ΑΣΚΗΣΗ 1.

α. Αποδείξτε ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε περιττού αριθμού είναι και αυτό περιττός αριθμός.
β. Αποδείξτε ότι $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = (1/6)n(n+1)(2n+1)$.
γ. Αποδείξτε ότι $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1/4)n^2(n+1)^2$.
(12 μονάδες)

<u>Λύση</u>

α. Ένας περιττός αριθμός μπορεί να γραφεί ως 2n+1, όπου n οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός. Επομένως,

$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n) +1 = 2k+1$, όπου $k=(2n^2+2n)$.

β. Η εξίσωση ισχύει για n=1, όπως μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα:

$1^2 = (1/6)1^2(1+1)(2+1) = (1/6)(2)(3)=(6/6)=1$

Θεωρούμε ότι ισχύει για n=k, δηλαδή,

$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = (1/6)k(k+1)(2k+1)$

προσθέτοντας $(k+1)^2$ και στις δύο πλευρές της εξίσωσης έχουμε:

$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+ (k+1)^2= (1/6)k(k+1)(2k+1)+ (k+1)^2 =$

$= (k+1)[(1/6)k(2k+1)+(k+1)] = (k+1)[(1/6)(2k^2+k)+k+1)] =$

$= (1/6)(k+1)(2k^2+2k+6k+6)= (1/6)(k+1)(2k^2+7k+6) = (1/6)(k+1)(k+2)(2k+3) =$

$=(1/6)n(n+1)(2n+1)$, αφού n=k+1.

γ. Χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική της του προηγούμενου ερωτήματος η εξίσωση ισχύει για n=1, όπως μπορεί να διαπιστωθεί άμεσα:

$1^3 = (1/4)1^2(1+1)^2 = (1/4)2^2=(4/4)=1$

Θεωρούμε ότι η εξίσωση ισχύει για n=k, δηλαδή:

$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3 = (1/4)k^2(k+1)^2$

Προσθέτοντας $(k+1)^3$ και στις δύο πλευρές της εξίσωσης έχουμε:

$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(\kappa+1)^3 = (1/4)k^2(k+1)^2+(k+1)^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(\kappa+1)^3$

$= (k+1)^2[(1/4)k^2+k+1] = (1/4)(k=1)^2(k2+4k+4) =$

$= (1/4)(k+1)^2(k+1+1)^2 = (1/4)n^2(n+1)^2$, όπου n=k+1.

ΑΣΚΗΣΗ 2

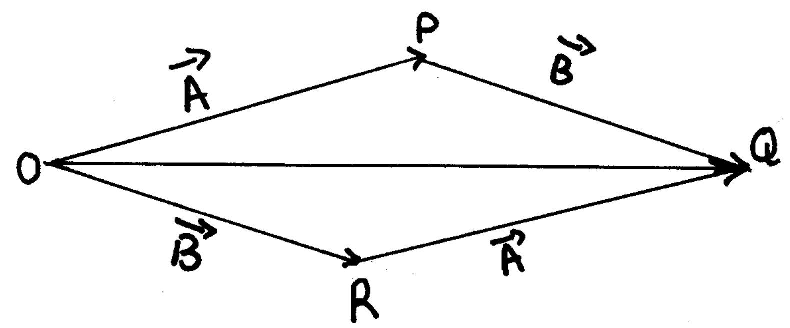
1α. Αποδείξτε την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης διανυσμάτων **A**+**B**=**B**+**A**

1β. Αποδείξτε ότι αν **a** και **b** είναι μη-συγγραμμικά διανύσματα τότε x**a**+y**b**=0 συνεπάγεται x=y=0.

1γ. Προσδιορίστε το διάνυσμα με αρχή $P(x_1,y_1,z_1)$ και τέλος $Q(x_2,y_2,z_2)$ και βρείτε το μέγεθός του.
(12 μονάδες)

<u>ΛΥΣΗ</u>

2α. Χρησιμοποιώντας το σχήμα 1 διαπιστώνουμε ότι:



<u>Σχήμα 1</u>

OP + PQ = OQ ή **A + B = C**

και **OR + RQ = OQ** ή **B + A = C**

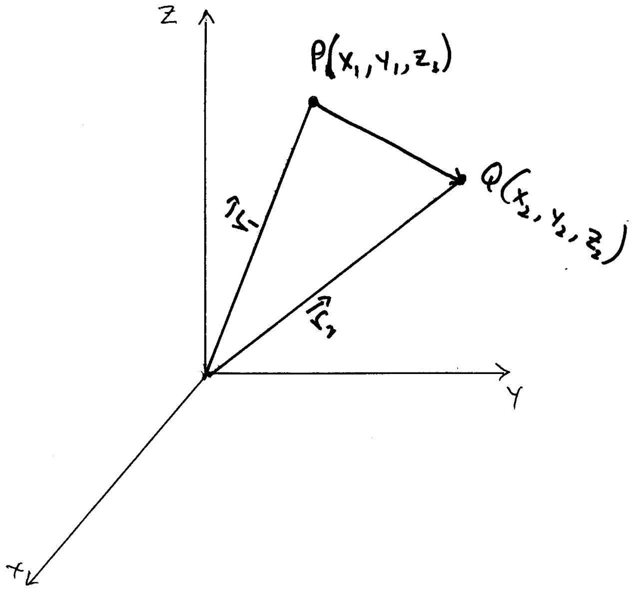
εκ των οποίων είναι προφανές ότι **A+B = B+A**

