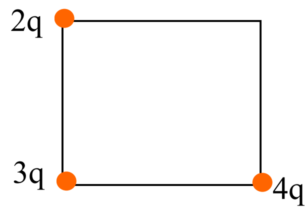
# ΦΥΕ 14
# ΕΚΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

## ΠΡΟΘΕΣΜΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ 19 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

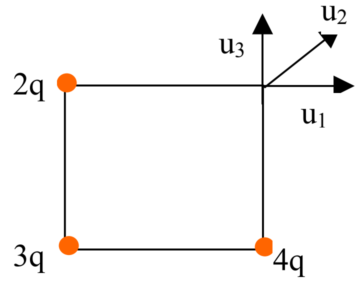
**Άσκηση 1 (5 μονάδες)**

Τρία σημειακά φορτία τοποθετούνται στις κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς α όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε την διεύθυνση και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στη κορυφή όπου δεν υπάρχει φορτίο.




**Λύση**

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι το διανυσματικό άθροισμα των ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργούνται από κάθε φορτίο ξεχωριστά.




$\vec{E} = \vec{E}_{2q} + \vec{E}_{3q} + \vec{E}_{4q}$ με

$$\vec{E}_{2q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2q)}{\alpha^2}\vec{u}_1 \quad \vec{E}_{3q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(3q)}{2\alpha^2}\vec{u}_2 \quad \vec{E}_{4q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4q)}{\alpha^2}\vec{u}_3$$

Θεωρώντας ως σύστημα συντεταγμένων x-y με άξονα x παράλληλο στη διεύθυνση του $u_1$ και y παράλληλο στο $u_3$ έχουμε:

$$\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_3 = (0,1), \vec{u}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Έτσι

$$\vec{E} = \vec{E}_{2q} + \vec{E}_{23} + \vec{E}_{4q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\alpha^2}(2,0) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\alpha^2}(\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\alpha^2}(0,4) =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\alpha^2}(\frac{3+4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \frac{3+8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}})$$

Επομένως το μέτρο και γωνία που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο με το x άξονα είναι

$\left|\vec{E}\right| = \frac{5.91}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\alpha^2}$ και $\varphi = 58.8^0$ αντίστοιχα.

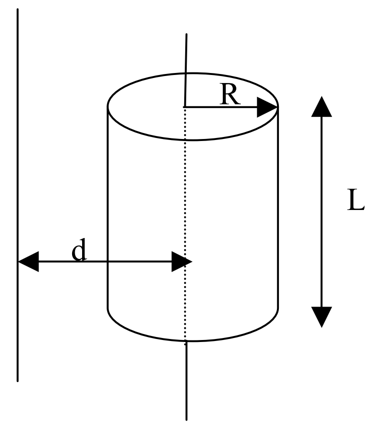
**Άσκηση 2 (5 μονάδες)**

Θεωρήστε ένα ευθύγραμμο τμήμα πάρα πολύ μεγάλου μήκους με σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ. Υπολογίστε την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από ένα κύλινδρο ύψους L και ακτίνας R του οποίου ο άξονας είναι παράλληλος στο ευθύγραμμο τμήμα. (Υπόδειξη: θεωρείστε d την απόσταση του άξονα του κυλίνδρου από το ευθύγραμμο τμήμα και διακρίνετε τις περιπτώσεις $R<d$, $R>d$).

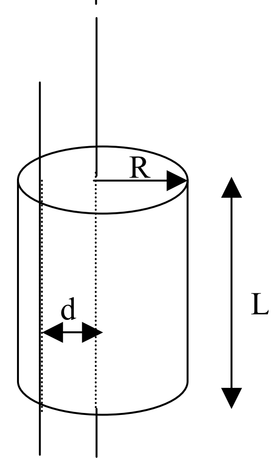
**Λύση**

Διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις :

I) $R<d$
Τότε ο κύλινδρος δεν περιέχει φορτία επομένως σύμφωνα με το νόμο του Gauss $\Phi_E=q/\varepsilon_0=0$ δηλαδή η ηλεκτρική ροή είναι μηδέν.

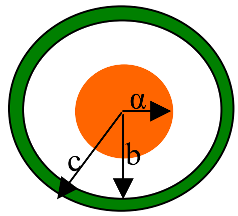



II) $R>d$
Τότε ο κύλινδρος περιέχει φορτία επειδή στο εσωτερικό του βρίσκεται μέρος του φορτισμένου τμήματος. Το φορτίο που περιέχει είναι λL και επομένως από το νόμο του Gauss έχουμε $\Phi_E=\lambda L/\varepsilon_0$



**Άσκηση 3 (10 μονάδες)**

Μια συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας α έχει θετικό φορτίο 3Q που ισοκατανέμεται στον όγκο της. Η σφαίρα περικλείεται από ένα αγώγιμο ομοκεντρικό σφαιρικό φλοιό εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c που έχει φορτίο –Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο και κάντε τη γραφική παράσταση της έντασης συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο της σφαίρας.




