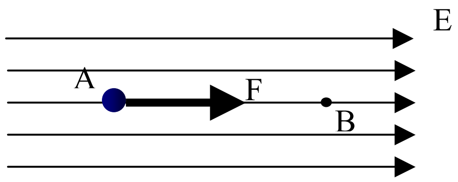
ΛΥΣΕΙΣ 6^{ης} ΕΡΓΑΣΙΑΣ

(Ημερομηνία παράδοσης 3 Ιουλίου 2005)

Άσκηση 1. (10 μονάδες)

Α) Δοκιμαστικό φορτίο $+q$ αφήνεται σε κάποιο σημείο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως E. Να εξετάσετε πώς θα κινηθεί το φορτίο:
α) Από σημείο υψηλότερης ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας σε σημείο χαμηλότερης ή αντίστροφα;
β) Από σημείο υψηλότερου δυναμικού σε σημείο χαμηλότερου δυναμικού ή αντίστροφα;
γ) Απαντήστε στα α) και β) υποθέτοντας τώρα αρνητικό φορτίο.
Β) Δίνονται δύο φορτία Q1= +1 C, Q2 = - 1 C που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r=1 m.
Να βρείτε την ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το $Q1$ και ακτίνα: α) r= 0.5 m β) r= 0.7 m γ) r= 1.2 m.

ΛΥΣΗ



Α)
(α) Το ηλεκτρικό φορτίο αφήνεται σε ένα σημείο Α μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Θα αρχίσει να κινείται υπό την επίδραση της δύναμης του πεδίου και μετά από λίγο θα βρίσκεται στη θέση Β.
Υπολογίζουμε το έργο W που παράγεται από τη δύναμη F του πεδίου που εξασκείται πάνω στο φορτίο $W_{A-B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B qE \cdot dl = qE(AB) > 0$

Όπου $d\vec{l}$ είναι το στοιχειώδες διάνυσμα μετατόπισης με φορά από το Α προς το Β και (ΑΒ) η απόσταση των δύο σημείων.

Άλλά $W_{A-B} = U_A - U_B$ όπου U_A Και U_B η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του φορτίου q στις θέσεις Α και Β αντίστοιχα.

Επομένως: $$W_{A-B} = U_A - U_B = qE(AB) > 0 \Rightarrow$$
$$U_A - U_B > 0 \Rightarrow U_A > U_B$$
Άρα το φορτίο κινείται από σημεία υψηλότερης σε σημεία χαμηλότερης ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας (Όπως και κάθε υπόθεμα μέσα στο αντίστοιχο πεδίο).

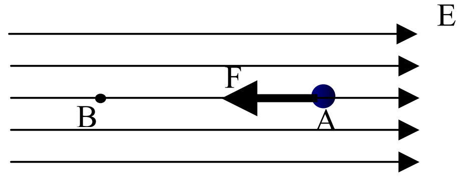
(β) Ισχύει επίσης ότι:

$$\frac{W_{A-B}}{q}=\frac{U_A-U_B}{q}\Rightarrow V_A-V_B=\frac{W_{A-B}}{q}\Rightarrow V_A-V_B=\frac{qE(AB)}{q}\Rightarrow$$

$$V_A-V_B=E(AB)>0\Rightarrow V_A>V_B$$

Άρα το θετικό ηλεκτρικό φορτίο q κινείται επίσης από σημεία υψηλότερου σε σημεία χαμηλότερου ηλεκτρικού δυναμικού.

Β) Εάν αφήσουμε στη θέση Α ένα αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο q τότε αυτό θα κινηθεί αντίθετα από την φορά των δυναμικών γραμμών.



Προσέξτε ότι το διάνυσμα dl και το διάνυσμα Ε της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου σχηματίζουν γωνία 180°.

$$W_{A-B}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_A^B qE\cdot dl\cos(180^o)=-\int_A^B qE\cdot dl=qE(AB)>0$$

Όμως και το φορτίο q είναι αρνητικό, επομένως το έργο προκύπτει και πάλι θετικό.

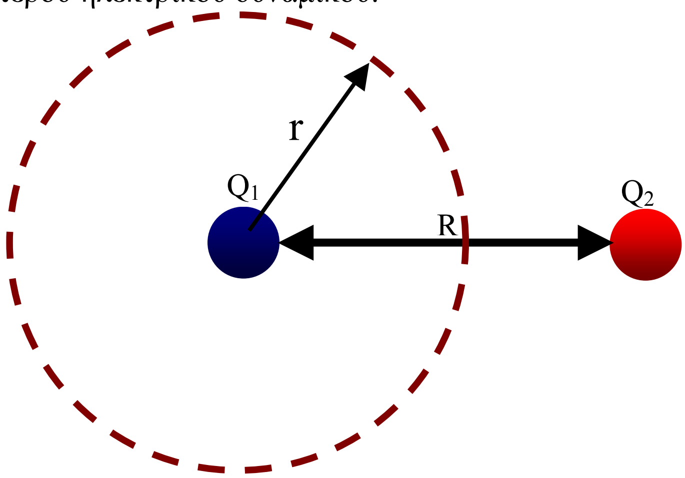
$$W_{A-B}=U_A-U_B=qE(AB)>0\Rightarrow U_A-U_B>0\Rightarrow U_A>U_B$$

Άρα και το αρνητικό φορτίο κινείται από θέσεις υψηλότερης σε θέσεις χαμηλότερης ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας.

Αλλά: $U_A>U_B\Rightarrow \frac{U_A}{q}<\frac{U_B}{q}\Rightarrow V_A<V_B$

γιατί διαιρούμε με το ηλεκτρικό φορτίο το οποίο είναι αρνητικό.
Επομένως το αρνητικό φορτίο κινείται από θέσεις χαμηλότερου σε θέσεις υψηλότερου ηλεκτρικού δυναμικού.

Β)



Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss έχουμε:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enclosed}}{\varepsilon_o}$ Άρα η ηλεκτρική ροή που διαπερνά την σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r=0.5m ισούται με το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια προς την ηλεκτρική σταθερά του κενού ε_o.

