\acute{\alpha}\nu\omega} / R)$

<u>**Άσκηση 8 (8 μονάδες):**</u>

Σώμα εκτελεί βολή με αρχική ταχύτητα $\mathbf{\upsilon_0}$ υπό γωνία $\boldsymbol{\varphi}$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Υπολογίστε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του σώματος (δηλαδή την απόσταση R από το εκάστοτε κέντρο περιστροφής καθώς το σώμα εκτελεί καμπυλόγραμμο κίνηση) σαν συνάρτηση του χρόνου, t, αγνοώντας την αντίσταση του αέρα. Υπόδειξη: Η συνιστώσα της βαρύτητας που είναι κάθετη στην τροχιά παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

<u>Λύση</u>



Έστω ότι μια τυχαία χρονική στιγμή t το σώμα βρίσκεται στη θέση A και έχει ταχύτητα υ, η οποία σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα. Τον ρόλο της κεντρομόλου επιτάχυνσης (εφ όσον εκτελείται καμπυλόγραμμη κίνηση) δεν μπορεί παρά να τον παίζει η συνιστώσα της επιτάχυνσης της βαρύτητας που είναι κάθετη στο σημείο A της τροχιάς και επομένως σχηματίζει γωνία θ με τον κατακόρυφο άξονα (βλέπε σχήμα). Έτσι αν R είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς:

$$g_r = \upsilon^2/R \qquad (8.1)$$

Από το σχήμα επίσης βλέπουμε ότι:

$$g_r = g\cos\theta$$

και $\cos\theta = \upsilon_x / \upsilon$

άρα $g_r = g\,\upsilon_x / \upsilon \qquad (8.2)$

Από τις 8.1 και 8.2 έχουμε ότι:

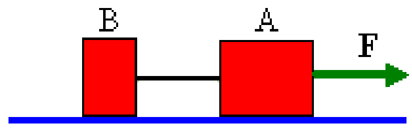
$$R = \upsilon^3 / g\,\upsilon_x = (\upsilon_x^{\,2} + \upsilon_y^{\,2})^{3/2} / g\,\upsilon_x \qquad (8.3)$$

Για την βολή ξέρουμε ότι: $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\varphi$ και $\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\varphi - g\,t$ οπότε αντικαθιστώντας στην 8.3 έχουμε:

$$R = \frac{\left(\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0 g t \sin\varphi + g^2 t^2\right)^{3/2}}{\upsilon_0 g \cos\varphi} \qquad (8.4)$$

Άσκηση 9 (7 μονάδες):

Τα σώματα Α και Β συνδέονται με αβαρές νήμα και έχουν μάζες M_A=6 Kg και M_B=3 Kg αντίστοιχα. Στο σώμα Α ασκείται δύναμη 50Ν. Τα δύο σώματα κινούνται. Να βρεθεί η τάση στο νήμα.



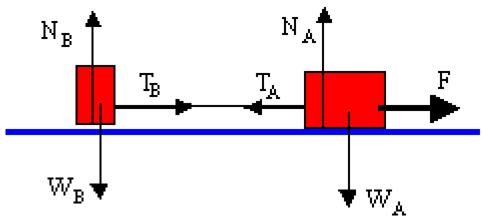
α) όταν δεν υπεισέρχεται τριβή στην κίνηση

β) όταν υπεισέρχεται τριβή και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δύο σωμάτων με το οριζόντιο επίπεδο είναι μ_κ= 0.1. Δίνεται g =10 m/s^2 .

Λύση:

α) Στο σώμα Α δρουν οι ακόλουθες δυνάμεις: α) το βάρος του W_A=M_Ag , β) η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N_A , γ) η τάση του νήματος T_A και δ) η δύναμη έλξης F. Αντίστοιχα στο δεύτερο σώμα Β δρουν οι δυνάμεις α) το βάρος του W_B=M_Bg , 2) η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N_B και 3) η τάση του νήματος T_B .

Λόγω δράσης και αντίδρασης ισχύει: T_A=T_B .