**Λύση**

Επειδή το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία (μονωτική σφαίρα ομογενούς πυκνότητας φορτίου και σφαιρικός αγώγιμος φλοιός) το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει ακτινική διεύθυνση και μέτρο που θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο της σφαίρας.
Αν ρ η πυκνότητα φορτίου της σφαίρας που (επειδή είναι ομογενής) είναι σταθερή θα ισχύει ρ=3Q/V όπου V ο όγκος της σφαίρας ($V=4/3\ \pi\ \alpha^3$)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I) r<α

Τότε αν θεωρήσουμε μια σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα r και εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss θα έχουμε

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{r<\alpha}(r)\,4\,\pi\,r^2 = \frac{\rho\,{}^4\!/_3\,\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{r<\alpha}(r) = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0} r = \frac{\dfrac{3Q}{{}^4\!/_3\,\pi\alpha^3}}{3\,\varepsilon_0} r = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{3Q}{\alpha^3} r$$

II) α<r<b

Η σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα r περιέχει φορτίο 3Q επομένως ο νόμος του Gauss δίνει:

$$\Phi_E = \frac{3Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{\alpha<r<b}(r)\,4\,\pi\,r^2 = \frac{3Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{\alpha<r<b}(r) = \frac{3Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r^2}$$

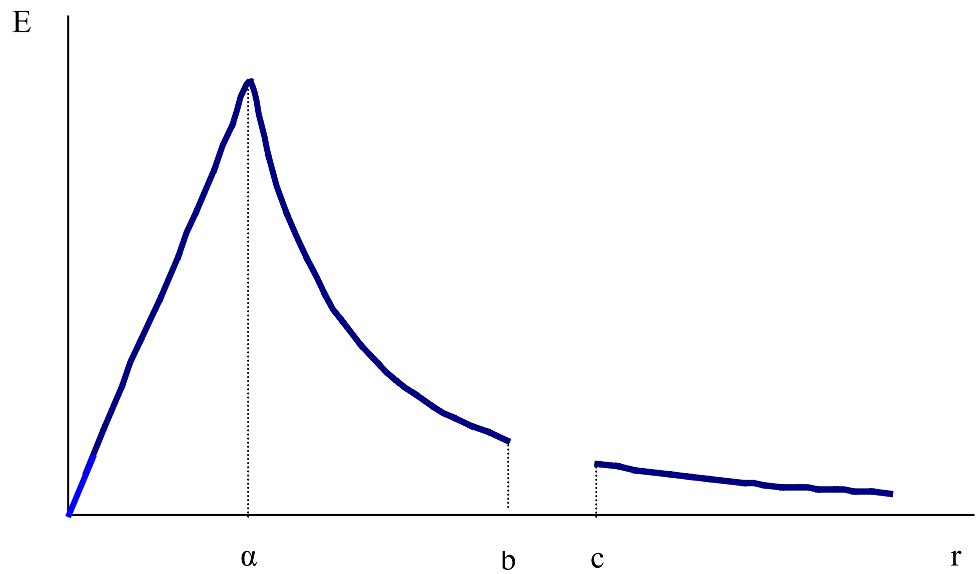
II) b<r<c

Επειδή σε αυτήν την περιοχή βρισκόμαστε μέσα σε αγωγό το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι μηδέν

$$E_{b<r<c}(r) = 0$$

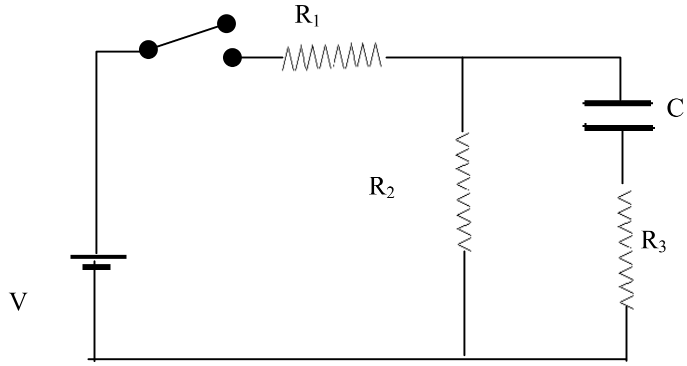
II) r>c
Η σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα r περιέχει φορτίο 3Q-Q=2Q επομένως ο νόμος του Gauss δίνει:

$$\Phi_E = \frac{2Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{r>c}(r)\, 4\,\pi\, r^2 = \frac{2Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{r>c}(r) = \frac{2Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r^2}$$