2β. Ας υποθέσουμε ότι x=0, τότε x**a** + y**b** = 0 ⇒ x**a** = -y**b** ⇒ **a** = -(y/x)**b**, τοπ οποίο σημαίνει ότι **a** και **b** είναι παράλληλα (συγγραμμικά), αντίθετα με την αρχική υπόθεση για τα διανύσματα (μη-συγγραμμικά). Επομένως

x = 0 είναι η μόνη λύση, το οποίο συνεπάγεται ότι y**b** = 0 ⇒ y=0.

Άρα η μόνη λύση είναι x=y=0.

2γ. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2,



<u>Σχήμα 2</u>

$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$

$\mathbf{r}_1 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$

$\mathbf{r_1 + PQ = r_2} \Rightarrow$

$\mathbf{PQ} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} = (x_2-x_1)\mathbf{i} + (y_2-y_1)\mathbf{j} + (z_2-z_1)\mathbf{k}$

και

$|\mathbf{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

<u>Άσκηση 3</u>

α. Αν οι x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $αx^2+βx+γ = 0$, να αποδείξετε ότι $x_1^3+x_2^3 = 3βγ/α^2-(β/α)^3$. Υπενθυμίζουμε την γνωστή ταυτότητα $x_1^3 + x_2^3=(x_1+ x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$.

β. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος βρείτε την τιμή του λ στην εξίσωση:

$x^2-2x+λ=0$, έτσι ώστε $x_1^3+x_2^3=2$

γ. Προσδιορίστε το λ ώστε η εξίσωση $x^2+2λx+2λ=0$ έχει ρίζα το -1.

Λύση

α. Για τις ρίζες x_1 και x_2 ισχύει $x_1+x_2 = -\beta/\alpha$ και $x_1x_2 = \gamma/\alpha$ (οι τύποι του Vieta). Ξεκινώντας από την γνωστή ταυτότητα έχουμε

$$x_1^3+x_2^3 = (x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2) \qquad (1)$$

είναι επίσης σαφές ότι

$$x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας την (1) και την (2) έχουμε:

$$x_1^3+x_2^3 = (x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1x_2] = (x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2] \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας $x_1+x_2=-\beta/\alpha$ και $x_1x_2=\gamma/\alpha$ στην (3) έχουμε:

$$x_1^3+ x_2^3= -(\beta/\alpha)[(-\beta/\alpha)^2-3(\gamma/\alpha)]= -(\beta/\alpha)^3+3\beta\gamma/\alpha^2=3\beta\gamma/\alpha^2-(\beta/\alpha)^3$$

β. Για να έχει η εξίσωση $x^2-2x+\lambda=0$ δύο πραγματικές ρίζες η διακρίνουσα $\Delta\geq 0 \Rightarrow 2^2-4\lambda\geq 0 \Rightarrow \lambda\leq 1$

Χρησιμοποιώντας και πάλι τους τύπους του Vieta έχουμε για τις ρίζες της εξίσωσης:

$x_1+x_2=2$ και $x_1x_2=\lambda$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε και έχοντας:

$x_1^3+ x_2^3= (x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2] =2=2(2^2-3\lambda)=8 \Rightarrow 8-6\lambda=2 \Rightarrow 6\lambda=6 \Rightarrow \lambda=1$

Η αρχική εξίσωση γίνεται τότε $x^2-2x+1=0$, $x_1=1$, $x_2=1$ και η εξίσωση $x_1^3+x_2^3=2$ ισχύει.

γ. Αν το -1 είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2+2\lambda x+\lambda^2=0$, τότε αντικαθιστώντας $x=-1$ στην εξίσωση, αυτή θα πρέπει να ισχύει:

$(-1)^2+2(-1)\lambda+2\lambda=0 \Rightarrow 1-2\lambda+\lambda^2=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda=1$

αντικαθιστώντας $\lambda=1$ στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x= -1$ (διπλή ρίζα).