Τα δύο σώματα ισορροπούν κατά τον κατακόρυφο άξονα ενώ κατά τον οριζόντιο άξονα κινούνται επιταχυνόμενα με την ίδια επιτάχυνση, α .

$$\begin{aligned} N_A - W_A &= 0 \\ F - T_A &= M_A \cdot a \end{aligned} \qquad (1)$$

Οι συνθήκες κίνησης για το σώμα Β είναι:

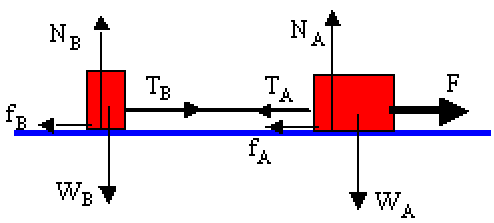
$$\begin{aligned} N_B - W_B &= 0 \\ T_B &= M_B \cdot a \end{aligned} \qquad (2)$$

και ισχύει T_A=T_B (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\frac{F - T_A}{T_A} = \frac{M_A}{M_B} \Rightarrow T_A = \frac{F \cdot M_B}{M_A + M_B} = 16{,}7N$$

β) Στο σώμα Α δρουν οι δυνάμεις α) το βάρος του W_A=M_Ag , β) η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N_A , γ) η τάση του νήματος T_A, δ) η δύναμη F και ε) η δύναμη τριβής f_A. Αντίστοιχα στο δεύτερο σώμα Β δρουν οι δυνάμεις α) το βάρος του W_B=M_Bg , β) η κάθετη αντίδραση του επιπέδου N_B γ) η τάση του νήματος T_B και δ) η δύναμη τριβής f_B. Λόγω δράσης και αντίδρασης ισχύει: T_A=T_B .



Τα δύο σώματα ισορροπούν κατά τον κατακόρυφο άξονα ενώ κινούνται επιταχυνόμενα, με την ίδια επιτάχυνση, α' , κατά τον οριζόντιο άξονα.

Οι συνθήκες κίνησης για το σώμα Α είναι: $\begin{aligned} &N_A - W_A = 0 \\ &F - T_A - f_A = M_A \cdot a' \end{aligned}$ (4)

Οι συνθήκες κίνησης για το σώμα Β είναι: $\begin{aligned} &N_B - W_B = 0 \\ &T_B - f_B = M_B \cdot a' \end{aligned}$ (5)

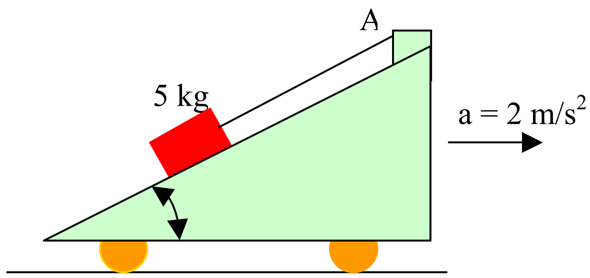
και ισχύει : $\begin{aligned} &T_A = T_B \\ &f_A = \mu_k N_A \\ &f_B = \mu_k N_B \end{aligned}$ (6)

Από τις σχέσεις (4), (5) και (6) έπεται:

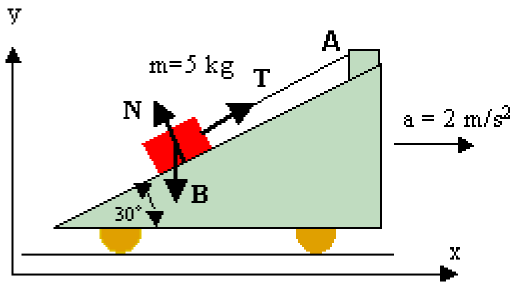
$$\frac{F - T_A - f_A}{T_A - f_B} = \frac{M_A}{M_B} \Rightarrow \frac{F - T_A - \mu_k M_A \cdot g}{T_A - \mu_k M_B \cdot g} = \frac{M_A}{M_B} \Rightarrow T_A = \frac{F \cdot M_B}{M_A + M_B} = 16{,}7N$$

Άσκηση 10 (8 μονάδες):