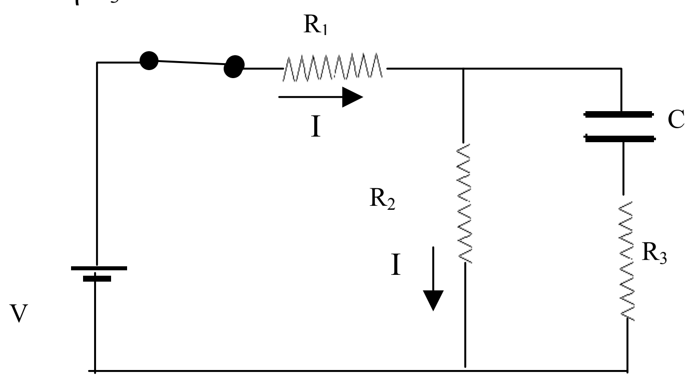


**Άσκηση 4 (10 μονάδες)**

Για το κύκλωμα που φαίνεται στο σχήμα υποθέστε ότι ο διακόπτης έχει παραμείνει κλειστός για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα ώστε ο πυκνωτής να έχει φορτιστεί πλήρως.
α) Βρείτε τα ρεύματα που διαρρέουν κάθε αντίσταση.
β) Βρείτε το φορτίο του πυκνωτή.
γ) Ο διακόπτης ανοίγεται τη χρονική στιγμή μηδέν. Γράψτε την εξίσωση που δίνει το ρεύμα $I_R$ που διαρρέει την αντίσταση $R_2$ συναρτήσει του χρόνου.
δ) Βρείτε το χρόνο που χρειάζεται ώστε το φορτίο του πυκνωτή να πέσει στο 1/5 της αρχικής τιμής του.
(Δίνονται $R_1$=12 kΩ, $R_2$=15 kΩ, $R_3$=3 kΩ, V= 9 V, C=10 μF)




**Λύση**
Επειδή το κύκλωμα έχει παραμείνει κλειστό για μεγάλο χρονικό διάστημα ο πυκνωτής έχει φορτιστεί πλήρως και δεν διαρρέεται από ρεύμα. Επομένως το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση $R_3$ είναι 0.



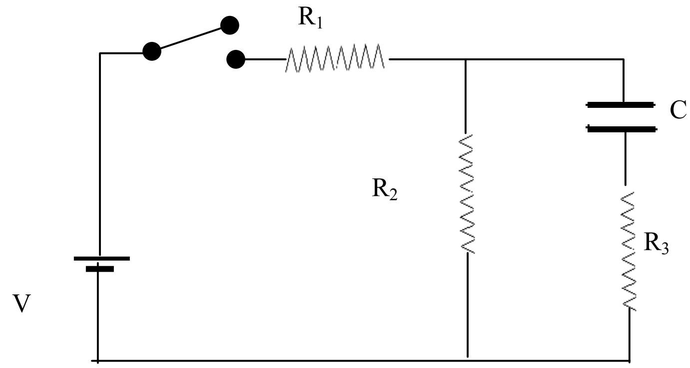

α) Στον βρόγχο που περιέχει την πηγή τάσης το διακόπτη και τις δύο αντιστάσεις $R_1$ και $R_2$ εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff έχουμε

$$V = R_1 I + R_2 I \Rightarrow I = \frac{V}{(R_1 + R_2)} = 0.33\,\text{mA}$$

β) Εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο βρόγχο που περιέχει το πυκνωτή και τις δύο αντιστάσεις $R_2$ και $R_3$ βρίσκουμε ότι

$V_c = I \cdot R_2 = 5V$ και επομένως το φορτίο του είναι $Q = C \cdot V = 50\,\mu C$

Όταν ο διακόπτης ανοίξει τότε η αντίσταση $R_1$ δεν διαρρέεται από ρεύμα. Ο βρόγχος που περιέχει τον πυκνωτή και τις αντιστάσεις $R_2$ και $R_3$ διαρρέεται από ρεύμα λόγω της εκφόρτισης του πυκνωτή.




γ) Το ρεύμα που διαρρέει τις αντιστάσεις $R_2$ και $R_3$ δίνεται από τη σχέση :

$$I = \frac{V(t)}{R_2 + R_3} = \frac{V_0}{R_2 + R_3} e^{-\frac{t}{(R_2+R_3)C}} = 0.278\ e^{-\frac{t}{0.18s}}\ \text{mA}$$

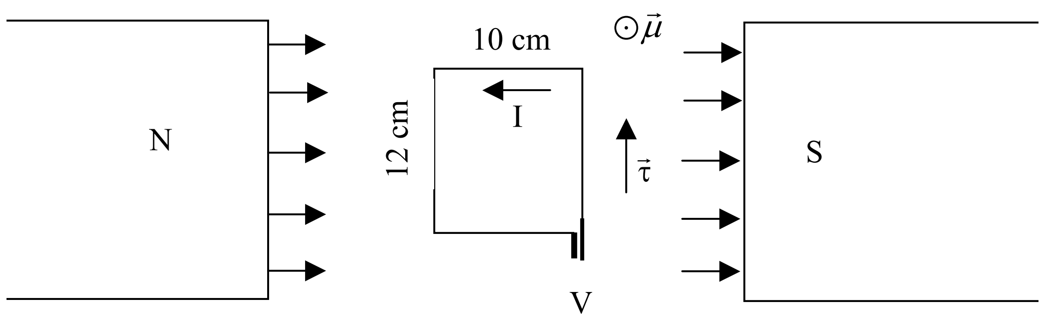
δ) Το φορτίο του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση (εκφόρτιση πυκνωτή)

$$\mathrm{Q(t)} = \mathrm{Q}_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \mathrm{Q}_0\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \frac{Q(t)}{Q_0} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \frac{t}{RC} = \ln(\frac{Q_0}{Q(t)}) \Rightarrow t = RC\ln(\frac{Q_0}{Q(t)})$$

