$1^{η}$ Εργασία

Ημερομηνία αποστολής: 19 Νοεμβρίου 2006

1. α. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ και $\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

   β. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι ορθογώνια και μοναδιαία.

   $\vec{a} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})/3$

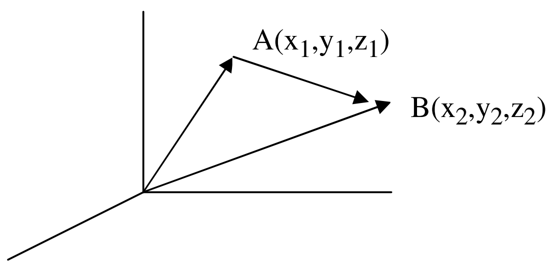
   $\vec{b} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})/3$

   $\vec{c} = (2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})/3$

   γ. Δείξτε ότι αν το άθροισμα και η διαφορά δύο μη μηδενικών διανυσμάτων έχουν το ίδιο μέτρο τότε τα διανύσματα είναι κάθετα και αντιστρόφως.

   (5 μοναδες)

2. α. Να υπολογιστεί το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και οι γωνίες του με τους άξονες x,y,z.



   β. Αποδείξατε ότι το εμβαδόν ενός παραλληλόγραμμου με πλευρές $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι

   $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|$.

   γ. Βρείτε την απόσταση μεταξύ του σημείου P(4,-1,5) και της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία P_1(-1,2,0) και P_2(1,1,4). **(5 μοναδες)**

3. α. Να βρεθεί απόσταση του σημείου P_1 (1, 2, 3) από (α) την αρχή των αξόνων, (β) τον άξονα x, (γ) τον άξονα z, (δ) το επίπεδο xy, (ε) από το σημείο P_2 (3, -1,5).

   β. Να βρεθεί ο όγκος παραλληλεπίπεδου με πλευρές OA, OB, OC όταν A (1,2,3), B (1,1,2), C (2,1,1). **(5 μοναδες)**

4. α. Δύο σωματίδια κινούνται στο πεδίο βαρύτητας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα σωματίδια είχαν ταχύτητες $\vec{V}_{01} = V_{01}\vec{i}$ και $\vec{V}_{02} = -V_{02}\vec{i}$, $V_{01} > 0$ και $V_{02} > 0$ (οριζόντιες και αντίρροπες).

Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων τη στιγμή που τα διανύσματα των ταχυτήτων τους θα είναι κάθετα. Δίνεται το διάνυσμα θέσης κάθε σωματιδίου σαν συνάρτηση του χρόνου $\vec{r} = V_0\, t\, \vec{i} - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \vec{j}$ και το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{V} = V_0\, \vec{i} - gt\, \vec{j}$.

β. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = p(1,1)$ (όπου p πραγματικός). Βρείτε το p ώστε το διάνυσμα $\vec{a}$ να είναι μοναδιαίο καθώς και ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\beta}$ κάθετο στο $\vec{a}$. Κατόπιν αναλύστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (1,0)$ σε συνιστώσες παράλληλες στα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ βρείτε δηλ. τα λ και μ έτσι ώστε $\vec{\gamma} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta}$. **(10 μοναδες)**

5. α. Έχουμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν τα γινόμενα AB, (AB)C, BC, A(BC)

β. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη βοήθεια πινάκων.

$3x + y = 5$
$4x - y = 2$

(10 μοναδες)

6. α. Να μελετήσετε το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

$\lambda x + y + z = 1$
$x + \lambda y + z = \lambda$
$x + y + \lambda z = \lambda^2$

β. Δίνεται ο μη αντιστρέψιμος πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Να βρεθούν όλοι οι πίνακες Β για τους οποίους έχει λύση το παρακάτω σύστημα:

$$A\,X = B, \text{ όπου } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(10 μοναδες)

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ g(x) = -x^2 + 6x - 5$ και $q(x) = \lambda x^2 - 2$.

α. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)$ και $g(x)$ και να προσδιοριστούν γραφικά και αριθμητικά τα σημεία τομής τους.

β. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < g(x)$ και να σκιαγραφηθεί στο διάγραμμά σας το διάστημα που την επαληθεύει

γ. Παραστήστε γραφικά την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ και εξηγήστε πως παίρνουμε γραφικά την λύση της παραπάνω ανίσωσης.

δ. Για ποιες τιμές του λ οι $f(x)$ και $q(x)$ εφάπτονται; **(15 μοναδες)**

8. α. Έστω $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{U}$ 5×5 τετραγωνικοί πίνακες πραγματικών αριθμών όπου $\det \mathbf{A} = -2$, $\det \mathbf{B^4} = 0$, οι $\mathbf{P}$ $\mathbf{U}$ είναι αντιστρέψιμοι και $\mathbf{UU^T} = \mathbf{1}$ Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος και εξηγείστε γιατί

i. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$
ii. $\det \mathbf{A^2B^2} = \det \mathbf{ABBA}$
iii. $\det \mathbf{PAP^{-1}} = \det \mathbf{A}$
iv. Ο $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμος.
v. $\det \mathbf{PBP^{-1}} = 0$
vi. $\det \mathbf{U} = -1$
vii. $\det \mathbf{PUP^{-1}U^T} = 1$
viii. $\det 3\mathbf{UAU^T} = -6$
ix. $\det 3\mathbf{A^4} = 3888$

β. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$ αν και μόνον αν $a + d = 0$.

γ. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι $\det \mathbf{A} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

δ. Μαθηματικός απέδειξε το θεώρημα: Έστω τετραγωνικοί πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ τέτοιοι ώστε $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = 0$. Αυτό είναι δυνατόν μόνο αν ένας από τους $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ δεν είναι αναστρέψιμος. Η απόδειξη που παρουσίασε ήταν η εξής: Από την υπόθεση έχουμε $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$. Παίρνοντας την ορίζουσα σε κάθε μέλος της εξίσωσης έχουμε $\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = -\det \mathbf{B} \det \mathbf{A}$. Άρα $\det \mathbf{A} = 0$ ή $\det \mathbf{B} = 0$ οπότε ένας από τους δύο πίνακες δεν είναι αναστρέψιμος. Δείξτε ότι για τους πίνακες

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

το θεώρημα δεν ισχύει. Εξηγείστε γιατί η απόδειξη είναι εσφαλμένη. **(15 μοναδες)**

9. α. Να βρείτε τις τιμές των a,b,c ώστε η γραφική παράσταση της $f(x)=ax^2+bx+c$ να περνάει από τα σημεία $(1,1)$, $(2,2)$, $(0,3)$.

β. Δίνεται

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 8\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Να υπολογιστούν $\det\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$ και οι λύσεις του συστήματος $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

γ. Δίνεται

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & \lambda\\ -2 & \lambda & 3\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

i. Να διερευνήσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ για πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

ii. Να υπολογιστούν οι λύσεις της **Ax=b**.

(15 μοναδες)

10. α. Βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $-x^2+(\lambda-1)x+2\lambda^2=0$ έχει δύο άνισες ρίζες.

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a\,x^n+b$. Να βρεθεί η τιμή των *α, b, n* ώστε $(f\circ f)(x)=x^9$.

γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{5x^2-12x-100\sqrt{-\lambda x^2}}{x^2-4\lambda x+3}$. Βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το πεδίο ορισμού της *f* είναι όλο το $\Re$. **(10 μοναδες)**