Η σφήνα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα κινείται πάνω σε μία λεία οριζόντια επιφάνεια.. Ένα σώμα μάζας 5 kg βρίσκεται πάνω στην σφήνα και είναι δεμένο με ένα αβαρές νήμα στο σημείο Α. Τριβή μεταξύ της σφήνας και του σώματος δεν υπάρχει. Υπολογίστε την τάση του νήματος και την κάθετη δύναμη που ασκεί η σφήνα στο σώμα όταν:
(α) η σφήνα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.
(β) η σφήνα κινείται με επιτάχυνση 2 m/s^2.
(Δίδεται: g = 9.81 m/sec^2)



Λύση



Το σώμα μάζας 5 kg ακολουθεί την κίνηση της σφήνας και θα έχει την ίδια επιτάχυνση με αυτήν. Πάνω στο σώμα ασκούνται η τάση του νήματος T, το βάρος του B=mg και η κάθετη δύναμη από την σφήνα N. Αναλύουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα στις x και y συνιστώσες. Η επιτάχυνση a είναι στην οριζόντια κατεύθυνση, (κατά το σχήμα στην κατεύθυνση x).

$$\sum F_x = ma \Rightarrow T\cos 30^\circ - N\sin 30^\circ = ma \qquad (10.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\sin 30^\circ + N\cos 30^\circ - B = 0 \qquad (10.2)$$

Από την εξίσωση (10.2) έχουμε

$$N = \frac{mg - T\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \qquad (10.3)$$

Αντικαθιστώντας την (10.3) στην εξίσωση (10.1) έχουμε

$$T\cos 30^\circ - \left(\frac{mg - T\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\right)\sin 30^\circ = ma \Rightarrow$$

$$T\left(\cos 30^\circ + \frac{\sin^2 30^\circ}{\cos 30^\circ}\right) = ma + mg\tan 30^\circ \Rightarrow$$

$$T(1.155) = ma + mg\tan 30^\circ \qquad (10.4)$$

Αντικαθιστώντας στην (10.4) τις τιμές α = 2 m/s^2, m = 5 kg, και g = 9.81m/s^2 βρίσκουμε

T=33.16 N και

Τέλος από την (10.3)

N=37.44 N

Στην περίπτωση που το σύστημα δεν επιταχύνεται, οι εξισώσεις κίνησης γίνονται

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T\cos 30^\circ - N\sin 30^\circ = 0 \qquad (10.1a)$$

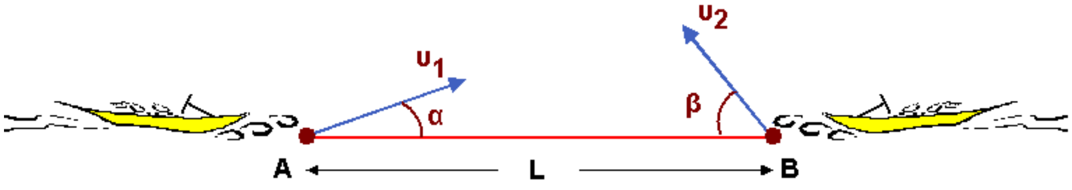
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\sin 30^\circ + N\cos 30^\circ - B = 0 \qquad (10.1b)$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων ως προς T και N παίρνουμε