Επομένως: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\varepsilon_o} = 1.13 \times 10^{11}\,W$

Εάν η σφαιρική επιφάνεια έχει ακτίνα r=0.7m τότε πάλι το φορτίο που περικλείεται από αυτήν είναι το Q_1 και η ηλεκτρική ροή παραμένει η ίδια.

Τέλος όταν r=1.2m τότε έχουμε:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enclosed}}{\varepsilon_o} = \frac{Q_1 - Q_2}{\varepsilon_o} = 0$. Επομένως η ηλεκτρική ροή είναι μηδέν διότι η σφαιρική επιφάνεια περικλείει δύο ίσα και αντίθετα ηλεκτρικά φορτία. Το συνολικό «καθαρό» ηλεκτρικό φορτίο είναι μηδέν.

Άσκηση 2. (10 μονάδες)

Α) Μικρή σφαίρα μάζας 3 gr κρεμιέται από ακλόνητο σημείο με αβαρές μη αγώγιμο νήμα μεταξύ δύο κατακόρυφων παραλλήλων πλακών απείρων διαστάσεων που απέχουν 5 cm μεταξύ τους. Η σφαίρα φέρει φορτίο 6 μC. Πόση διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών θα αναγκάσει το νήμα να σχηματίσει γωνία 30^o με την κατακόρυφο;

Β) Σημειακό φορτίο $q_1 = +\,6$ μC κρατείται ακίνητο στην αρχή των αξόνων. Δεύτερο σημειακό φορτίο $q_2 = +\,2.5$ μC βάλλεται προς το q_1 κινούμενο πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο φορτία. Ὅταν τα φορτία είναι σε απόσταση 0.8 m το q_2 κινείται προς το q_1 με ταχύτητα 22 m/s .

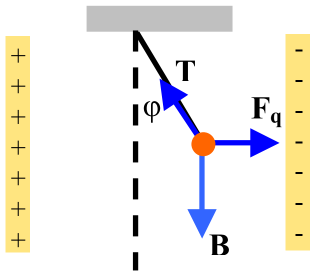
α) Ποια είναι η ταχύτητα του q_2 όταν τα φορτία είναι σε απόσταση 0.5 m;

β) Πόσο κοντά πλησιάζουν τα δύο φορτία;

(Τα φορτία έχουν ίσες μάζες m=1 gr, αγνοήστε τη βαρύτητα).

ΛΥΣΗ

Α)



Για να ισορροπεί το φορτίο q πρέπει να ισχύει:

$\vec{T} + \vec{B} + \vec{F_q} = 0$ όπου Τ η τάση του νήματος, Β το βάρος της σφαίρας και F_q η ηλεκτρική δύναμη.

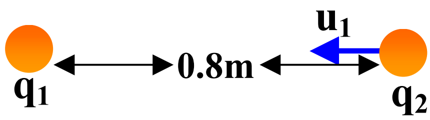
Για ισορροπία στους άξονες x,y, από το σχήμα προκύπτει:

$T \sin\phi = F$, $T\cos\phi = B$ οπότε: $\varepsilon\phi\phi = \frac{F_q}{B}$

Εάν V είναι η διαφορά δυναμικού και l η απόσταση μεταξύ των πλακών τότε έχουμε:

$F_q = qE = q\frac{V}{l}$. Επομένως: $\varepsilon\phi\varphi = \frac{F_q}{B} = \frac{qV}{mgl} \Rightarrow V = \frac{mgl}{q}\varepsilon\phi\varphi = 142V$

B)

α) 

Το ηλεκτρικό φορτίο q_2 κινείται μέσα στο συντηρητικό ηλεκτροστατικό ηλεκτρικό πεδίο με πηγή παραγωγής το q_1.
Επομένως εάν εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας ανάμεσα στην θέση Α όπου η απόσταση των δύο φορτίων είναι 0.8m και στη θέση Β όπου η απόσταση των φορτίων είναι 0.5m έχουμε:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 \cdot q_2}{r_1} = \frac{1}{2}mu_2^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 \cdot q_2}{r_2}$$

όπου u_1=22m/s, r_1=0.8m και r_2=0.5m. Οπότε βρίσκουμε την ταχύτητα u_2.

$$u_2 = \sqrt{u_1^2 + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 m}\cdot q_1 q_2 \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})} = 16.85 \text{ m/s}$$

β) Η μικρότερη απόσταση μεταξύ τους είναι η απόσταση r_2 στην οποία η ταχύτητα u_2 μηδενίζεται. Οπότε:

$$u_2 = \sqrt{u_1^2 + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 m}\cdot q_1 q_2 \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})} = 0 \Rightarrow r_2 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2m\pi\varepsilon_0 u_1^2}{q_1 q_2}\right)^{-1} = 0.329 \text{ m}$$

Άσκηση 3. (10 μονάδες)
Το ηλεκτρικό δυναμικό V σε κάποια περιοχή του χώρου δίνεται από τη σχέση: $V = ax^2 + ay^2 - 2az^2$ όπου a σταθερά.
α) Να βρείτε μια έκφραση για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου E στην περιοχή αυτή.
Υπόδειξη: Το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό συνδέονται με τη διανυσματική σχέση:
$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$, όπου ο τελεστής $\frac{\partial}{\partial x}$ όταν δράσει σε μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών f(x,y,z,…) επιστρέφει την παράγωγο της συνάρτησης ως προς x θεωρώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές. (Όμοια για τους τελεστές $\frac{\partial}{\partial y}$ και $\frac{\partial}{\partial z}$ παίρνουμε την παράγωγο ως προς y και z αντίστοιχα)
β) Να υπολογίσετε την σταθερά a αν είναι γνωστό ότι για τη μετακίνηση δοκιμαστικού φορτίου 2 μC από το σημείο (x,y,z)= (0,0,0.1)m μέχρι την αρχή των αξόνων, παράγεται από το πεδίο έργο -5×10^{-5} J .
γ) Να δείξετε ότι σε κάθε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο xy οι ισοδυναμικές γραμμές είναι κύκλοι.
δ) Ποια είναι η ακτίνα της ισοδυναμικής γραμμής πάνω σε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο xy με που αντιστοιχεί σε δυναμικό V=5000 V.