4. Δίνονται τα παρακάτω διανύσματα

a = <-6, -3, 2>

b = <2, 1, -4>

c = <1, 2, 1>

Βρείτε τα παρακάτω:

α. Δείξτε ότι τα **b** και **c** είναι ορθογώνια μεταξύ τους

Τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια μόνο αν **b**·**c** = 0

b·**c** = (2)(1) + (1)(2) + (-4)(1) = 2 + 2 -4 = 0

β. **a**·**(b** + **c)**

b + **c** = <3, 3, -3>

a·**(b** + **c)** = (-6)(3) + (-3)(3) + (2)(-3) = -18 -9 - 6 = -33

γ. **a**·**(b** x **c)**

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + 8)\mathbf{i} - (2 + 4)\mathbf{j} + (4 - 1)\mathbf{k}$$

$$= 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

or

$$= \langle 9, -6, 3 \rangle$$

<-6, -3, 2> · <9, -6, 3> = (-6)(9) + (-3)(-6) + (2)(3)

a·**(b** x **c) = -54 + 18 + 6**

a·**(b** x **c) = -30**

δ. **a** x **b**

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (12 - 2)\,\mathbf{i} - (24 - 4)\,\mathbf{j} + (-6 + 6)\,\mathbf{k}$$

$$= 10\,\mathbf{i} - 20\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$= 10\,\mathbf{i} - 20\,\mathbf{j} \quad \text{or}$$

$$= \langle 10, -20, 0 \rangle$$

ε. την γωνία μεταξύ **a** και **b**

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

$$= \frac{-23}{(7)\left(\sqrt{21}\right)}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-23}{7\sqrt{21}}\right)$$

$$\theta \approx 2.3703 \quad 135.8^\circ$$

στ. τα συνημίτονα κατεύθυνσης του **b** (συνημίτονα γωνιών α, β, γ που σχηματίζει το b με τους άξονες x, y, z).

$$\cos\alpha = \frac{b_1}{|\mathbf{b}|} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$\cos\beta = \frac{b_2}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b_3}{|\mathbf{b}|} = \frac{-4}{\sqrt{21}}$$

ζ. την επιφάνεια του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα **a** και **b**

Η επιφάνεια του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα **a** και **b** ισούται με
|**a**| |**b**| sin C, όπου C η γωνία μεταξύ **a** και **b.** Αυτή όμως είναι και η απόλυτη τιμή του εξωτερικού γινομένου των **a** και **b.**

Επιφάνεια = **|a x b| =** | <10, -20, 0>| από το ερώτημα δ.

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= \sqrt{10^2 + (-20)^2 + 0^2} \\
&= \sqrt{100 + 400} \\
&= \sqrt{500} \\
&= 10\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

η. Τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα **a**, **b** και **c**

Ο όγκος είναι η απόλυτη τιμή του τριπλού γινομένου

= $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |-30|$

=30 κυβικές μονάδες

θ. Πώς θα συμπεραίνατε ότι τα **a**, **b** και **c** είναι συνεπίπεδα;

Αν $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ήταν 0.

5. Βρείτε την γωνία μεταξύ της διαγωνίου ενός κύβου και της διεύθυνσης της διαγωνίου μιας από τις έδρες του.

Έστω ότι η κάτω έδρα του κύβου έχει κορυφές

$$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (1,1,0),\ D = (0,1,0)$$

και η πάνω έδρα

$$E = (0,0,1),\ F = (1,0,1),\ G = (1,1,1),\ H = (0,1,1)$$

Τότε η διαγώνιος του κύβου είναι η AG και η διαγώνιος μιάς έδρας είναι η AC. Η γωνία μεταξύ τους είναι

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{AG} \cdot \mathbf{AC}}{\|\mathbf{AG}\|\,\|\mathbf{AC}\|} = \frac{\langle 1,1,1 \rangle \cdot \langle 1,1,0 \rangle}{\|\langle 1,1,1 \rangle\|\,\|\langle 1,1,0 \rangle\|} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Άρα, $\theta = \cos^{-1}(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \approx 35^\circ$.

6. Χρησιμοποιήστε τους πίνακες A, B, C, D για να εκτελέσετε τις πράξεις που δίνονται αν αυτές είναι δυνατές.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a. $4C$
b. AD
c. DA
d. BC
e. $3CB$
f. $C(A + B)$

g. AB
h. BA
i. CAD
j. DBC
k. $AD + (CB)^T$
l. DC
m. CD

a. $4C = [\ 20\ \ 12\ \ 24\ ]$

$$AD = \begin{bmatrix} 94 \\ 66 \\ 52 \end{bmatrix}$$

b.
c. *DA* – Οι διαστάσεις είναι λάθος! (3 επί 1 πολλαπλασιάζεται με 3 επι 3).
d. *BC* - Οι διαστάσεις είναι λάθος!
e. $3CB = [\ 342\ \ 213\ \ 180\ ]$
f. $C\,(A + B) = [\ 160\ \ 161\ \ 136\ ]$

$$AB = \begin{bmatrix} 124 & 43 & 72 \\ 106 & 75 & 52 \\ 119 & 91 & 58 \end{bmatrix}$$

g.