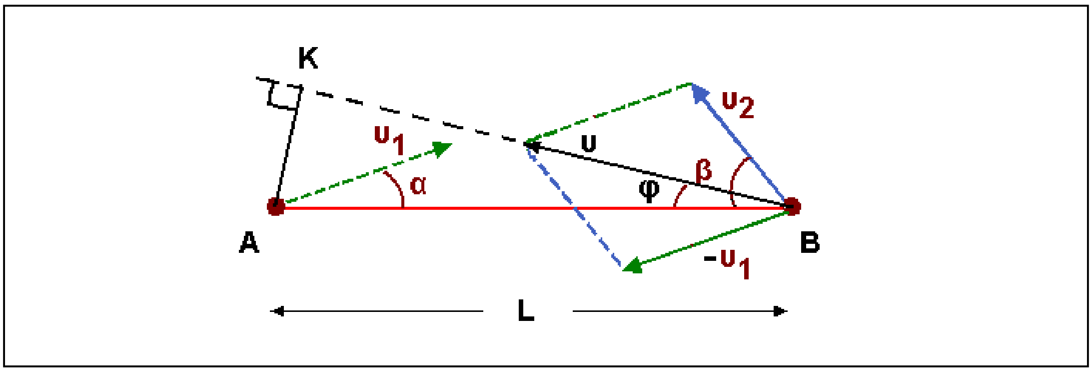
T = 24.51 N και N = 42.49 N

<u>Άσκηση 11 (7 μονάδες):</u>

Από τον Άλιμο και την Βουλιαγμένη (απόσταση **L**) ξεκινούν ταυτόχρονα δύο ταχύπλοα κινούμενα ευθύγραμμα και ομαλά, ένα από τα οποία κινείται με ταχύτητα $\mathbf{\upsilon_1}$ και το άλλο με ταχύτητα $\mathbf{\upsilon_2}$. Η ταχύτητα του ενός σχηματίζει συνεχώς γωνία **α** με την ευθεία ΑΒ που συνδέει τα σημεία εκκίνησης ενώ της δεύτερης σχηματίζει γωνία **β**. Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση που θα πλησιάσουν τα ταχύπλοα; (υπόδειξη: η άσκηση λύνεται εύκολα θεωρώντας παρατηρητή που βρίσκεται στο ένα από τα δύο ταχύπλοα και θεωρεί τον εαυτό του ακίνητο.)



<u>Λύση</u>



Οι συνθήκες που περιγράφονται στην εκφώνηση της άσκησης αυτής αναφέρονται, προφανώς, σε ακίνητο παρατηρητή. Έστω, όμως, σύστημα Ο το οποίο κινείται μαζί με το πρώτο ταχύπλοο (αυτό που ξεκινά από το σημείο Α και τρέχει με ταχύτητα υ_1). Σ΄ αυτό το σύστημα αναφοράς το πρώτο ταχύπλοο είναι ακίνητο, ενώ το δεύτερο ταχύπλοο τρέχει με ταχύτητα:

$$\boldsymbol{\upsilon} = -\boldsymbol{\upsilon}_1 + \boldsymbol{\upsilon}_2 \qquad (11.1)$$

Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους θα είναι ίση με το μήκος της καθέτου, ΑΚ, που μπορούμε να φέρουμε στην ευθεία ΒΚ, κατά μήκος της οποίας θα κινηθεί το δεύτερο ταχύπλοο στο σύστημα Ο.
Επομένως από το σχήμα έχουμε (όπου τα υ_1 και υ_2 είναι τα μέτρα των ανυσμάτων $\boldsymbol{\upsilon}_1$ και $\boldsymbol{\upsilon}_2$):

$$AK = L \sin\varphi \qquad (11.2)$$

Επίσης από το σχήμα

$$\upsilon \cos\varphi = \upsilon_2 \cos\beta + \upsilon_1 \cos\alpha \qquad (11.3)$$

$$\upsilon \sin\varphi = \upsilon_2 \sin\beta - \upsilon_1 \sin\alpha \qquad (11.4)$$

Από τις 11.3 και 11.4, απαλείφοντας το υ, προκύπτει:

$$\tan\varphi = (\upsilon_2 \sin\beta - \upsilon_1 \sin\alpha) / (\upsilon_2 \cos\beta + \upsilon_1 \cos\alpha) \qquad (11.5)$$

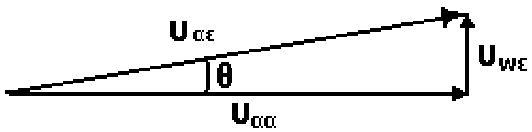
ώστε επειδή από την τριγωνομετρία: $\sin\phi = \dfrac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$ η 11.2 γίνεται με την βοήθεια της 11.5:

$$AK = L\frac{[(\upsilon_2 \sin\beta - \upsilon_1 \sin\alpha)/(\upsilon_2 \cos\beta + \upsilon_1 \cos\alpha)]}{\left[1+((\upsilon_2 \sin\beta - \upsilon_1 \sin\alpha)/(\upsilon_2 \cos\beta + \upsilon_1 \cos\alpha))^2\right]}$$