ΛΥΣΗ

(α) Σύμφωνα με την υπόδειξη, το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό συνδέονται με τη διανυσματική σχέση:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right),$$

όπου $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις Ox, Oy και Oz.
Από τη συνάρτηση του δυναμικού έχουμε:
$\frac{\partial V}{\partial x} = 2ax, \frac{\partial V}{\partial y} = 2ay, \frac{\partial V}{\partial z} = -4az$, και το πεδίο είναι:

$$\vec{E} = \left(-2ax\,\hat{i} - 2ay\,\hat{j} + 4az\,\hat{k}\right). \qquad (1)$$

(β) Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q είναι $\vec{F} = q\vec{E}$, και το έργο που παράγει η δύναμη για στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{r}$, είναι $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Το φορτίο κινείται από το (0,0, 0.100)→ (0,0,0) άρα κατά τη διεύθυνση Oz, συνεπώς το $d\vec{r} = \hat{k}\,dz$. Ολοκληρώνοντας κατά μήκος του δρόμου βρίσκουμε το έργο:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\vec{E}\cdot\hat{k}\,dz = q\left(-2ax\,\hat{i} - 2ay\,\hat{j} + 4az\,\hat{k}\right)\hat{k}\,dz = 4qazdz$$

και

$$W = \int_{z_0}^{z_1} 4qazdz = 2qaz^2\Big|_{z_0}^{z_1} = 2qa\left(z_1^2 - z_0^2\right),$$

όπου z_0= 0.100 m και z_1= 0 m.
Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς *α* έχουμε:

$$a = \frac{W}{2q\left(z_1^2 - z_0^2\right)} = \frac{-5,00\times10^{-5}J}{2\left(2,00\times10^{-6}C\right)\left(-0,01m^2\right)} = 1,25\times10^3\,\frac{V}{m^2}.$$

.

(γ) Σε κάθε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο *x*, *y* το *z* παραμένει σταθερό. Έστω λοιπόν ότι για τυχαίο επίπεδο είναι *z* = *β* και ότι *V*= σταθερό. Τότε:

$$V = ax^2 + ay^2 - 2a\beta^2 \qquad \text{ή} \qquad ax^2 + ay^2 = V + 2a\beta^2.$$

Άρα,

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad \text{όπου} \qquad R^2 = \frac{V}{a} + 2\beta^2. \qquad (2)$$

Επομένως, η καμπύλη σταθερού δυναμικού, *V*, είναι κύκλος ακτίνας *R*.
(δ) Από τη (2) λύνοντας ως προς *R* βρίσκουμε:
$R = \sqrt{\frac{V}{a} + 2\beta^2}$ και αντικαθιστώντας *R* = 2,83 m.

Άσκηση 4. (10 μονάδες)

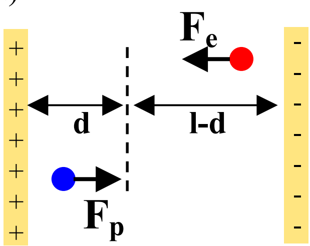
Δύο φορτισμένες επίπεδες πλάκες βρίσκονται σε διαφορά δυναμικού 1200 V και απέχουν μεταξύ τους 4 cm . Ένα ηλεκτρόνιο αποσπάται από την αρνητική πλάκα ταυτόχρονα με πρωτόνιο που αποσπάται από τη θετική πλάκα.
α) Σε πόση απόσταση από τη θετική πλάκα θα συναντηθούν;
β) Ποιος είναι ο λόγος των ταχυτήτων τους πριν χτυπήσουν τις αντίθετες πλάκες;

γ) Ποιος είναι ο λόγος των κινητικών ενεργειών ακριβώς πριν χτυπήσουν τις αντίθετες πλάκες; (Αγνοήστε την αλληλεπίδραση μεταξύ των φορτίων και το πεδίο της βαρύτητας).

Δίνονται: μάζα ηλεκτρονίου και μάζα πρωτονίου $m_e = 9.10 \times 10^{-31}\,Kg$, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\,Kg$

ΛΥΣΗ

α)



Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των πλακών είναι ομογενές και το μέτρο του είναι: $E = \dfrac{V}{l}$ όπου l είναι η απόσταση μεταξύ των δύο πλακών και V είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους. Το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο δέχονται τη δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο:

$$F_e = q_e E = q_e \frac{V}{l} \quad (1) \qquad \text{και} \qquad F_p = q_p E = q_p \frac{V}{l} \quad (2)$$

Έστω ότι θα συναντηθούν στη θέση της διακεκομμένης γραμμής. Τότε το πρωτόνιο έχει διατρέξει απόσταση d και το ηλεκτρόνιο απόσταση l-d.
Η κίνηση την οποία εκτελούν είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη οπότε:

$$d = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_p}{m_p}\cdot t^2 \quad (3) \qquad \text{και} \qquad l - d = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_e}{m_e}\cdot t^2 \quad (4)$$

Διαιρούμε τις (3) και (4) κατά μέλη και έχουμε: $\dfrac{d}{l-d} = \dfrac{F_p m_e}{F_e m_p}$ και λαμβάνοντας υπόψη τις (1) και (2) έχουμε: $\dfrac{d}{l-d} = \dfrac{q_p m_e}{q_e m_p} \Rightarrow d = l\cdot\dfrac{1}{1 + m_p/m_e} = 2.18\times10^{-5}\,m$

