1η Εργασία 2005-2006

(Καταληκτική ημερομηνία αποστολής 15/11/2005)

Άσκηση 1 (10 μονάδες).

(α) Δείξτε αλγεβρικά πώς βρίσκονται δύο διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$, εάν είναι γνωστά το άθροισμά τους $\vec{S}$ και η διαφορά τους $\vec{D}$

(β) Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα της συνισταμένης των διανυσμάτων

$\vec{r}_1 = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ και $\vec{r}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

(γ). Δείξτε ότι οι διαγώνιοι ενός ρόμβου είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Άσκηση 2 (10 μονάδες).

(α) Αποδείξτε ότι σε ένα τρίγωνο ισχύει

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως ο Νόμος των Ημιτόνων για Τρίγωνα.

(β) Προσδιορίστε τις γωνίες α , β και γ τις οποίες σχηματίζει ένα διάνυσμα $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ με τις θετικές κατευθύνσεις των αξόνων σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και δείξτε ότι $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Άσκηση 3 (10 μονάδες).

(α) Βρείτε την οξεία γωνία μεταξύ των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου με κορυφές O(0,0,0), A(3,2,0), B(4,6,0), C(1,3,0).

Υπόδειξη: Να γίνει αρχικά το σχήμα.

(β). Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ και $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$. Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο των δύο διανυσμάτων.

Άσκηση 4 (10 μονάδες).

(α)

I. Εάν $|\vec{A}| = 3, |\vec{B}| = 4, |\vec{C}| = 5$ και $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ τι μπορεί να λεχθεί για τα διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$;

II. Εάν $\overrightarrow{A}$ και $\overrightarrow{B}$ είναι διανύσματα που έχουν αρχή το σημείο Ο προς τα σημεία Α και Β αντίστοιχα και Ρ είναι το μέσο του διανύσματος $\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A}$, βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$

(β) Αποδείξτε ότι δύο διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, εάν το άθροισμά τους και η διαφορά τους είναι διανύσματα κάθετα μεταξύ τους.

(γ) Δίνεται ότι $\left|\vec{A}\right|=\left|\vec{B}\right|=\left|\vec{C}\right|$ και $\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{C}=-2$. Να δειχθεί ότι $\vec{A}=\vec{C}$ και τα διανύσματα $\vec{B}$ και $\vec{C}$ είναι αντιπαράλληλα.

Άσκηση 5 (10 μονάδες).

Εάν $\vec{r}_1=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{r}_2=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{r}_3=-2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ και $\vec{r}_4=3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ υπολογίστε τα *a, b* και *c* ώστε να ισχύει $\vec{r}_4=a\vec{r}_1+b\vec{r}_2+c\vec{r}_3$

Άσκηση 6 (10 μονάδες).

α) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τετραγωνικοί πίνακες X και Y που επαληθεύουν τις ισότητες:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} \text{ και } Y\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

β) Να υπολογιστεί επαγωγικά η ν-οστή δύναμη του πίνακα $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\alpha & b\\ 0 & \frac{1}{a}\end{bmatrix}$ όπου $a,b\in R$ και α≠0

γ) Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix}$.

1. Να βρεθεί ο πίνακας $B=A-\lambda I_3$ όπου $\lambda\in R$ και να βρεθούν οι τιμές του λ που επαληθεύουν την εξίσωση $\det(B)=0$. Οι τιμές αυτές λέγονται ιδιοτιμές του πίνακα Α
2. Για κάθε ιδιοτιμή του πίνακα Α (λ_i) να βρεθεί ο 1x3 πίνακας X_i που ικανοποιεί την εξίσωση $(A^T-\lambda_i I_3)X_i^T=0$. Οι πίνακες X_i ονομάζονται ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α.
3. Υπολογίστε τον πίνακα PAP^{-1} όπου P ο 3x3 πίνακας που έχει ως γραμμές τους πίνακες X_i δηλαδή $P=\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}$

4. Υπολογίστε το πίνακα A^{ν} όπου $\nu \in N^{*}$

Άσκηση 7 (10 μονάδες).

α) Να λυθούν τα συστήματα

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y-z & = & 4 \\ 3x+4y-2z & = & 11 \\ 3x-2y+4z & = & 11 \end{array}\right\}$$

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 4 \\ x+y+z & = & 3 \\ x+2y+z & = & 4 \end{array}\right\}$$

β) Να λυθεί και να διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in R$ το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} (\lambda+3)x+y+2z & = & \lambda \\ \lambda x+(\lambda-1)y+z & = & 2\lambda \\ 3(\lambda+1)x+\lambda y+(\lambda+3)z & = & 3 \end{array}$$

γ) Να λυθεί και να διερευνηθεί, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $a,b \in R$, το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} ax+by+z & = & 1 \\ x+aby+z & = & b \\ x+by+az & = & 1 \end{array}$$

Άσκηση 8 (10 μονάδες).

α) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 10x + \lambda^2$ με ρίζες ρ_1, ρ_2. Υπολογίστε το λ.

i) αν οι ρίζες είναι πραγματικές
ii) αν οι ρίζες είναι ίσες
iii) αν οι ρίζες είναι αντίστροφες
iv) αν μία ρίζα είναι κατά 4 μεγαλύτερη από την άλλη
v) αν ισχύει $3\rho_1^2 - 4\rho_1\rho_2 + 3\rho_2^2 = 50$
vi) αν $\rho_1=\lambda$ και τις ρίζες ρ_1, ρ_2
vii) αν $\rho_1^3 + \rho_2^3 - 25(\rho_1 + \rho_2) < 0$

β) Να βρείτε το $\kappa \in R$ ώστε η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\kappa(1-x)^2+(1-\kappa)x^2$$

να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $y=x^2 + (p+1)x + p$. Να καθορίσετε τις τιμές του p για τις οποίες η γραφική της παράσταση

a. εφάπτεται στον άξονα xx’
b. έχει άξονα συμμετρίας τον yy’
c. έχει για κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη –4

Άσκηση 9 (10 μονάδες).

α) Δίνονται οι εξισώσεις

$x^2 - 4\alpha x - 20 = 0$ (1)

$x^2 + 2x - (\alpha + 1) = 0$ (2) με $\alpha \in R$

Να βρείτε το α και τις ρίζες της εξίσωσης (2) αν γνωρίζετε ότι μία ρίζα της (1) είναι ίση με το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της (2).

β) Να δείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ παίρνει θετικές τιμές $\forall x \in R$ και να βρείτε το διάστημα στο οποίο αυτές περιέχονται.

Άσκηση 10 (10 μονάδες)

α) Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R_+$ με τύπο $f(x) = \left||x-2| - 3x\right|$. Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R \to R$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \gamma\iota\alpha \quad x < 0 \\ x + \lambda - 2 & \gamma\iota\alpha \quad x \geq 0 \end{cases}$

I. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in R$, ώστε η f να είναι αντιστρέψιμη
II. Να προσδιοριστεί η αντίστροφη συνάρτηση