$$BA = \begin{bmatrix} 64 & 112 & 72 \\ 49 & 93 & 58 \\ 59 & 154 & 100 \end{bmatrix}$$

h.
i. $CAD = 980$
j. *DBC* - Οι διαστάσεις είναι λάθος!

$$AD + (CB)^T = \begin{bmatrix} 208 \\ 137 \\ 112 \end{bmatrix}$$

k.

$$DC = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 24 \\ 40 & 24 & 48 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

l.
m. $CD = 50$

7. **(5 βαθμοί)** Εστω $A_1, A_2, \ldots A_n$ τετραγωνικοί αντιστρέψιμοι N×N πίνακες. Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επαγωγής:

   (a) $(A_1 A_2 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$

   (b) $\det(A_1 A_2 \ldots A_n) = \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_n$

   (c) $[(A_1 A_2)^n]^{-1} = (A_2^{-1} A_1^{-1})^n$

ΛΥΣΗ:

(a) Η σχέση ισχύει για $n = 2$:

$$(A_1 A_2)(A_2^{-1} A_1^{-1}) = A_1 (A_2 A_2^{-1}) A_1^{-1} = A_1 1 A_1^{-1} = A_1 A_1^{-1} = 1$$

και

$$(A_2^{-1} A_1^{-1})(A_1 A_2) = \ldots = 1\,.$$

Εστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλ. $(A_1 A_2 \ldots A_k)(A_k^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}) = (A_k^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1})(A_1 A_2 \ldots A_k) = 1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
&(A_1 A_2 \ldots A_{k+1})(A_{k+1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}) = \\
&(A_1 A_2 \ldots A_k)(A_{k+1} A_{k+1}^{-1})(A_k \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}) = \\
&(A_1 A_2 \ldots A_k)(A_k \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}) = 1
\end{aligned}$$

Ομοίως

$$(A_{k+1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1})(A_1 A_2 \ldots A_{k+1}) = 1\,.$$

Αρα η σχέση ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Η σχέση ισχύει για $n = 2$ (σελ. 129 βιβλίου). Εστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλ. $\det(A_1 A_2 \ldots A_k) = \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_k$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
&\det(A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}) = \\
&\det[(A_1 A_2 \ldots A_k) A_{k+1}] = \\
&\det(A_1 A_2 \ldots A_k) \det A_{k+1} = \\
&(\det A_1 \det A_2 \ldots \det A_k) \det A_{k+1}
\end{aligned}$$

(c) Η σχέση ισχύει για $n = 1$ (βλ. ανωτέρω). Εστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλ. $[(A_1A_2)^k]^{-1} = (A_2^{-1}A_1^{-1})^k$.Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
&(A_1A_2)^{k+1}(A_2^{-1}A_1^{-1})^{k+1} = \\
&(A_1A_2)^k(A_1A_2)(A_2^{-1}A_1^{-1})(A_2^{-1}A_1^{-1})^k = \\
&(A_1A_2)^kA_1(A_2A_2^{-1})A_1^{-1}(A_2^{-1}A_1^{-1})^k = \\
&(A_1A_2)^kA_1A_1^{-1}(A_2^{-1}A_1^{-1})^k = \\
&(A_1A_2)^k(A_2^{-1}A_1^{-1})^k = 1
\end{aligned}$$

Ομοίως δείχνουμε ότι $(A_2^{-1}A_1^{-1})^{k+1}(A_1A_2)^{k+1} = 1$.

8. **(10 βαθμοί)** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \lambda\hat{i}$, $\vec{OB} = \hat{i} + \hat{j}$ και $\vec{OC} = (1-\lambda)\hat{i} + \lambda\hat{j}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Υπολογίστε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\lambda)$ του τριγώνου ABC.

(b) Ζωγραφίστε σε χαρτί μιλλιμετρέ το τρίγωνο ABC για κάθε μια από τις παρακάτω τιμές του λ:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$
- $\lambda_3 = \frac{3}{2}$
- $\lambda_4 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$
- $\lambda_5 = 3$

(c) Για ποιά τιμή του λ μηδενίζεται το $\mathrm{E}(\lambda)$; Γιατί γίνεται αυτό;

(d) Κάνετε την γραφική παράσταση του $\mathrm{E}(\lambda)$ για $\lambda \in [-1, 4]$.

(e) Εστω η συνάρτηση $\mathrm{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{E}(\lambda)$ το εμβαδόν του τριγώνου ABC. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση είναι 1–1 και επί. Να βρεθούν οι κατάλληλοι περιορισμοί της Ε που είναι αντιστρέψιμοι (πεδίο ορισμού, τιμών και τύπος που δίνει τις τιμές της συνάρτησης). Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις τους.