β) Το έργο που παράγει η ηλεκτρική δύναμη ισούται με την κινητική ενέργεια κάθε ενός σωματίου ελάχιστα πριν κτυπήσει την πλάκα. Οπότε;

$$\frac{1}{2} m_e u_e^2 = q_e E l \quad (5) \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{2} m_p u_p^2 = q_p E l \quad (6)$$

Διαιρώντας τις (5) και (6) έχουμε:

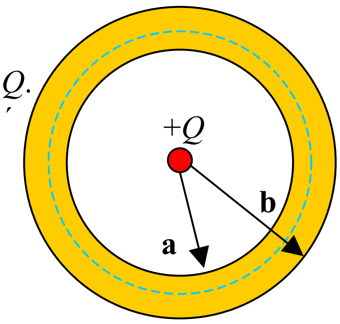
$$\frac{u_e}{u_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}\cdot\frac{q_e}{q_p}} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 42.9$$

γ) Από τις (5) και (6)μ έχουμε: $\dfrac{\frac{1}{2}m_e u_e^2}{\frac{1}{2}m_p u_p^2} = \dfrac{q_e}{q_p} = 1 \Rightarrow \dfrac{K_e}{K_p} = 1$

Άσκηση 5. (10 μονάδες)

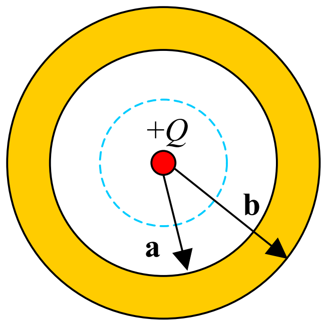
Αγώγιμος μονωμένος σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα *α* και εξωτερική ακτίνα *b* έχει θετικό φορτίο *Q* τοποθετημένο στο κέντρο του. Το ολικό φορτίο πάνω στο φλοιό είναι, συνολικά, -3 *Q*. (α) Πως κατανέμονται τα φορτία στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια του αγώγιμου φλοιού; (β) Βρείτε εκφράσεις για το ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσει της απόστασης *r* από το κέντρο της σφαίρας για τις περιοχές $r<a$, $a<r<b$ και $r>b$.

ΛΥΣΗ



(α) Στο κέντρο του σφαιρικού φλοιού βρίσκεται φορτίο *Q*. Επομένως θα πρέπει εμφανίζεται εξ επαγωγής φορτίο *Q΄* στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού.
Για να υπολογίσουμε το *Q΄* θεωρούμε μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια στο εσωτερικό του φλοιού, η οποία παριστάνεται με τη διακεκομμένη γραμμή του διπλανού σχήματος:
Επειδή η ένταση Ε στο εσωτερικό του φλοιού είναι μηδέν η γκαουσιανή αυτή επιφάνεια πρέπει να περικλείει επίσης συνολικό φορτίο ίσο με το μηδέν. Περικλείει όμως ήδη το φορτίο +*Q*. Επομένως στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού εμφανίζεται φορτίο –*Q*. Το συνολικό φορτίο του φλοιού είναι –*3Q*. Άρα στην εξωτερική επιφάνεια του φλοιού εμφανίζεται φορτίο –2*Q* ώστε το άθροισμα των ηλεκτρικών φορτίων εσωτερικής και εξωτερικής επιφάνειας να ισούται με το συνολικό φορτίο του φλοιού.
β) $r<a$: Θεωρούμε μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα με διακεκομμένη γραμμή και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss σε αυτή.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$



$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\ r<\alpha$$

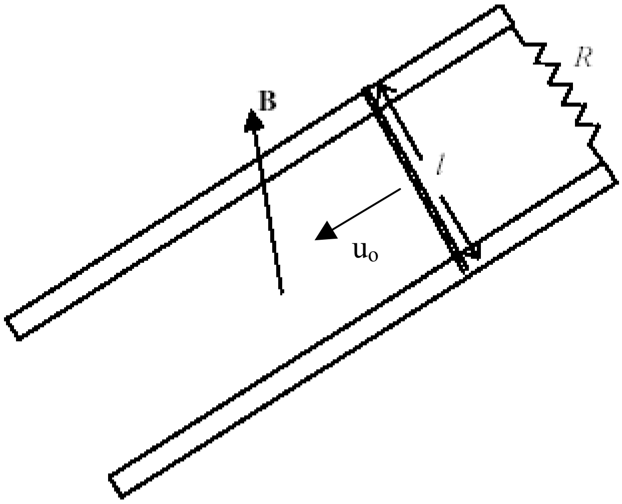
με κατεύθυνση $\hat{r}$.

$a<r<b$: Επειδή ο σφαιρικός φλοιός είναι αγώγιμος το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι μηδέν.
$r>b$: Θεωρώντας μια γκαουσιανή σφαιρική ομόκεντρη επιφάνεια είναι εύκολο να δείξουμε, όπως στην περίπτωση $r<a$ ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο:

$E = \dfrac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $r > b$ με κατεύθυνση $-\hat{r}$.

Άσκηση 6. (10 μονάδες)