Άσκηση 12 (5 μονάδες)

Ένα αεροπλάνο πετάει προς ανατολάς με ταχύτητα 400 km/h (σε σχέση με τον αέρα). Ταυτόχρονα ο άνεμος πνέει προς βορρά με ταχύτητα 75 km/h σε σχέση με το έδαφος. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας του αεροπλάνου σε σχέση με το έδαφος.

Λύση



$υ_{αα}$ = 400 km/h
$υ_{wε}$ = 75 km/h

Η ταχύτητα του αεροπλάνου $\mathbf{υ_{αε}}$ σε σχέση με το έδαφος είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο ταχυτήτων που ορίζονται στην εκφώνηση. Η ταχύτητα που αναπτύσσει το αεροπλάνο σε σχέση με τον αέρα είναι $\mathbf{υ_{αα}}$ = (400 km/h) **i** και η ταχύτητα του αέρα σε σχέση με το έδαφος είναι $\mathbf{υ_{wε}}$ = (75 km/h) **j.** Έτσι βρίσκουμε:

$$|\,\mathbf{υ_{αε}}\,| = \{\,(400 \text{ km/h})^2 + (75 \text{ km//h})^2\}^{1/2} = 407 \text{ km/h}$$

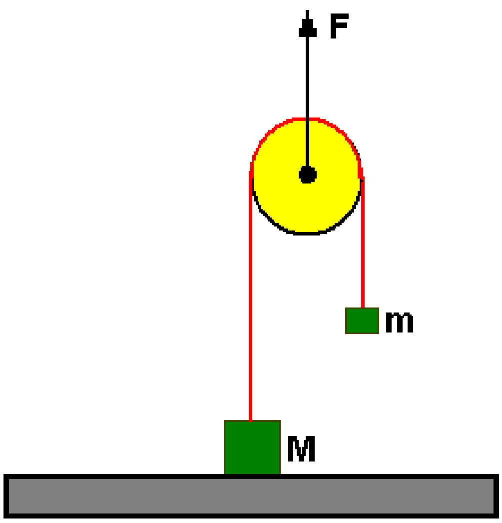
Η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $\mathbf{υ_{αε}}$ με την ανατολική διεύθυνση είναι:

$$\tanθ = (75 \text{ km/h})/(400 \text{ km/h}) = 0.1875 \;\; ή \;\; θ = 10.9^o$$

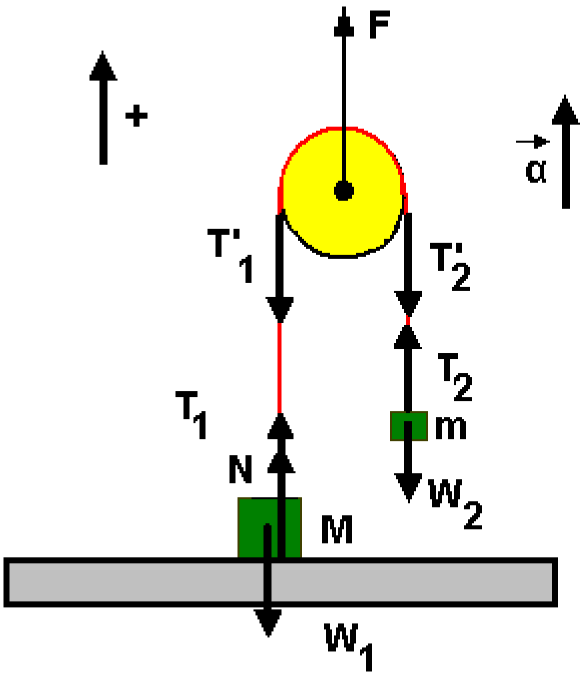
Επομένως η ταχύτητα του αεροπλάνου σε σχέση με τη γη είναι 407 km/h και με κατεύθυνση 10.6^o βόρεια από την ανατολή.