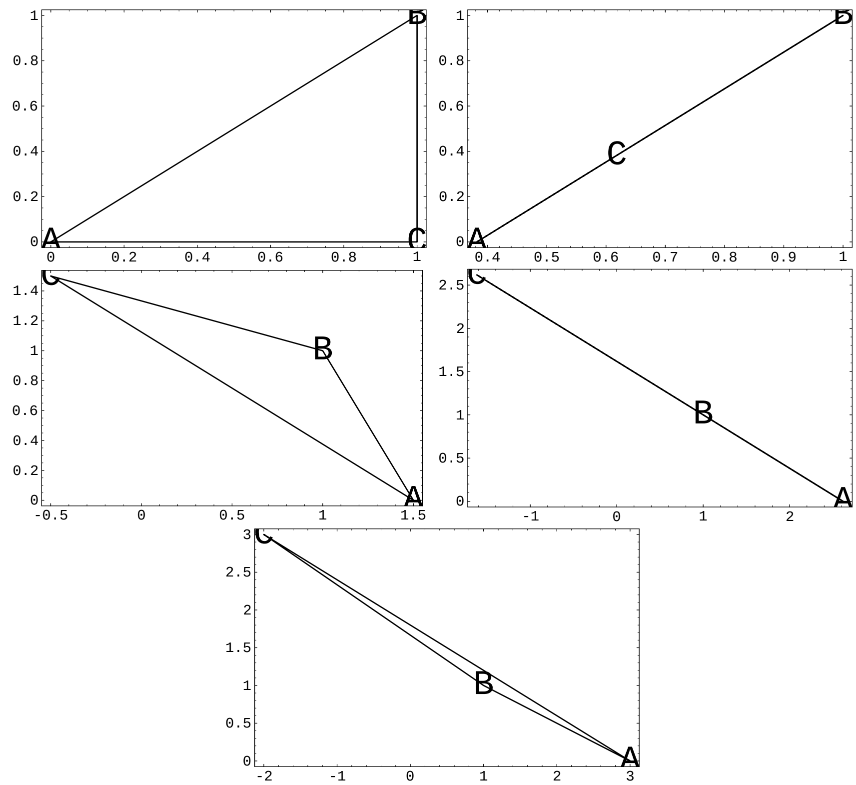
ΛΥΣΗ:

(a) Το εμβαδόν το υπολογίζουμε από τον τύπο:

$$\mathrm{E}(\lambda) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-1+3\lambda-\lambda^2| = \frac{1}{2}|(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_4)|$$

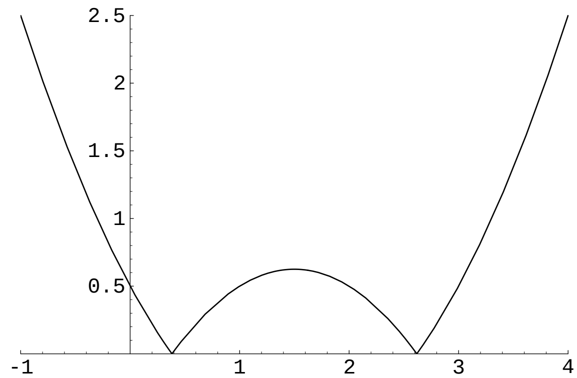
αφού τα λ_2 και λ_4 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $-1+3\lambda-\lambda^2 = -(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_4)$.

(b) $\mathrm{E}(\lambda_1) = \mathrm{E}(\lambda_5) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{E}(\lambda_2) = \mathrm{E}(\lambda_4) = 0$, $\mathrm{E}(\lambda_3) = \frac{5}{8}$.



(c) Το τριώνυμο μηδενίζεται για $\lambda = \lambda_2$ και $\lambda = \lambda_4$. Για τις τιμές αυτες του λ μηδενίζεται και το εμβαδόν $\mathrm{E}(\lambda)$. Οπως φαίνεται και από τα παραπάνω σχήματα, αυτό γίνεται γιατί τα σημεία A, B και C είναι συγγραμικά για αυτές τις τιμές του λ.

(d) Η γραφική παράσταση δίνεται από το παρακάτω σχήμα:



Το σχήμα αυτό δίνεται από την παραβολή του παραπάνω τριωνύμου αν ανακλαστεί το τμήμα της καμπύλης όπου το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές ως προς τον άξονα των x.