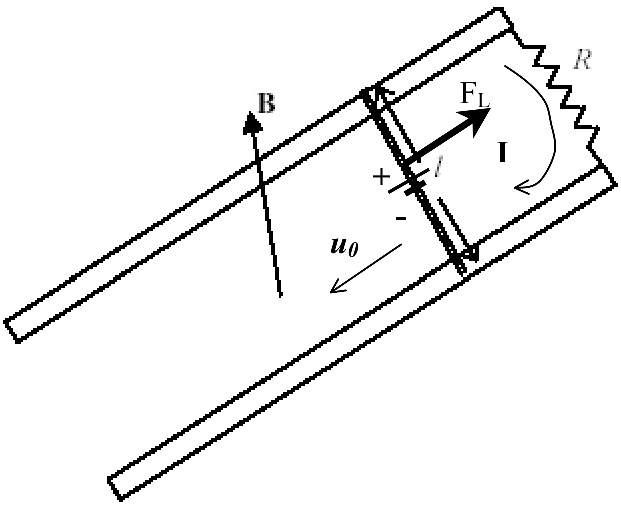
Μία ηλεκτρική αντίσταση R_1= 5Ω, συνδέεται με δύο μεταλλικούς αγωγούς μηδενικής αντίστασης πολύ μεγάλου μήκους. Μεταλλική ράβδος μήκους l=1 m , μάζας m= 1 Kg και αντίστασης R_2 = 10Ω τοποθετείται κάθετα στους μεταλλικούς αγωγούς, όπως δείχνει το σχήμα. Το κύκλωμα τοποθετείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B = 0.5T με διεύθυνση της μαγνητικής επαγωγής B κάθετα στο επίπεδο που σχηματίζουν οι παράλληλοι αγωγοί και φορά που εμφανίζεται στο σχήμα. Προσδίδουμε στη ράβδο αρχική ταχύτητα u_0 = 10 m/s και την αφήνουμε να κινηθεί ελεύθερα μέσα στο μαγνητικό πεδίο ευρισκόμενη πάντα σε επαφή με τους μεταλλικούς αγωγούς. Αν ανάμεσα στη ράβδο και τους αγωγούς δεν υπάρχουν τριβές να βρεθούν:



α) Η έκφραση της ταχύτητας u συναρτήσει του χρόνου.
β) Η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t=2 sec.
γ) Ποια χρονική στιγμή θα σταματήσει η ράβδος;

ΛΥΣΗ

Α) Εφόσον η μεταλλική ράβδος κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο καθίσταται, σύμφωνα με το φαινόμενο της μαγνητικής επαγωγής έδρα ηλεκτρεργετικής δύναμης.



Η ηλεκτρεργετική δύναμη έχει τιμή:

$$V = Bul$$

όπου B η μαγνητική επαγωγή, u η ταχύτητα του αγωγού και l το μήκος της μεταλλικής ράβδου.

Τώρα το κύκλωμα που αποτελείται από τη μεταλλική ράβδο , τους δύο μεταλλικούς αγωγούς και την αντίσταση αρχίζει να διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα I.
Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος I είναι:

$$I = \frac{Bul}{R_{ολ}}$$

όπου $R_{ολ}$ είναι το άθροισμα της αντίστασης της ράβδου και της εξωτερικής αντίστασης.
Αλλά τώρα η μεταλλική ράβδος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα εντάσεως I και βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Επομένως πάνω της εξασκείται δύναμη Laplace η οποία αντιτίθεται στην κίνηση της ράβδου. Επομένως

$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ ή, επειδή l και B κάθετα $F = B \cdot I \cdot l = \frac{B^2 l^2 u}{R_{ολ}}$

Άρα: $F = -m\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{B^2 l^2 u}{R_{ολ}} = -m\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{B^2 l^2}{R_{ολ} m} dt$

Λύνουμε την διαφορική εξίσωση με την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών οπότε:

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u} = -\int_0^t \frac{B^2 l^2}{R_{ολ} m} dt \Rightarrow \ln\frac{u}{u_0} = -\frac{B^2 l^2}{R_{ολ} m} t \Rightarrow u = u_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{R_{ολ} m} t} \qquad (1)$$

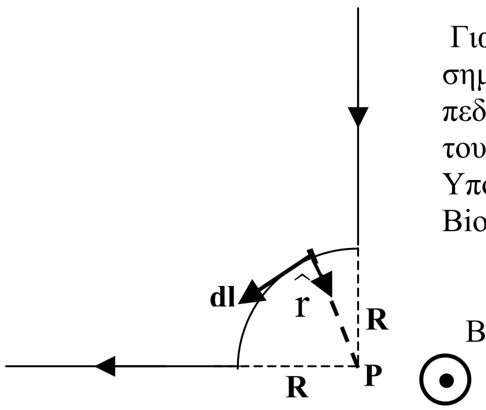
Β) Βρίσκουμε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t=2s θέτοντας τα μεγέθη στην προηγούμενη σχέση. Προκύπτει **u=9.05m/s** .

Γ) Από την σχέση (1) προκύπτει ότι πρέπει να περάσει άπειρος χρόνος μέχρι να σταματήσει η μεταλλική ράβδος.

Άσκηση 7. (10 μονάδες)

Το σύρμα του σχήματος διαρρέεται από ρεύμα *I*. Το σύρμα αποτελείται από ένα κατακόρυφο τμήμα πολύ μεγάλου μήκους, ένα τεταρτημόριο περιφέρειας κύκλου ακτίνας *R* και από ένα δεύτερο οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα μεγάλου μήκους. Να υπολογίσετε το ολικό μαγνητικό πεδίο στο κέντρο καμπυλότητας του τεταρτημορίου (σημείο P στο σχήμα).

ΛΥΣΗ



Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P αρκεί να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν τα δύο ευθύγραμμα μέρη του αγωγού καθώς και το κυκλικό μέρος του. Υπολογίζουμε το B κάθε τμήματος με τον νόμο Biot-Savart.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} x \hat{r}}{r^2}$$

Όπου dl είναι το διάνυσμα που περιγράφει ένα στοιχειώδες τμήμα του αγωγού και $\hat{r}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην ευθεία που ενώνει το στοιχειώδες τμήμα dl του αγωγού με το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το B.

Είναι φανερό ότι τα δύο ευθύγραμμα τμήματα του αγωγού δεν παράγουν μαγνητικό πεδίο στο P διότι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα dl και r είναι μηδέν μοίρες. Επομένως το εξωτερικό γινόμενο του νόμου Biot-Savart είναι μηδέν.
Άρα μόνο το τεταρτοκύκλιο παράγει μαγνητικό πεδίο.

Έχουμε: $d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} x \hat{r}}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{R^2}$

Γιατί τα διανύσματα dl και $\hat{r}$ σχηματίζουν γωνία 90^o και r=R. Η διεύθυνση και η φορά του B καθορίζεται από τη φορά του εξωτερικού γινομένου και εμφανίζεται στο σχήμα.