Άσκηση 13 (6 μονάδες) :

Οι μάζες m και M ενώνονται όπως στο σχήμα. Η τροχαλία θεωρείται χωρίς μάζα και χωρίς τριβές. Ποια είναι η μέγιστη προς τα πάνω δύναμη F, που θα πρέπει να εφαρμοσθεί στην τροχαλία χωρίς η μάζα M να ξεκολλήσει από το έδαφος ; Ποια η επιτάχυνση της m ;



Λύση



Πάνω στο πρώτο σώμα μάζας M ασκούνται οι εξής δυνάμεις: α) Το βάρος του W_1 =Mg , β) η τάση του νήματος T_1 και γ) η αντίδραση του δαπέδου N.
Πάνω στο δεύτερο σώμα μάζας m ασκούνται οι δυνάμεις : α) Το βάρος του W_2=mg και β) η τάση του νήματος T_2.

Λόγω δράσης και αντίδρασης είναι $\vec{T}_1 = \vec{T}_2 \equiv \vec{T}$ (1)

Πάνω στην τροχαλία ασκούνται οι δυνάμεις α) η δύναμη F β) η $\vec{T}_1{}' = \vec{T}_1$ και γ) η $\vec{T}_2{}' = \vec{T}_2$

Είναι : $\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow F - T_1 - T_2 = 0 \xrightarrow{(1)} F = 2T_1$ (2)

Το πρώτο σώμα μάζας M ισορροπεί άρα :

$\vec{W}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N} = 0 \Rightarrow -W_1 + T_1 + N = 0 \xrightarrow{(2)} F = 2(W_1 - N)$ (3)

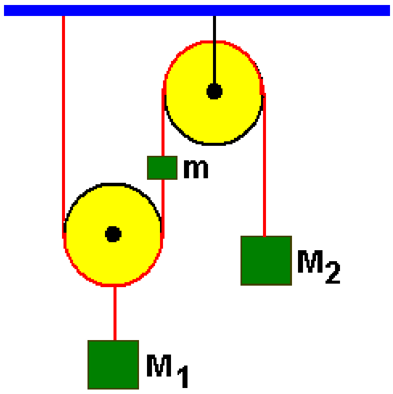
Η μέγιστη δύναμη εφαρμόζεται πάνω στην τροχαλία όταν N=0, δηλαδή όταν το σώμα μάζας M ισορροπεί χωρίς ταυτόχρονα να αγγίζει το έδαφος. Άρα από τη σχέση (3) έπεται : $F_{\max} = 2W_1 = 2M \cdot g$

Το δεύτερο σώμα επιταχύνεται κατά τον κατακόρυφο άξονα, με επιτάχυνση α, άρα :

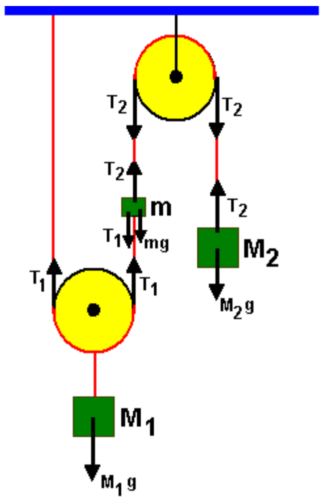
$$\vec{W}_2 + \vec{T}_2 = m \cdot \vec{a} \Rightarrow -W_2 + T_2 = m \cdot a \xrightarrow{(1)} a = \frac{T - W_2}{m} = \frac{T - m \cdot g}{m} = \frac{(M - m)g}{m}$$

Άσκηση 14 (8 μονάδες):

Στο ακόλουθο σύστημα με τροχαλίες, θεωρώντας τα νήματα αβαρή και μη εκτατά, τις δε τροχαλίες αμελητέας μάζας, υπολογίστε την επιτάχυνση της μάζας $\mathbf{M_1}$ εάν $\mathbf{m \neq 0}$ και $\mathbf{M_1 = M_2}$.