Επομένως για $Q_0/Q(t)=5$ βρίσκουμε ότι t=0.290 s

**Άσκηση 5 (10 μονάδες)**

Ένα χάλκινο σύρμα διατομής 0.1 $mm^2$ και ειδικής αντίστασης 1.7 $10^{-8}$ Ω m λυγίζεται ώστε να σχηματιστεί ένα συρμάτινο πλαίσιο σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου με πλευρές μήκους 10 cm και 12 cm. Το πλαίσιο βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B=0.25 T που παράγεται από δύο μαγνήτες όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν κάποια χρονική στιγμή εφαρμόσουμε τάση στο πλαίσιο με τη βοήθεια μια μπαταρίας ηλεκτρεγερτικής δύναμης $V_{HE\Delta}$ = 10 V και εσωτερικής αντίστασης 1 Ω υπολογίστε τη ροπή που θα ασκηθεί στο πλαίσιο από το μαγνητικό πεδίο.




**Λύση**

Όταν θα εφαρμοστεί η τάση το πλάισιο θα διαρρέεται από ρεύμα I και επειδή βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο θα ασκηθεί ροπή $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ όπου $\vec{\mu}$ η μαγνητική ροπή του πλαισίου και $\vec{B}$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου.

Η μαγνητική ροπή έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζει το πλαίσιο και προς τα έξω και επομένως η ροπή $\vec{\tau}$ έχει φορά κάθετη στο μαγνητικό πεδίο και παράλληλη με το επίπεδο του πλαισίου.

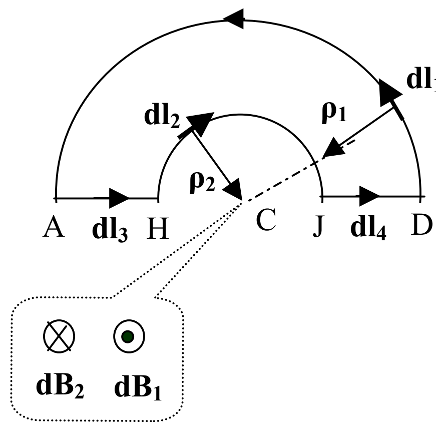
Το μέτρο της μαγνητικής ροπής είναι $\mu = IA = 0.12 \cdot 0.10 \cdot I = 0.012 \cdot I$ ενώ το ρεύμα I δίνεται από τον τύπο $I = \dfrac{V}{r+R}$ όπου R η αντίσταση του πλαισίου.

Όμως $R = \rho \dfrac{l}{s} = 1.7 \cdot 10^{-8} \dfrac{0.44}{0.1 \cdot 10^{-6}} \Omega = 7.48\ 10^{-2} \Omega$ επομένως $I = \dfrac{V}{r+R} = \dfrac{10}{1.075} \mathrm{A} = 9.3\mathrm{A}$

Έτσι μ=0.112 $Am^2$ και τ=0.112 0.25=0.028 Nm.

**Άσκηση 6 (15 μονάδες)**

Χρησιμοποιώντας το νόμο Biot-Savart υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο **B** στο κοινό κέντρο C των ημικυκλικών τόξων AD και HJ, ακτίνων $R_1$ και $R_2$, που αποτελούν μέρος του κυκλώματος ADJHA που διαρρέεται από ρεύμα I.




<u>Λύση</u>

Ο νόμος των Biot-Savart δίνει το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο dB που οφείλεται στο απειροστό τμήμα ρευματοφόρου αγωγού dl.

$$dB_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathbf{dl}_i \times \boldsymbol{\rho}_i}{r_i^2}$$

Μετά πρέπει να αθροίσουμε όλες τις συνεισφορές. Χωρίζουμε το κύκλωμα μας σε τέσσερα τμήματα. Τα δύο ημικύκλια και τα δύο ευθύγραμμα τμήματα. Το $\mathbf{dl_i}$ είναι διάνυσμα με φορά τη φορά του ρεύματος. Ο δείκτης i παίρνει τιμές από 1 έως 4 για τα τέσσερα τμήματα του κυκλώματος. Το $\boldsymbol{\rho}_\mathbf{i}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα από το $\mathbf{dl_i}$ προς το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο, δηλαδή το C στην περίπτωση μας. Ισχύει $\mathbf{r_i} = r_i\boldsymbol{\rho}_\mathbf{i}$.
Εξετάζοντας τα τέσσερα τμήματα βλέπουμε ότι τα δύο ευθύγραμμα τμήματα δεν συνεισφέρουν στο μαγνητικό πεδίο επειδή τα dl και ρ είναι συγγραμμικά. Το $\mathbf{dl_1}$ στο εξωτερικό ημικύκλιο δημιουργεί πεδίο $\mathbf{dB_1}$ κάθετο στο επίπεδο της σελίδας και με φορά προς τον αναγνώστη. Το $\mathbf{dl_2}$ στο εσωτερικό ημικύκλιο δημιουργεί πεδίο $\mathbf{dB_2}$ κάθετο στο επίπεδο της σελίδας και με φορά από τον αναγνώστη.
Το συνολικό πεδίο από το εξωτερικό ημικύκλιο $\mathbf{B_1}$ προκύπτει αν αθροίσουμε όλα τα $\mathbf{dl_1}$, δηλαδή να ολοκληρώσουμε την σχέση (1) πάνω στο εξωτερικό ημικύκλιο.