Επομένως:

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{R^2} \Rightarrow \int dB = \int \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \int dl \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot \frac{\pi R}{2} \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{8R}$$

Άσκηση 8. (10 μονάδες)

Σε μία σφαιρική κατανομή φορτίου, η πυκνότητα φορτίου δίνεται από τις σχέσεις:

$\rho = \rho_o (1 - r/R) \qquad r \leq R$

$\rho = 0 \qquad r > R$

όπου $\rho_o = 3Q/\pi R^3$ και *Q* και *R* είναι σταθερές.
Να δείξετε ότι:
α) Το ολικό φορτίο που περιέχεται σ' αυτή την κατανομή φορτίου είναι *Q*.
β) Στην περιοχή $r > R$, το ηλεκτρικό πεδίο είναι το ίδιο με αυτό που παράγεται από ένα σημειακό φορτίο *Q* τοποθετημένο στη θέση *r*=0 (αρχή των αξόνων).
γ) Να βρείτε μια έκφραση για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή $r \leq R$.
δ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξατε στα υποερωτήματα β) και γ) για την ειδική θέση r=R.

ΛΥΣΗ

(α) Το ολικό φορτίο που περιέχεται στην κατανομή φορτίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\text{ολικό φορτίο} = \int_V \rho dV ,$$

δηλαδή ολοκληρώνοντας την πυκνότητα φορτίου σε όλο τον όγκο της σφαίρας.
Επειδή η κατανομή φορτίου παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως στοιχείο όγκου *dV* το στοιχειώδη όγκο μεταξύ δύο σφαιρικών επιφανειών ακτίνων *r* και *r + dr*. Ο όγκος αυτός ισούται με το εμβαδόν $4\pi r^2$ της μίας σφαιρικής επιφάνειας επί το πάχος *dr* του φλοιού, δηλαδή:

$$dV = 4\pi r^2 \, dr$$

(Αυτή η έκφραση προκύπτει και αν διαφορίσουμε τον όγκο της σφαίρας, $V = 4\pi r^3 /3$).
Έτσι προκύπτει ότι:

$$\text{ολικό φορτίο} = \int_{r=0}^{r=R} \rho_0 \left(1-\frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr$$

$$= 4\pi\rho_0 \int_0^R r^2 dr - \frac{4\pi\rho_0}{R}\int_0^R r^3 dr = 4\pi\rho_0 \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R - \frac{4\pi\rho_0}{R}\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R .$$

$$= 4\pi\rho_0 \frac{R^3}{3} - \pi\rho_0 R^3 = \frac{\pi\rho_0 R^3}{3}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του ρ_0, βρίσκουμε ότι:

ολικό φορτίο = Q.

(β) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή θα υπολογιστεί εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για μια ομόκεντρη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r \geq R$:

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\ r \geq R .$$

Η έκφραση αυτή είναι όπως για το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από σημειακό φορτίο Q που βρίσκεται στο κέντρο της κατανομής.

(γ) Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή $r \leq R$ θα υπολογιστεί εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για μια ομόκεντρη σφαιρική επιφάνεια S' ακτίνας $r \leq R$:

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q'}{\varepsilon_0},$$

όπου Q' είναι ίσο προς

$Q' = \int_{V'} \rho dV',\ V' =$ όγκος που περικλύεται από την S'.

Χρησιμοποιούμε ως στοιχείο όγκου $dV' = 4\pi r'^2 dr'$.

$$Q' = \rho_0 \int_0^r \left(1-\frac{r'}{R}\right) 4\pi r'^2 dr' = \frac{12\pi Q}{\pi R^3}\left[\left(1-\frac{r}{R}\right) r^2 dr\right] = \frac{12\pi Q}{\pi R^3}\left(\int_0^r r'^2 dr' - \int_0^r \frac{r'^3}{R} dr'\right).$$
$$= \frac{12\pi Q}{\pi R^3}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{R^4}{4R}\right) = Q\left(\frac{r^3}{R^3}\right)\left(4 - \frac{3r}{R}\right)$$

Επομένως,

$$E = \frac{Q\left(\frac{r^3}{R^3}\right)\left(4-\frac{3r}{R}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(4-\frac{3r}{R}\right),\ r \leq R$$

και τελικά

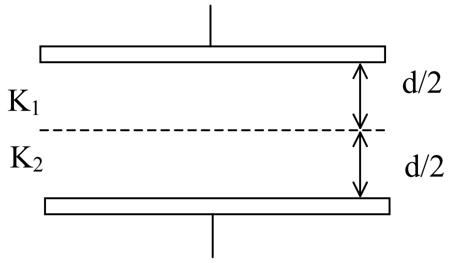
$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(4-\frac{3r}{R}\right),\ r \leq R .$$

(δ) Αντικαθιστώντας r=R στις τελικές εκφράσεις του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου των υπο ερωτημάτων (β) και (γ) προκύπτει το ίδιο μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου για την επιφάνεια της σφαίρας : $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2},\ r = R$

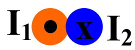
Άσκηση 9. (10 μονάδες)

Α) Ο χώρος μεταξύ των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή γεμίζεται με δύο πλάκες διηλεκτρικού, μία με σχετική διηλεκτρική σταθερά K_1 και μία με διηλεκτρική σταθερά K_2. Κάθε πλάκα έχει πάχος *d*/2, όπου *d* η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. Να δείξετε ότι η χωρητικότητα είναι:

$$C = \frac{2\varepsilon_o A}{d}\left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right)$$