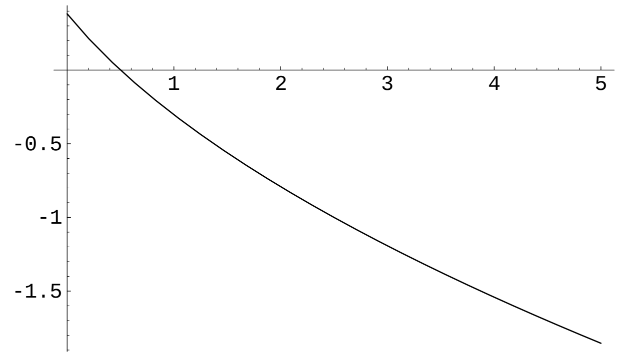
(e) Οπως φαίνεται και από το το παραπάνω σχήμα η συνάρτηση Ε δεν είναι 1–1 αφού $\mathrm{E}(\lambda_3 + \varepsilon) = \mathrm{E}(\lambda_3 - \varepsilon)\ \forall \varepsilon$. Επίσης δεν είναι επί αφού το πεδίο τιμών είναι το $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$. Μπορούμε να ορίσουμε τις παρακάτω συναρτήσεις που είναι 1–1 και επί, άρα και αντιστρέψιμες:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_1 &: (-\infty, \lambda_2] \to \mathbb{R}_+ \\
\mathrm{E}_2 &: [\lambda_2, \lambda_3] \to [0, 5/8] \\
\mathrm{E}_3 &: [\lambda_3, \lambda_4] \to [0, 5/8] \\
\mathrm{E}_4 &: [\lambda_4, +\infty) \to \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Οι τύποι των αντιστρόφων των παραπάνω συναρτήσεων βρίσκονται αντιστρέφοντας τη σχέση $\frac{1}{2}|-1+3\lambda-\lambda^2| = y$. Επειδή $-1+3\lambda-\lambda^2 = -(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_4)$, το τριώνυμο ειναι αρνητικό όταν $\lambda < \lambda_2$ ή $\lambda > \lambda_4$ και θετικό όταν $\lambda_2 < \lambda < \lambda_4$. Αρα έχουμε

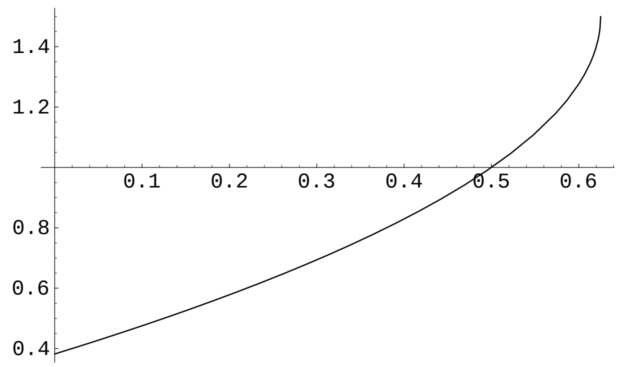
i. Για την E_1: $-\frac{1}{2}(-1+3\lambda-\lambda^2) = y$ από όπου λύνοντας ως προς λ και απαιτώντας $\lambda < \lambda_2$ παίρνουμε

$$\mathrm{E}_1^{-1}(y) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5+8y})$$



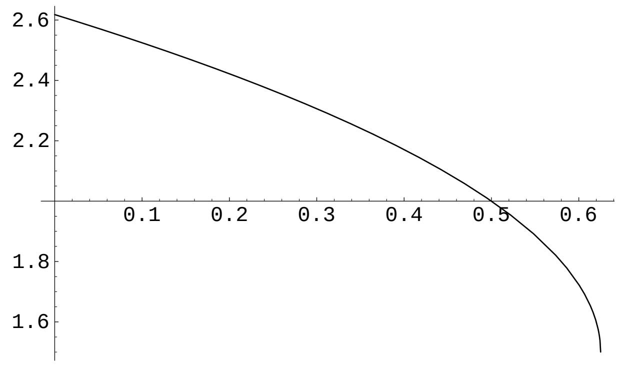
ii. Για την E_2: $\frac{1}{2}(-1+3\lambda-\lambda^2)=y$ από όπου λύνοντας ως προς λ και απαιτώντας $\lambda_2<\lambda<\lambda_3$ παίρνουμε

$$\mathrm{E}_2^{-1}(y)=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5-8y})$$



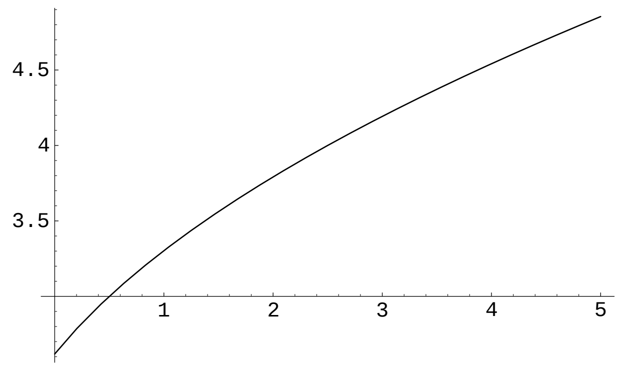
iii. Για την E_3: $\frac{1}{2}(-1+3\lambda-\lambda^2)=y$ από όπου λύνοντας ως προς λ και απαιτώντας $\lambda_3<\lambda<\lambda_4$ παίρνουμε

$$\mathrm{E}_3^{-1}(y)=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5-8y})$$



iv. Για την E_4: $-\frac{1}{2}(-1+3\lambda-\lambda^2) = y$ από όπου λύνοντας ως προς λ και απαιτώντας $\lambda_4 < \lambda$ παίρνουμε

$$\mathrm{E}_4^{-1}(y) = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5+8y})$$