$$\mathbf{B_1} = \int \mathbf{dB}_1 = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathbf{dl}_1 \times \boldsymbol{\rho}_1}{r_1^2} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl_1}{r_1^2} = \mathbf{k}\frac{\mu_0}{4\pi R_1^2}\int_{\eta\mu\iota\kappa} dl_1 = \frac{\mu_0}{4\pi R_1^2}(\pi R_1)\mathbf{k} = \frac{\mu_0}{4R_1}\mathbf{k}$$

όπου k είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα dli και ρi (δηλαδή κάθετο στη σελίδα) και με κατεύθυνση προς τον αναγνώστη.
Ανάλογα και για το εσωτερικό ημικύκλιο θα έχουμε

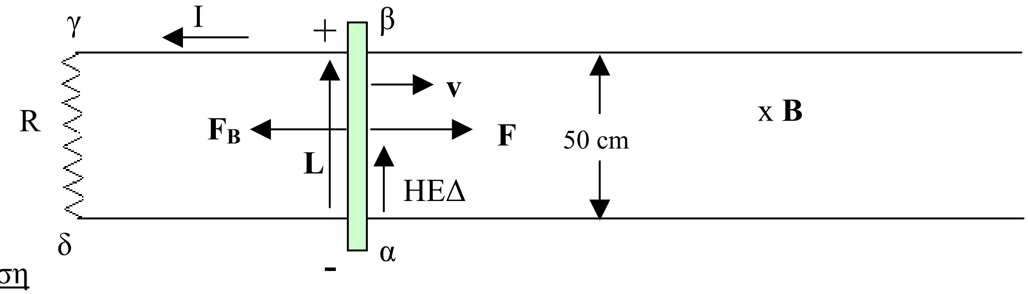
$$\mathbf{B_2} = -\frac{\mu_0}{4R_2}\mathbf{k}$$

Συνολικά η μαγνητική επαγωγή στο σημείο C, $\mathbf{B_C}$, δίνεται από

$$\mathbf{B_C} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B_2} + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\mathbf{k}$$

**Άσκηση 7 (10 μονάδες)**

Μια αντίσταση R=3 Ω συνδέεται με δύο μεταλλικά σύρματα (μηδενικής αντίστασης) μεγάλου μήκους τα οποία κάνουν επαφή με μια μεταλλική ράβδο (μηδενικής αντίστασης) όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κύκλωμα βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου B=0.15 T κάθετου στην επιφάνεια του κυκλώματος αυτού. Στη ράβδο ασκείται μηχανικά μια δύναμη F ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα δεξιά. Υπολογίστε την ταχύτητα της ράβδου αν η μηχανική ισχύς που δαπανάται είναι $7.5\ 10^{-3}$ W.




Λύση

Έστω ότι η μαγνητική επαγωγή **B** έχει φορά από τον αναγνώστη προς την σελίδα (συμβολίζεται με “x”).
Ασκούμε δύναμη **F** προς τα δεξιά και η ράβδος κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα **υ**. Ένα ηλεκτρόνιο ακολουθεί την ράβδο προς τα δεξιά (έχει και αυτό ταχύτητα **υ** προς τα δεξιά) και του ασκείται δύναμη Lorentz προς τα κάτω. Το ηλεκτρόνιο θα κινηθεί προς τα κάτω με συνέπεια να εμφανισθεί ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I στο κύκλωμα αβγδα με φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού.
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο κύκλωμα δίνεται από την σχέση ΗΕΔ=BυL όπου L=50 cm είναι το μήκος της ράβδου ανάμεσα στα σύρματα (αβ). Η φορά της είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Η πτώση τάσης στο κύκλωμα είναι IR. Οπότε έχουμε ΗΕΔ-IR=0⇒ΗΕΔ=BυL=IR (1)
Ο ρευματοφόρος αγωγός αβ δέχεται δύναμη $\mathbf{F_B}$ προς τα αριστερά που οφείλεται στο εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο ($\mathbf{F_B}$ = I **L**x**B**). Αφού η ράβδος κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα, ισχύει $F=F_B=ILB$ (2)
Τέλος η ισχύς P που καταναλώνεται από την δύναμη F (σταθερή) είναι P=**F**·**υ**=Fυ (3)
Από τις τρεις σχέσεις (1), (2), (3) παίρνουμε ότι

$$\upsilon = \frac{\sqrt{RP}}{BL} = \frac{\sqrt{(3\,\Omega)(7.5\times10^{-3}\,W)}}{(0.15\,T)(0.5\,m)} = 2\,ms^{-1}$$