Λύση



Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα και γράφουμε τις συνθήκες κίνησης (όπου a_1, a_2, a_m οι επιταχύνσεις των μαζών M_1, M_2, m αντίστοιχα και θετικά x προς τα κάτω) :

$$M_1\, g - 2\, T_1 = M_1\, a_1$$

$$-T_2 + M_2\, g \;\; = -M_2\, a_2$$

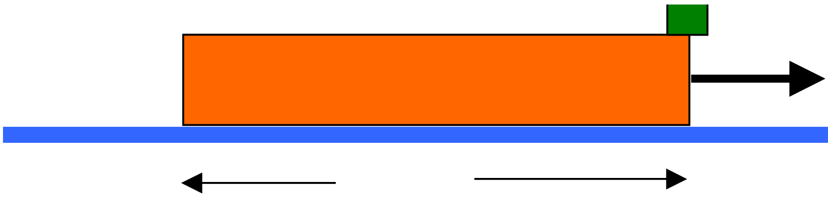
$$T_1 + mg - T_2 = m\, a_m$$

Εφ΄ όσον ισχύει $M_1 = M_2 = M$ και από το σχήμα προκύπτει ότι $a_m = -a_2 = 2\, a_1 \; = 2a$ έπεται ότι:

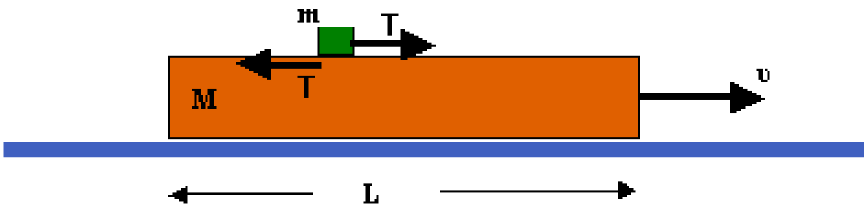
$$a_1 \; = a = g\,(2m - M) \,/\, (5M + 4m)$$

Άσκηση 15 (8 μονάδες):

Μικρό σώμα μάζας **m** βρίσκεται τοποθετημένο στο άκρο δοκού μήκους L και μάζας **M** (βλέπε σχήμα). Στη δοκό δίνουμε, ακαριαία, αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_0}$. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και δοκού είναι **μ**, ενώ μεταξύ δοκού και οριζοντίου δαπέδου ο συντελεστής τριβής είναι μηδέν, να υπολογίσετε πόση πρέπει να είναι η $\boldsymbol{\upsilon_0}$ έτσι ώστε το σώμα **m** να πέσει από την δοκό.



Λύση



Λόγω της δύναμης της τριβής μεταξύ του μικρού σώματος και της δοκού, όπως φαίνεται στο σχήμα, τ m θα επιταχύνεται ενώ το M θα επιβραδύνεται. Αν οι ταχύτητες εξισωθούν πριν το m πέσει, τότε η δύναμη τριβής θα εκλείψει και τα δύο σώματα θα κινούνται μαζί στην συνέχεια.
Για τα δύο σώματα ισχύει:

$$\mu m g = T = m\, a_m, \text{ δηλαδή } a_m = \mu g \qquad (15.1)$$

$$T = -M\, a_M, \text{ δηλαδή } a_M = -\mu g m/M \qquad (15.2)$$

Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων δίδονται από:

$$\upsilon_m = a_m t \quad \text{και} \quad \upsilon_M = \upsilon_0 + a_M t \qquad (15.3)$$

Οι ταχύτητες αυτές θα εξισωθούν σε χρόνο τ, όπου:

$$\tau = \frac{\upsilon_0}{\mu g\left(1 + \frac{m}{M}\right)} \qquad (15.4)$$

Στο χρόνο αυτό τα σώματα θα έχουν διανύσει διαστήματα:

$$S_M = \upsilon_0 \tau + a_M \tau^2/2$$

$$S_m = a_m \tau^2/2$$

Για να πέσει το m θα πρέπει να ισχύει: $S_M - S_m > L$

Ώστε: $\upsilon_0 > \sqrt{2\mu g L(1 + m/M)}$