9. **(10 βαθμοί)** Δίνονται τα παρακάτω διανύσματα με $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1-\lambda)\,\hat{i} + (2-2\lambda)\,\hat{j} + (1-\lambda)\,\hat{k} \\ \vec{b} &= (-6+3\lambda)\,\hat{i} + (-2+\lambda)\,\hat{j} \\ \vec{c} &= \hat{i} + 2\,\hat{j} - \hat{k}\end{aligned}$$

(a) Να βρεθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου $V(\lambda)$ που ορίζεται από τα παραπάνω διανύσματα.

(b) Να βρεθεί για ποιές τιμές του λ ο όγκος $V(\lambda)$ μηδενίζεται και να εξηγηθεί γεωμετρικά για πιό λόγο γίνεται.

(c) Να υπολογιστούν τα διανύσματα $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{b}\times\vec{c}$.

(d) Να βρεθούν οι τιμές του λ (αν υπάρχουν) για τις οποίες όλα τα διανύσματα $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{b}\times\vec{c}$ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο xy.

ΛΥΣΗ:

(a) Ο όγκος δίνεται από τη σχέση (σελ. 122 του βιβλίου):

$$V(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2-2\lambda & 1-\lambda \\ -6+3\lambda & -2+\lambda & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right| = |-20+30\lambda-10\lambda^2|$$

(b) Ο όγκος $V(\lambda)$ μηδενίζεται όταν μηδενίζεται το τριώνυμο $-20+30\lambda-10\lambda^2$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$. Επειδή $V(\lambda) = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$, ο όγκος είναι μηδέν όταν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}\times\vec{c}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Αφού το διάνυσμα $\vec{b}\times\vec{c}$ είναι κάθετο και στο $\vec{b}$ και στο $\vec{c}$, δηλαδή στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα αυτά, στην περίπτωση $\vec{a}\perp\vec{b}\times\vec{c}$ το $\vec{a}$ θα ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{b}$ και $\vec{c}$. Αρα τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ θα είναι συνεπίπεδα. Μιά άλλη περίπτωση είναι π.χ. $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}$, δηλ. τα $\vec{b}$ και $\vec{c}$ να είναι συγγραμικά ή κάποιο από αυτά $\vec{0}$. Και στην περίπτωση αυτή τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ είναι συνεπίπεδα. Αρα $V(\lambda)=0$ όταν και μόνο όταν τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ είναι συνεπίπεδα.

(c) Εχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-\lambda & 2-2\lambda & 1-\lambda \\ -6+3\lambda & -2+\lambda & 0 \end{pmatrix} \\
&= (2-3\lambda+\lambda^2)\vec{i} + (-6+9\lambda-3\lambda^2)\vec{j} + (10-15\lambda+\lambda^2)\vec{k} \\
\vec{a}\times\vec{c} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-\lambda & 2-2\lambda & 1-\lambda \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (-4+4\lambda)\vec{i} + (2-2\lambda)\vec{j} \\
\vec{b}\times\vec{c} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6+3\lambda & -2+\lambda & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)\vec{i} + (-6+3\lambda)\vec{j} + (-10+5\lambda)\vec{k}
\end{aligned}$$

(d) Θα πρέπει οι z–συνιστώσες να μηδενίζονται ταυτόχρονα. Δηλαδή:

$$10 - 15\lambda + 5\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2$$

και

$$-10 - 7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2\,.$$

Οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται ταυτόχρονα για $\lambda = 2$.

10. **(15 βαθμοί)** Δίνονται οι παρακάτω πίνακες:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\det(A_1 A_2^{-1}) = \frac{1}{\det(A_1^{-1} A_2)} = \frac{\det A_1}{\det A_2}$$

και αναλόγως για τους πίνακες B_1, B_2 κάνοντας ρητά τις πράξεις σε κάθε περίπτωση. Στη συνέχεια δείξτε ότι οι σχέσεις αυτές ισχύουν όταν τα B_1, B_2 είναι $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ αντιστρέψιμοι πίνακες χρησιμοποιώντας τις γενικές σχέσεις που βρίσκονται στο βιβλίο σας.

ΛΥΣΗ: Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε τα εξής:

$$\det \mathrm{A}_1 = -2 \qquad \det \mathrm{A}_2 = 33 \qquad \frac{\det A_1}{\det A_2} = -\frac{2}{33}$$

$$\mathrm{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{33} & \frac{1}{33} \\ -\frac{7}{33} & \frac{2}{33} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{33} & \frac{5}{33} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2^{-1}) = -\frac{2}{33} = \frac{\det A_1}{\det A_2}$$

$$\mathrm{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_1^{-1} \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -\frac{1}{2} & -8 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{A}_2) = -\frac{33}{2} = \frac{\det A_2}{\det A_1}$$

Ομοίως υπολογίζουμε:

$$\det \mathrm{B}_1 = -14 \qquad \det \mathrm{B}_2 = 2 \qquad \frac{\det \mathrm{B}_1}{\det \mathrm{B}_2} = -7$$

$$\mathrm{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & -1 & -\frac{13}{2} \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2^{-1}) = -7 = \frac{\det \mathrm{B}_1}{\det \mathrm{B}_2}$$

$$\mathrm{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ -\frac{11}{14} & \frac{9}{14} & -\frac{13}{14} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B}_1^{-1}\mathrm{B}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{4}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathrm{B}_1^{-1}\mathrm{B}_2) = -\frac{1}{7} = \frac{\det \mathrm{B}_2}{\det \mathrm{B}_1}$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν γενικά για τετραγωνικούς πίνακες. Αυτό προκύπτει από τις σχέσεις $\det(\mathrm{AB}) = \det \mathrm{A} \det \mathrm{B}$ (βλ. σελ. 129 βιβλίου) και από τη σχέση

$$1 = \det 1 = \det(\mathrm{AA}^{-1}) = \det \mathrm{A} \det \mathrm{A}^{-1} \Rightarrow \det \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}$$

Αρα έχουμε

$$\det(\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2^{-1}) = \det \mathrm{B}_1 \det \mathrm{B}_2^{-1} = \det \mathrm{B}_1 \frac{1}{\det \mathrm{B}_2} = \frac{\det \mathrm{B}_1}{\det \mathrm{B}_2} \text{ κ.ο.κ.}$$

11. **(10 βαθμοί)** Δίνεται το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων με $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
(-2+3\lambda-\lambda^2)x+(4-6\lambda+2\lambda^2)y+(6-9\lambda+3\lambda^2)z+(-4+6\lambda-2\lambda^2)w &= 1\\
y+z+2w &= 0\\
3x-4y-2z+w &= 2\\
-\frac{4}{\lambda-1}x+\frac{2}{\lambda-1}y+\frac{4}{\lambda-1}z+\frac{8}{\lambda-1}w &= -1
\end{aligned}
$$

(a) Για ποιές τιμές του λ το σύστημα έχει λύση;

(b) Να υπολογίσετε τις λύσεις αυτές.

ΛΥΣΗ:

Γράφουμε το σύστημα με τη μορφή σχέσεων πινάκων:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}$$

όπου

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2+3\,\lambda-\lambda^2 & 4-6\,\lambda+2\,\lambda^2 & 6-9\,\lambda+3\,\lambda^2 & -4+6\,\lambda-2\,\lambda^2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 3 & -4 & -2 & 1\\ \frac{-4}{-1+\lambda} & \frac{2}{-1+\lambda} & \frac{4}{-1+\lambda} & \frac{8}{-1+\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}\qquad \mathbf{y}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

(a) Βρίσκουμε ότι

$$\det\mathbf{A}=122(2-\lambda)$$

άρα το σύστημα δεν έχει λύση όταν $\lambda=2$ γιατί $\det\mathbf{A}=0$ και όταν $\lambda=1$ γιατί τότε δεν ορίζεται η τελευταία εξίσωση.

(b) Η λύση του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

οπότε υπολογίζουμε

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{61\,(-2+\lambda)\,(-1+\lambda)} & \frac{43}{61} & \frac{8}{61} & \frac{-21\,(-1+\lambda)}{122} \\ \frac{-10}{61\,(-2+\lambda)\,(-1+\lambda)} & \frac{36}{61} & -\left(\frac{16}{61}\right) & \frac{-19\,(-1+\lambda)}{122} \\ \frac{24}{61\,(-2+\lambda)\,(-1+\lambda)} & -\left(\frac{1}{61}\right) & \frac{14}{61} & \frac{9\,(-1+\lambda)}{122} \\ \frac{-7}{61\,(-2+\lambda)\,(-1+\lambda)} & \frac{13}{61} & \frac{1}{61} & \frac{5\,(-1+\lambda)}{122} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{32+9\,\lambda-52\,\lambda^2+21\,\lambda^3}{122\,(-2+\lambda)\,(-1+\lambda)} \\ \frac{-186+287\,\lambda-140\,\lambda^2+19\,\lambda^3}{122\,(-2+\lambda)\,(-1+\lambda)} \\ \frac{178-213\,\lambda+92\,\lambda^2-9\,\lambda^3}{122\,(-2+\lambda)\,(-1+\lambda)} \\ \frac{4-37\,\lambda+24\,\lambda^2-5\,\lambda^3}{122\,(-2+\lambda)\,(-1+\lambda)} \end{pmatrix}$$