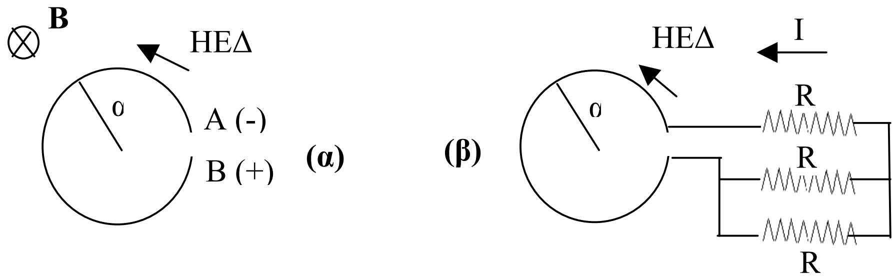
Παρατήρηση σχετικά με την φορά του ρεύματος.
Ας χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Lenz. Η μεταβολή στο κύκλωμα είναι η αύξηση της μαγνητικής ροής μέσα από το κύκλωμα αβγδα. Η επαγόμενη ΗΕΔ πρέπει να έχει τέτοια κατεύθυνση ώστε να τείνει να μειώσει την διερχόμενη ροή. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν μειωθεί η μαγνητική επαγωγή. Παρατηρείστε ότι με την ΗΕΔ και την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος όπως τα έχουμε σχεδιάσει, ο ρευματοφόρος αγωγός δαβγ δημιουργεί μαγνητικό πεδίο αντίθετο προς το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο με αποτέλεσμα να τείνει να μειώσει την μαγνητική ροή μέσα από το κύκλωμα

**Άσκηση 8 (10 μονάδες)**

Κάθετα στο επίπεδο ενός μεταλλικού δακτυλίου, αντιστάσεως R, ακτίνας α και αμελητέου πάχους, μεταβάλλεται ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο με σταθερό ρυθμό $\frac{dB}{dt}$ κατά μέτρο. Ζητούνται:

α) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β (τα Α και Β είναι πολύ κοντά) (σχήμα (α)).

β) Το ρεύμα το οποίο θα διαρρέει τον δακτύλιο αν τον συνδέσουμε όπως στο σχήμα (β).




Λύση

Αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη ΗΕΔ στα άκρα Α,Β που δίνεται από το νόμο του Faraday. $\text{ΗΕΔ} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ Το μέτρο της είναι $\left|\text{ΗΕΔ}\right| = \left|\frac{d\Phi_m}{dt}\right| = \frac{d}{dt}\left(B\pi a^2\right) = \pi a^2 \frac{dB}{dt}$ (1)

Έστω ότι το μαγνητικό πεδίο έχει διεύθυνση από τον αναγνώστη προς την σελίδα και αυξάνει. Η μαγνητική ροή μέσα από το κύκλωμα αυξάνει. Από τον κανόνα του Lenz ξέρουμε ότι η επαγόμενη ΗΕΔ θα τείνει να αναιρέσει το αίτιο που την προκάλεσε άρα θα δημιουργήσει μαγνητικό πεδίο που θα τείνει να μειώσει την μαγνητική ροή. Αυτό θα συμβεί αν λόγω του επαγόμενου ρεύματος δημιουργηθεί μαγνητικό πεδίο με διεύθυνση από την σελίδα προς τον αναγνώστη. Για να δημιουργηθεί τέτοιο πεδίο πρέπει το ρεύμα να έχει κατεύθυνση αντίθετη από την φορά του ρολογιού όπως φαίνεται στο σχήμα α. Η ΗΕΔ έχει την ίδια κατεύθυνση με την φορά του επαγόμενου ρεύματος.

(α) Όταν οι ακροδέκτες Α και Β δεν συνδέονται με εξωτερικό κύκλωμα θα έχουμε συσσώρευση θετικού φορτίου στο Β και αρνητικού στο Α. Θα δημιουργηθεί ηλεκτρικό πεδίο αντίθετο από το επαγόμενο και ανάλογο της συσσώρευσης φορτίου. Για κάποια τιμή της συσσώρευσης τα δύο ηλεκτρικά πεδία θα αλληλοαναιρεθούν με αποτέλεσμα να μηδενιστεί το επαγόμενο ρεύμα.