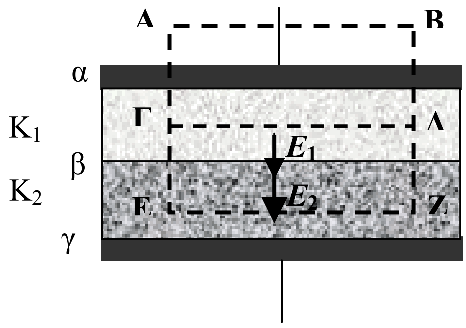
Β)Δίδονται δύο ευθύγραμμοι ρευματοφόροι αγωγοί πολύ μεγάλου μήκους και αμελητέου πάχους. Οι αγωγοί βρίσκονται πολύ κοντά ο ένας με τον άλλο και διαρρέονται από ηλεκτρικά ρεύματα εντάσεων I_1=2A και I_2=1A αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Να ευρεθεί το μαγνητικό πεδίο B σε σημείο το οποίο απέχει απόσταση r=1m από τους αγωγούς. Δίδεται το $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\, W/A \cdot m$



ΛΥΣΗ

Α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει επιφανειακό φορτίο πυκνότητας *σ* στην επάνω πλάκα του πυκνωτή και –*σ* στην κάτω. Θεωρούμε σαν γκαουσιανές επιφάνειες τις ΑΒΔΓ και ΑΒΖΕ (ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με βάσεις εμβαδού A_1) όπως στο σχήμα. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss βρίσκουμε:

$$K_1 E_1 A_1 = \frac{\sigma A_1}{\varepsilon_0} \text{ και } K_2 E_2 A_1 = \frac{\sigma A_1}{\varepsilon_0}$$



Επομένως $E_1 = \dfrac{\sigma}{K_1 \varepsilon_0}$ και $E_2 = \dfrac{\sigma}{K_2 \varepsilon_0}$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι:

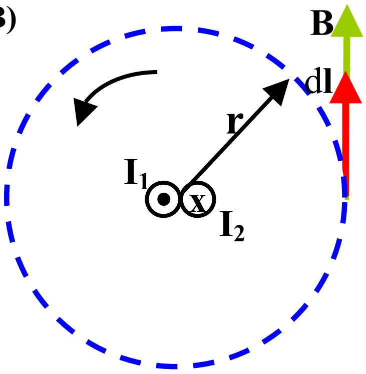
$$\int_{\alpha\beta\gamma} E \cdot dl = \int_{\alpha\beta} E \cdot dl + \int_{\beta\gamma} E \cdot dl = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = V$$

αντικαθιστώντας:

$\dfrac{\sigma d}{2K_1 \varepsilon_0} + \dfrac{\sigma d}{2K_2 \varepsilon_0} = V$. Το φορτίο του πυκνωτή θα είναι: $Q = \sigma A$ και επομένως $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{2\varepsilon_0 \sigma A}{\sigma d\left(\dfrac{1}{K_1} + \dfrac{1}{K_2}\right)} = \dfrac{2\varepsilon_0 A}{d} \dfrac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα αυτό συμπίπτει με τη θεώρηση δύο πυκνωτών συνδεδεμένων σε σειρά.

B)



Το μαγνητικό πεδίο που παράγεται στο χώρο έχει κυλινδρική συμμετρία επομένως θεωρούμε κλειστή διαδρομή έναν κύκλο με κέντρο ένα σημείο των αγωγών και ακτίνα r σε επίπεδο κάθετο στους αγωγούς. Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere για αυτή την κλειστή διαδρομή.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o I$$

Έστω ότι κινούμαστε στην κλειστή διαδρομή με φορά αυτή που σημειώνεται στο σχήμα.

Τότε τα διανύσματα dl και B είναι συγγραμικά και ομόρροπα. Οπότε από τον νόμο του Ampere έχουμε:

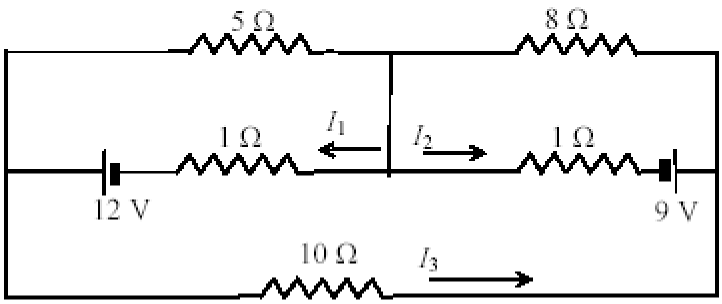
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o I \Rightarrow \oint B\cdot dl = \mu_o (I_1 - I_2) \Rightarrow B\oint dl = \mu_o (I_1 - I_2) \Rightarrow$$

$$B2\pi r = \mu_o (I_1 - I_2) \Rightarrow B = \frac{\mu_o (I_1 - I_2)}{2\pi r}$$

Αντικαθιστώντας, $B = \dfrac{4\pi \times 10^{-7}(2-1)}{2\pi \cdot 1}\dfrac{Wb}{m^2} = 2\times 10^{-7}\,\mathrm{T}$

Άσκηση 10. (10 μονάδες)

Α) Υπολογίστε τα τρία ρεύματα που σημειώνονται στο διάγραμμα του κυκλώματος στο παρακάτω σχήμα:



Β) Η μαγνητική επαγωγή *B* μαγνητικού πεδίου μέσα σε μακρύ ευθύγραμμο πηνίο ακτίνας *R*, αυξάνει με ρυθμό $\dfrac{dB}{dt} = \text{σταθ.}$

Να βρείτε:

α) Το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής μέσα σε κύκλο ακτίνας $r_1 < R$ τοποθετημένου εντός του πηνίου, κάθετα στον άξονά του και με το κέντρο του πάνω στον άξονα του πηνίου.

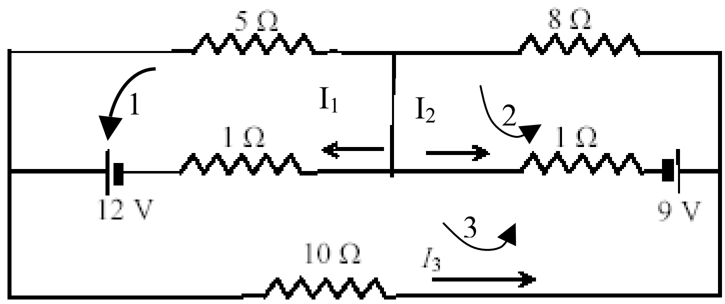
β) Το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου σε απόσταση $r_1 < R$ από τον άξονά του.