(β) Αν οι ακροδέκτες συνδεθούν με εξωτερικό κύκλωμα όπως στο σχήμα β η ροή του ηλεκτρικού ρεύματος θα συνεχιστεί με ίδια φορά όπως και η επαγόμενη ΗΕΔ. Το ρεύμα δίνεται από την σχέση ΗΕΔ=$R_{ολ}$I (2) όπου Rολ συνολική αντίσταση δίνεται από την σχέση

$$R_{ολ} = R + \frac{RR}{R+R} = \frac{3R}{2} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), και (3) συνάγουμε ότι

$$I = \frac{2}{3}\frac{\pi a^2}{R}\frac{dB}{dt} \qquad (4)$$

## Άσκηση 9  (10 μονάδες)

Το μισό ενός πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς εμβαδού A και απόστασης d γεμίζεται με υλικό διηλεκτρικής σταθεράς 2  όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Αν στο πυκνωτή βάλουμε το ίδιο διηλεκτρικό υλικό αλλά όπως φαίνεται στο σχήμα (β) πόσο θα πρέπει να είναι η απόσταση  x  ώστε και στις δύο περιπτώσεις να είχαμε την  ίδια χωρητικότητα;

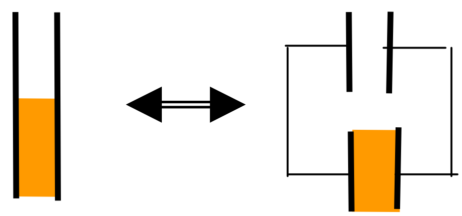
(α)


(β)

Λύση

Η χωρητικότητα του αρχικού πυκνωτή χωρίς το διηλεκτρικό είναι $C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$. Αν εφαρμόσουμε διαφορά δυναμικού $V_0$ στους οπλισμούς, ο πυκνωτή θα φορτισθεί με φορτίο Q και στο εσωτερικό του θα αναπτυχθεί ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\mathbf{E_0}$. Θα ισχύει $V_0=E_0 d$ και $C_0=Q/V_0$.

Στην περίπτωση του σχήματος (α) έχουμε το ισοδύναμο δύο πυκνωτών με επιφάνεια οπλισμών την μισή του αρχικού συνδεδεμένων παράλληλα (αφού οι οπλισμοί του αρχικού πυκνωτή είναι ισοδυναμικές επιφάνειες).  Αν $C_1$ και $C_2$ οι χωρητικότητες των δύο επιμέρους πυκνωτών, προκύπτει ότι η καινούργια χωρητικότητα του πυκνωτή θα είναι $C_\alpha=C_1+C_2$.



Ισχύει ότι $C_1 = \kappa\varepsilon_0 \frac{A/2}{d} = \kappa \frac{C_0}{2}$ και $C_2 = \varepsilon_0 \frac{A/2}{d} = \frac{C_0}{2}$

Άρα  $C_\alpha = \frac{C_0}{2}(\kappa+1)$  (1)

Στην περίπτωση του σχήματος (β) το διηλεκτρικό καλύπτει όλη την επιφάνεια του οπλισμού αλλά το πάχος του είναι μικρότερο από την απόσταση μεταξύ των οπλισμών d. Έστω ότι εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού $V_0$ στους οπλισμούς του πυκνωτή. Στον κενό χώρο μεταξύ των οπλισμών η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\mathbf{E_0}$ ενώ μέσα στο διηλεκτρικό είναι $\mathbf{E}=\mathbf{E_0}/\kappa$ ή $E=E_0/\kappa$ .

Η διαφορά δυναμικού στον κενό χώρο είναι $V_1 = E_0\, x = V_0 \frac{x}{d}$

Η διαφορά δυναμικού μέσα στο διηλεκτρικό είναι $V_2 = E(d-x) = \frac{E_0}{\kappa}(d-x) = V_0 \frac{(d-x)}{\kappa d}$

Ισχύει ότι $V = V_1 + V_2 = V_0\left(\frac{x}{d} + \frac{d-x}{\kappa d}\right) = V_0\left[\frac{kx+d-x}{\kappa d}\right]$

Κατά συνέπεια η συνολική χωρητικότητα είναι

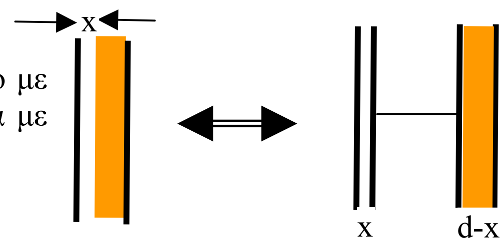
$$C_\beta = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0\left[\dfrac{\kappa x + d - x}{\kappa d}\right]} = C_0 \frac{\kappa d}{\kappa x + d - x} \quad (2)$$

Εξισώνοντας τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$x = \frac{d}{3}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Αν στην περίπτωση του σχήματος (β) θεωρήσουμε ότι το σύστημα μας είναι ισοδύναμο με δύο επίπεδους πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά με χωρητικότητες




$$C_1' = \varepsilon_0 \frac{A}{x} = C_0 \frac{d}{x} \qquad \text{και}$$

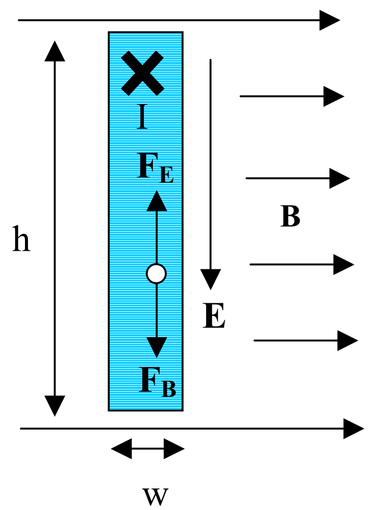
$$C_2' = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d-x} = \kappa C_0 \frac{d}{d-x}$$

τότε η συνολική χωρητικότητα είναι

$$C_\beta = \frac{C_1' C_2'}{C_1' + C_2'} = C_0 \frac{\kappa d}{\kappa x + d - x}$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με την σχέση (2).

**Άσκηση 10 (15 μονάδες)**




Ρεύμα I που δηλώνεται με σταυρούς στο διπλανό σχήμα διαβιβάζεται μέσα σε μία χάλκινη λάμα ύψους h και πάχους w. Ομογενές μαγνητικό πεδίο **B** εφαρμόζεται κάθετα προς την λάμα. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα μετάθεσης $v_d$ των ηλεκτρονίων (β) ποιο είναι το μέτρο και η φορά της μαγνητικής δύναμης **F** πάνω στα ηλεκτρόνια; (γ) Ποιο είναι το μέτρο, η διεύθυνση, και η φορά ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου **E** που να εξουδετερώνει τα αποτελέσματα του μαγνητικού; (δ) Ποια είναι η διαφορά δυναμικού V, που είναι αναγκαία για την δημιουργία αυτού του πεδίου; Μεταξύ ποιών πλευρών του αγωγού πρέπει να εφαρμοστεί αυτή η διαφορά δυναμικού; (ε) Αν δεν εφαρμοστεί εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο τα ηλεκτρόνια θα συσσωρευτούν στη μία πλευρά και έτσι θα δημιουργηθεί ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $E_H$ κάθετα στον αγωγό. Η συσσώρευση θα σταματήσει όταν οι δυνάμεις του ηλεκτροστατικού πεδίου $E_H$ εξουδετερώσουν τις μαγνητικές δυνάμεις του ερωτήματος (β). Ποιο είναι το μέτρο και η φορά του πεδίου $E_H$; Να υποθέσετε ότι ο αριθμός των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας ανά μονάδα όγκου είναι $n=1.1\times10^{29}$ $m^{-3}$ και ότι h=0.02 m, w=0.1 cm, I=50 A, B=2 T.

<u>Λύση</u>

(α) Τα ηλεκτρόνια έχουν κατεύθυνση από το επίπεδο της σελίδας προς τον αναγνώστη και ταχύτητα μετάθεσης

$$\upsilon_d = \frac{I}{eAn} = \frac{(50\ A)}{(1.6\times10^{-19}\ C)(0.02\times0.1\times10^{-2}\ m^2)(1.1\times10^{29}\ m^{-3})} = 14.2\times10^{-5}\ ms^{-1}$$

(β) Η δύναμη του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{F}_B = -|e|\mathbf{\upsilon_d}\times\mathbf{B}$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω. Το μέτρο της είναι

$$F_B = e\upsilon_d B = (1.6\times10^{-19}\ C)(14.2\times10^{-5}\ ms^{-1})(2\ T) = 45.44\times10^{-24}\ N$$

(γ) Πρέπει το ηλεκτρικό πεδίο να εξασκεί δύναμη πάνω στα ηλεκτρόνια με κατεύθυνση προς τα πάνω. Για να γίνει αυτό πρέπει το εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_{\varepsilon\xi}$ να έχει φορά προς τα κάτω. Το μέτρο του θα είναι:

$$E_{\varepsilon\xi} = \frac{F_E}{e} = \frac{F_B}{e} = \frac{45.44 \times 10^{-24}\ N}{1.6 \times 10^{-19}\ C} = 28.4 \times 10^{-5}\ NC^{-1}$$

(δ) Θα εφαρμοστεί διαφορά δυναμικού V ανάμεσα στην πάνω και στην κάτω πλευρά του αγωγού. Για να έχει η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου φορά προς τα κάτω πρέπει το ψηλότερο δυναμικό να εφαρμοστεί στην πάνω πλευρά. Θεωρώντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές, η διαφορά δυναμικού δίνεται από την σχέση

$$V = Eh = \left(28.4 \times 10^{-5}\ NC^{-1}\right)\left(0.02\ m\right) = 0.57 \times 10^{-5}\ V$$

(ε) Η συσσώρευση θα σταματήσει όταν η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο εξουδετερώσει την δύναμη από το μαγνητικό πεδίο. Άρα η απάντηση πρέπει να είναι ίδια με το (γ), δηλαδή $\mathbf{E}_{\varepsilon\xi} = \mathbf{E}_{\mathbf{H}}$. Τα ηλεκτρόνια δημιουργούν περίσσεια αρνητικού φορτίου στο κάτω μέρος του αγωγού ενώ στο επάνω μέρος υπάρχει έλλειμμα ηλεκτρονίων δηλαδή θετικό φορτίο. Κατά συνέπεια πάλι βλέπουμε ότι το $\mathbf{E}_{\mathbf{H}}$ έχει φορά προς τα κάτω.