γ) Το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του πηνίου σε απόσταση $r_2 > R$ από τον άξονά του.

δ) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει της απόστασης από τον άξονά του από r=0 έως $r=2R$.

ΛΥΣΗ

Α)



Έχει γίνει χρήση του κανόνα των ρευμάτων του Kirchhoff και έχουν σημειωθεί τα ρεύματα των κλάδων συναρτήσει των I_1, I_2, I_3. Στους ενδιάμεσους υπολογισμούς τα σύμβολα και οι αριθμοί παριστάνουν αριθμητικές τιμές στο *SI*.

Από τον κανόνα των βρόχων για το βρόχο 1 βρίσκουμε:

$-12{,}00 + I_1 \times 1{,}00 + (I_1 - I_3)\, 5{,}00=0$

ή $\quad 6{,}00 \times I_1 - 5{,}00 \times I_3 = 12{,}00$ (1)

Από το βρόχο 2 έχουμε:

$- I_2 \times 1{,}00 + 9{,}00 - (I_2 + I_3) \times 8{,}00=0$

ή $\quad 9{,}00 \times I_2 + 8{,}00 \times I_3 = 9{,}00$ (2)

Από το βρόχο 3 βρίσκουμε,

$-I_3 \times 10{,}00 - 9{,}00 + I_2 \times 1{,}00 - I_1 \times 1{,}00 + 12{,}00=0$

ή $\quad -1{,}00 \times I_2 + 1{,}00 \times I_1 + 10{,}00 \times I_3 = 3{,}00$ (3)

Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$I_1 = 2{,}00 + \frac{5}{6} I_3$$

Από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$I_2 = 1{,}00 - \frac{8}{9} I_3$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3)

$$-\left(1{,}00 - \frac{8}{9} I_3\right) \times 1{,}00 + \left(2{,}00 + \frac{5}{6} I_3\right) \times 1{,}00 + 10{,}00 \times I_3 = 3{,}00$$

Άρα

$$\frac{16+15+180}{18} \times I_3 = 2{,}00 \quad \text{ή} \quad \frac{211}{18} I_3 = 2{,}00 .$$

Άρα I_3 = 0,171 A.

Επίσης $I_1 = 2,00 + \frac{5}{6} I_3 = 2,00 + \frac{5}{6} \times 0,171 = 2,14\text{A}$

Όμως $I_2 = 1,00 - \frac{8}{9} I_3 = 1,00 - \frac{8}{9} \times 0,171 = 0,848\text{A}$.

Β) Θεωρούμε τον άξονα του πηνίου παράλληλο στον άξονα z. Το μαγνητικό πεδίο μέσα στο μακρύ και ευθύγραμμο πηνίο είναι παράλληλο στον άξονά του. Υποθέτουμε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα που το διαπερνά είναι αριστερόστροφο. Τότε το μαγνητικό πεδίο μέσα στο πηνίο είναι $\vec{B} = B\hat{z}$.
Η επιφάνεια της διατομής του πηνίου δίνεται από το διάνυσμα $\vec{A} = \pi R^2 \hat{z}$.
(α) Ο κύκλος με ακτίνα *r*, σε επίπεδο κάθετο στον άξονα με κέντρο σημείο του άξονα έχει επιφάνεια που δίνεται από το διάνυσμα $\vec{a} = \pi r_1^2 \hat{z}$. Η ροή του $\vec{B}$ μέσα από αυτό τον κύκλο είναι $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{a} = Ba$. Ο ρυθμός μεταβολής της Φ_B είναι:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(Ba) = a\frac{dB}{dt} = \pi r_1^2 \frac{dB}{dt} \qquad (1)$$

(β) Η ΗΕΔ που επάγεται στον κύκλο με ακτίνα *r* είναι :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi r_1^2 \frac{dB}{dt} \qquad (2)$$

Το $\frac{dB}{dt}$ είναι θετικό και άρα $\mathcal{E} < 0$. Η ΗΕΔ δίνεται επίσης από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\mathcal{E} = -\oint \vec{E}(r_1) \cdot d\vec{\ell} \qquad (3)$$

Το $\vec{E}(r_1)$ έχει το ίδιο μέτρο σε κάθε σημείο της περιφέρειας του κύκλου λόγω αξονικής συμμετρίας. Η φορά του $d\vec{\ell}$ επιλέγεται να είναι αριστερόστροφη σύμφωνα με τη σύμβαση για θετική ροή. Τότε:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}(r_1) \cdot d\vec{\ell} = E(r_1) 2\pi r_1 \qquad (4).$$

Εξισώνοντας τις (2) και (4) προκύπτει $E(r_1) = -\frac{r_1}{2}\frac{dB}{dt}$.

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η φορά του $\vec{E}(\vec{r}_1)$ είναι αντίστροφη εκείνης του $d\vec{\ell}$. Άρα το $\vec{E}(\vec{r}_1)$ είναι δεξιόστροφο.
(γ) Στο εξωτερικό του πηνίου, $r_2 > R$. Το μαγνητικό πεδίο όμως είναι μηδενικό για $R<r<r_2$ και άρα η ροή του μαγνητικού πεδίου από κύκλο με ακτίνα $r_2 > R$ είναι: $\Phi_B = B\pi R^2$. Τότε η ΗΕΔ δίνεται από τις σχέσεις:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \qquad (7)$$

και

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}(r_2) \cdot d\vec{\ell} = E(r_2) 2\pi r_2 \qquad (8)$$

Εξισώνοντας τις (7) και (8) προκύπτει $E\left(r_2\right)=-\frac{R^2}{2r_2}\frac{dB}{dt}$. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει και πάλι ότι $\vec{E}\left(\vec{r}_2\right)$ είναι δεξιόστροφο.

(γ) Η γραφική παράσταση δίνεται παρακάτω: