3^{η} εργασία
Ημερομηνία αποστολής: 28 Φεβρουαρίου 2007

ΘΕΜΑ 1

(Μονάδες 7)

Η θέση ενός σωματίου που κινείται στον άξονα x εξαρτάται από το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση:

$$x(t) = ct^2 - bt^3 \qquad (1)$$

όπου x σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα .

(α) Τι διαστάσεις και μονάδες πρέπει να έχουν τα c και b ;

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρείστε ότι οι αριθμητικές τιμές τους είναι 3.0 και 1.0 αντίστοιχα .

(β) Σε ποια στιγμή το σωμάτιο παίρνει την μέγιστη θετική θέση του στον x ;

(γ) Πόσο συνολικά δρόμο διανύει το σωμάτιο στα πρώτα 4s ;

(δ) Ποια η μετατόπιση του στην διάρκεια των πρώτων 4s ;

(ε) Ποια η ταχύτητα του σωματίου στο τέλος καθενός από τα τέσσερα δευτερόλεπτα ;

(στ) Ποια η επιτάχυνση του σωματίου στο τέλος καθενός από τα τέσσερα πρώτα δευτερόλεπτα ;

(ζ) Σχεδιάστε την θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση ως συναρτήσεις του χρόνου από 0 μέχρι 4s.

<u>Λύση</u>

(α) Οι διαστάσεις των c και b είναι:

$c : L \bullet T^{-2} \qquad b : L \bullet T^{-3}$

όπου L = μήκος , T= χρόνος

Οι μονάδες των c και b είναι: $c = m/s^2, \quad b = m/s^3$

Άρα: $c=3.0\ m/s^2$, $b=1.0\ m/s^3$

(β) Βρίσκουμε την ταχύτητα του σωματιδίου:

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow u = 2ct - 3bt^2 \Rightarrow u = t(2c - 3bt) \qquad (2)$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται για $t_0=0$ και $t_2 = \frac{2c}{3b}$, δηλαδή για $t_0=0$, $t_2=2.0$ s

Η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι: $a = \frac{du}{dt} \Rightarrow a = 2c - 6bt \qquad (3)$

Η επιτάχυνση για $t_0=0$ γίνεται: $a_0=2c$, δηλ. $a_0=6.0\ m/s^2>0$

Οπότε η x(t) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $t_0=0$

Η επιτάχυνση για $t_2=2.0$ s γίνεται: $(6.0 - 6 \bullet 1.0 \bullet 2.0)\ m/s^2$

δηλ. $a_2= -6.0\ m/s^2 <0$. Οπότε η x(t) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $t_2=2.0$ s

Η μέγιστη θετική θέση είναι τότε: $x_2=(12.0 - 8.0)m=4.0$ m

(γ) Η θέση x(t) μηδενίζεται , όπως φαίνεται από την σχέση (1) για τους χρόνους :

$t^2(c - bt) = 0 \Rightarrow t_0 = 0 \qquad$ (διπλή ρίζα) και $t_3 = \dfrac{c}{b}$ δηλ. $t_3 = 3.0\text{s}$

Από την σχέση (1) προκύπτει ότι το σημείο για t_4=4s βρίσκεται στη θέση

$$x_4 = (3.0 \bullet 16 - 64)\text{m} \Rightarrow x_4 = -16\text{m}$$

Η συνολική απόσταση που διάνυσε το σωμάτιο στα 3 πρώτα δευτερόλεπτα είναι (4.0+4.0)m = 8.0m, επομένως ο συνολικός δρόμος στα πρώτα 4s είναι: (8.0+16)m=24m

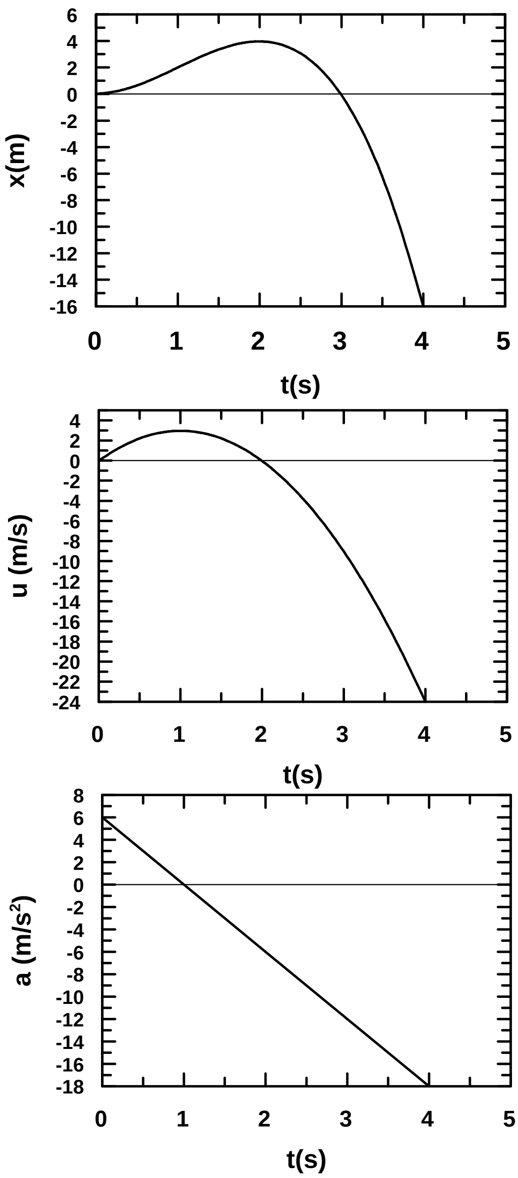
(δ) Η μετατόπιση του στη διάρκεια των πρώτων 4s είναι:

$$\Delta x = x_4 - x_0 \Rightarrow \Delta x = (-16 - 0)\text{m} \Rightarrow \Delta x = -16\text{m}$$

(ε) Αντικαθιστώντας τους αντίστοιχους χρόνους στη σχέση (2) βρίσκουμε:
u_1=3m/s, u_2=0, u_3=-9.0 m/s, u_4=-24m/s

(στ) Για t=1,2,3,4 s η σχέση (3) δίνει τις αντίστοιχες επιταχύνσεις
a_1=0 m/s^2, a_2=-6.0 m/s^2, a_3=-12 m/s^2, a_4=-18 m/s^2
(για t=1s, επειδή a_1= 0 έχουμε σημείο καμπής για την x(t))

(ζ)



ΘΕΜΑ 2

(Μονάδες 10)

Α) Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή δίνεται από τη σχέση:
$a = - ku^2$, όπου k θετική σταθερά και u η ταχύτητά του. Δίδεται ότι για t=0 το κινητό ευρίσκεται στην αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα $u_0>0$. **α)** Να βρεθούν η ταχύτητα και απομάκρυνση ως συναρτήσεις του χρόνου. **β)** Να βρεθεί η ταχύτητα ως συνάρτηση της απομάκρυνσης. ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>

(α) Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι:

$$a = -ku^2 \qquad (1)$$

$$a = \frac{du}{dt} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{du}{dt} = -ku^2 \overset{u\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{du}{u^2} = -kdt \Rightarrow \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2} = -k\int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{u}\Big|_{u_0}^{u} = -kt \Rightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} = kt \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{u_0} + kt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1+u_0kt}{u_0} \Rightarrow u = \frac{u_0}{1+u_0kt} \qquad (3)$$

Επίσης, η στιγμιαία ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{1+u_0kt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}dt = \frac{u_0}{1+u_0kt}dt \Rightarrow dx = \frac{u_0}{1+u_0kt}dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{u_0}{1+u_0kt}dt \qquad (5)$$

Θέτοντας $z = 1+u_0kt \Rightarrow dz = u_0kdt \Rightarrow dt = \dfrac{dz}{u_0k}$

Οπότε η σχέση (5) γίνεται:

$$x = \int_1^z \frac{u_0}{z}\frac{dz}{u_0k} \Rightarrow x = \frac{1}{k}\int_1^z \frac{dz}{z} \Rightarrow x = \frac{1}{k}\ln|z|\Big\|_1^z \Rightarrow x = \frac{1}{k}(\ln|z| - \ln 1) \Rightarrow x = \frac{1}{k}\ln(1+u_0kt) \quad (6)$$

Από τη σχέση (6) προκύπτει:

$$xk = \ln(1+u_0kt) \Rightarrow e^{kx} = (1+u_0kt) \quad (7)$$

Οπότε τελικά , με συνδυασμό των (3) και (7) παίρνουμε:

$$u = \frac{u_0}{e^{kx}} \Rightarrow u = u_0e^{-kx}$$

B) Σωμάτιο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με ταχύτητα όπως δείχνει το σχήμα. Να παρασταθούν γραφικά η επιτάχυνση και η απομάκρυνση, ως συναρτήσεις του χρόνου για $0 \leq t \leq 5$ s. ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>

Θα βρούμε πρώτα τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης ως συνάρτησης του χρόνου . Από τη γραφική παράσταση $u = f(t)$, παρατηρούμε ότι ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο για α $0 \leq t \leq 2s$ και η κλίση της είναι σταθερή, ίση με:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{(1.0-0)m/s}{(2-0)s} = 0.5m/s^2$$

Επομένως για $0 \leq t \leq 2s$, η επιτάχυνση είναι $a_1 = 0.5m/s^2$ (σταθερή).

Στο χρονικό διάστημα $2s \leq t \leq 3s$ η ταχύτητα είναι σταθερή, επομένως η επιτάχυνση στο χρονικό αυτό διάστημα είναι $a_2 = 0$.

Για το χρονικό διάστημα $3s \leq t \leq 5s$ η ταχύτητα ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο, η κλίση της είναι σταθερή και αρνητική και βρίσκεται ίση με :

$$a_3 = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{(0-1.0)m/s}{(5-3)s} = -0.5m/s^2$$

Για την εύρεση της γραφικής παράστασης $x = f(t)$ παρατηρούμε ότι:

$0 \leq t \leq 2s$: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με u_0=0 m/s

$2s \leq t \leq 3s$: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα 1.0 m/s

$3s \leq t \leq 5s$: Κίνηση ευθύγραμμη με σταθερή αρνητική επιτάχυνση και με αρχική ταχύτητα u_0=1.0 m/s

Οι εξισώσεις για την απομάκρυνση $x = f(t)$ για τα τρία χρονικά διαστήματα θα είναι:

$0 \leq t \leq 2s$: $x = \frac{1}{2}a_1 t^2$ με a_1=0.5m/s^2

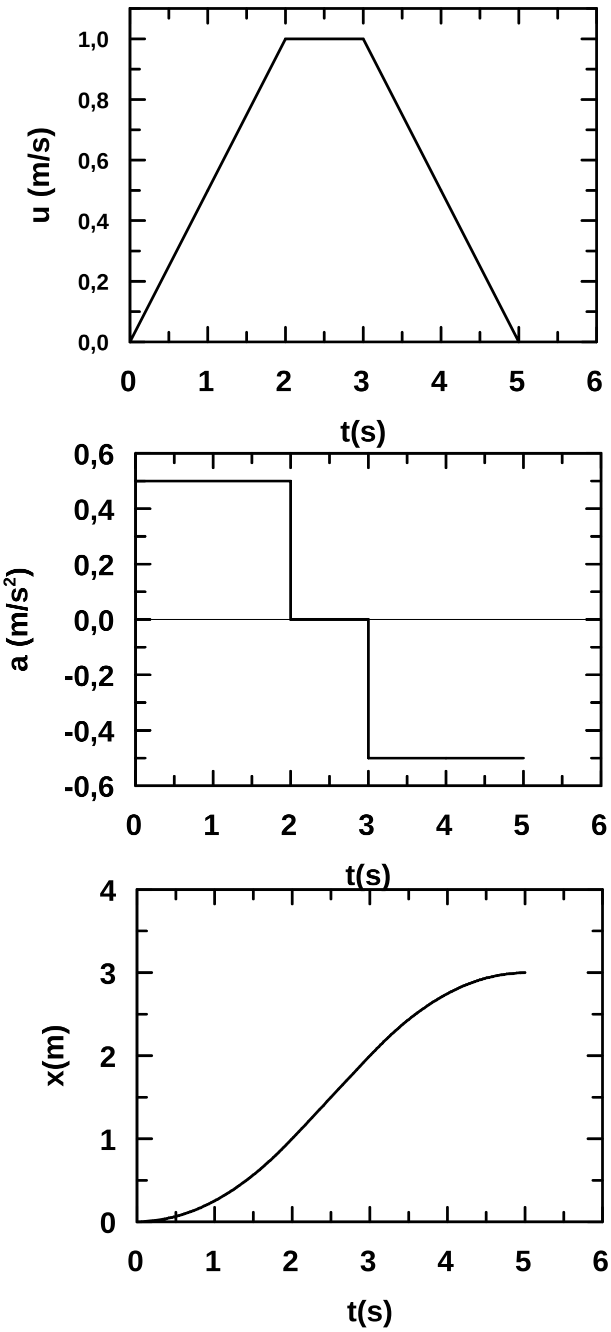
$2s \leq t \leq 3s$: $x = x_2 + u_0(t - t_2)$ με t_2=2s x_2=1m

$3s \leq t \leq 5s$: $x = x_3 + u_0(t - t_3) + \frac{1}{2}a_3(t - t_3)^2$ με t_3= 3s, x_3=2m, a_3=-0.5 m/s^2

$0 \leq t \leq 2s$: παραβολή με a>0

$2s \leq t \leq 3s$ ευθεία

$3s \leq t \leq 5s$ παραβολή με a<0



ΘΕΜΑ 3

(Μονάδες 13)

Α) Αυτοκίνητο επιταχύνεται ευθύγραμμα, αφού εκκινήσει από την ηρεμία και την αρχή των αξόνων, με ταχύτητα που δίνεται από την σχέση:

$$u = k\sqrt{t}\,,$$

όπου $k > 0$ και t ο χρόνος. α) Να βρεθούν η επιτάχυνση και απομάκρυνσή του ως συναρτήσεις του χρόνου. β) Να δοθούν προσεγγιστικά οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης ως συναρτήσεις του χρόνου. ***(μον.4)***

Λύση

$u = k\sqrt{t} \quad (1)$

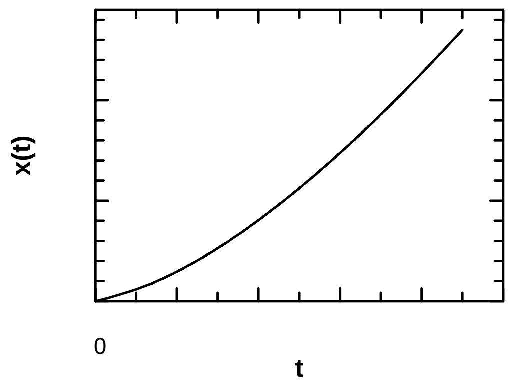
Η στιγμιαία επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση:

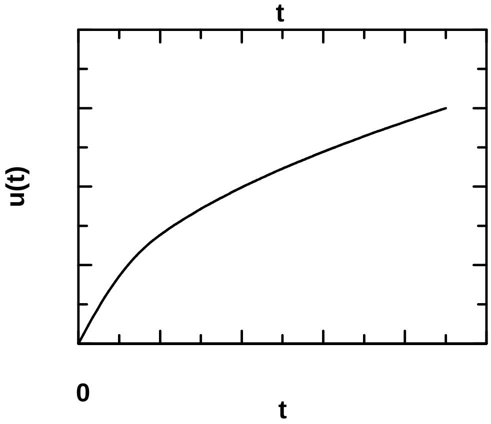
$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow a = \frac{d}{dt}(kt^{1/2}) \Rightarrow a = \frac{k}{2}t^{-1/2} \text{ ή}$$

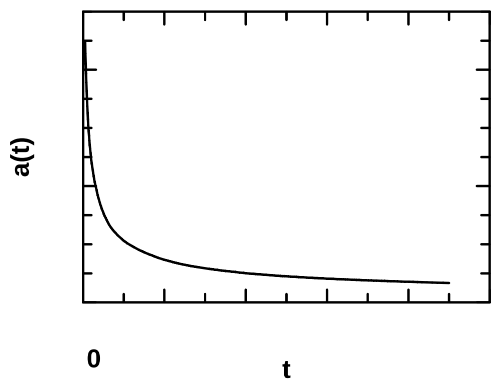
$$a = \frac{k}{2\sqrt{t}} \qquad (2)$$

Η στιγμιαία ταχύτητα δίνεται από τη σχέση: $u = \frac{dx}{dt}$, οπότε λόγω της σχέσεως (1) έχουμε:

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{t} \Rightarrow \frac{dx}{dt}dt = k\sqrt{t}dt \Rightarrow dx = k\sqrt{t}dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t k\sqrt{t}dt \Rightarrow x = 2/3kt^{3/2}$$







Β) Σωμάτιο κινείται σε ευθεία γραμμή. Η επιτάχυνσή του είναι:

$$a = -2x$$

όπου η απομάκρυνση x εκφράζεται σε m και η a σε m/s^2. Βρείτε τη σχέση μεταξύ ταχύτητας και απομάκρυνσης, αν δίνεται ότι για x=0, v_0=4 m/s. ***(μον.4)***

<u>Λύση</u>

$a = -2x \qquad (1)$

Η στιγμιαία επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση:

$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = adt \quad (2)$$

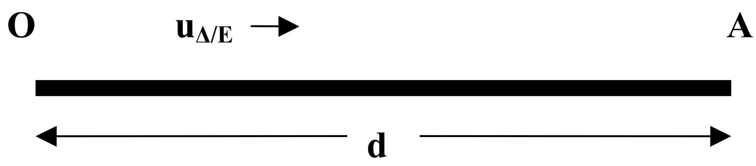
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσεως (2) με τη ταχύτητα και έχουμε:

$$udu = uadt \Rightarrow udu = adt\frac{dx}{dt} \Rightarrow udu = adx$$

και λόγω της (1) προκύπτει:

$$udu = -2xdx \Rightarrow \int_4^u udu = -\int_0^x 2xdx \Rightarrow \left.\frac{u^2}{2}\right|_4^u = -2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x \Rightarrow \frac{u^2-4^2}{2} = -x^2 \Rightarrow u^2 = 16-2x^2 \Rightarrow u^2 = 2(8-x^2)$$

Γ) Κινούμενος διάδρομος επιβατών σε αερολιμένα κινείται με 1.0 m/s και έχει μήκος 80.0 m. Αν μια γυναίκα μπει από τη μια άκρη και περπατάει με 2.0 m/s, σχετικά με τον κινούμενο διάδρομο, πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να φτάσει στην άλλη άκρη αν περπατάει α) στην ίδια κατεύθυνση με την οποία κινείται ο διάδρομος; β) στην αντίθετη κατεύθυνση; ***(μον.5)***



$d = 80.0m$

Έστω $u_{Δ/Ε}$= ταχύτητα διαδρόμου ως προς το έδαφος

$u_{Γ/Δ}$= ταχύτητα γυναίκας ως προς το διάδρομο

$u_{Γ/Ε}$= ταχύτητα γυναίκας ως προς έδαφος

Η αλγεβρική σχέση που συνδέει τις τρεις ταχύτητες είναι:

$u_{Γ/Ε} = u_{Γ/Δ} + u_{Δ/Ε} \qquad (1)$

α) Εστω ότι ο διάδρομος κινείται προς τα δεξιά. Τότε:

$u_{Γ/Δ}$=2.0 m/s, $u_{Δ/Ε}$=1.0 m/s

Οπότε η (1) δίνει: $u_{Γ/Ε}$=(2.0 +1.0) m/s=3.0 m/s

Ο χρόνος είναι:

$$t_1 = \frac{d}{u_{Γ/Ε}} \Rightarrow t_1 = \frac{80m}{3.0m/s} = 26.7s \simeq 27s$$

β) Στη περίπτωση αυτή έχουμε: $u_{\Delta/E} = 1.0 m/s$, $u_{\Gamma/\Delta} = -2.0 m/s$, οπότε η (1) δίνει: $u_{\Gamma/E} = (-2.0 + 1.0) m/s = -1.0 m/s$

Ο χρόνος t_2 είναι $t_2 = \dfrac{\Delta x}{u_{\Gamma/E}} \Rightarrow t_2 = \dfrac{0-d}{u_{\Gamma/E}} \Rightarrow t_2 = \dfrac{(0-80)m}{-1.0m/s} = 80s$

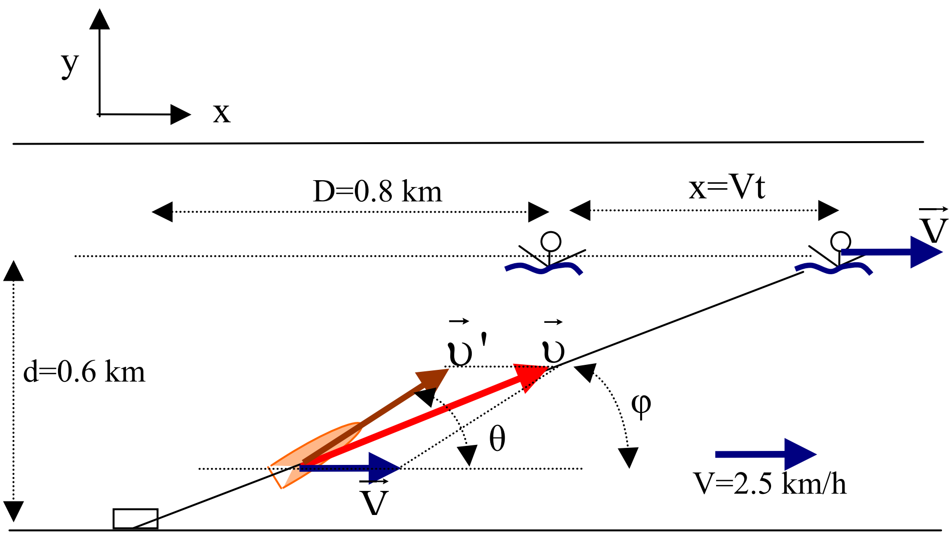
Αυτό προκύπτει , εφόσον η αρχική θέση της είναι το Α και η τελική το σημείο Ο.

ΘΕΜΑ 4

(Μονάδες 10)

A) Ένα παιδί που κινδυνεύει να πνιγεί σε ένα ποτάμι παρασύρεται από το ρεύμα του ποταμού που κυλάει ομαλά με ταχύτητα 2.5 km/h. Το παιδί απέχει 0.6 km από την όχθη και 0.8 km από μία αποβάθρα που βρίσκεται στην ίδια όχθη προς την αντίθετη από το ρεύμα διεύθυνση, από όπου ξεκινάει μία βενζινάκατος για να το σώσει. (a) Αν η βενζινάκατος κινείται με την μέγιστη ταχύτητα της ως προς το νερό, 20 km/h, ποια κατεύθυνση σε σχέση με την όχθη πρέπει να πάρει ο διαμήκης άξονας της βενζινακάτου; (b) Ποια γωνία θα σχηματίσει η ταχύτητα της βενζινακάτου $\vec{\upsilon}$ με την όχθη; Πόσος χρόνος θα χρειαστεί η βενζινάκατος για φθάσει το παιδί; ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>



Οι όχθες του ποταμού και η αποβάθρα αποτελούν το ακίνητο σύστημα αναφοράς. Έστω ότι η όχθη είναι ο άξονας x και η κατεύθυνση κάθετα στην όχθη είναι ο άξονας y. Το παιδί παρασύρεται από το ρεύμα και μπορεί να θεωρηθεί μαζί με το νερό ως το κινούμενο σύστημα αναφοράς. Τέλος η βενζινάκατος είναι το κινητό του προβλήματος μας.

- Η ταχύτητα της βενζινακάτου ως προς το νερό, δηλαδή ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς είναι $\vec{v}'$. Γνωρίζουμε ότι υ'=20 km/h. Η γωνία της $\vec{\upsilon}'$, δηλαδή της πλώρης της βενζινακάτου ως προς την όχθη είναι θ.
- Η ταχύτητα του κινούμενου συστήματος αναφοράς, δηλαδή του νερού και επομένως και του παιδιού, ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς είναι $\vec{V}$. Γνωρίζουμε ότι $\vec{V}$ είναι παράλληλο με τον άξονα x και V=2.5 km/h.
- Τέλος η ταχύτητα της βενζινακάτου ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς είναι $\vec{\upsilon}$. Η γωνία που σχηματίζει η $\vec{\upsilon}$ με τον άξονα x έστω ότι είναι φ. Αντιπροσωπεύει την κατεύθυνση στην οποία κινείται η βενζινάκατος (έστω και αν η πλώρη της δείχνει σε άλλη κατεύθυνση)

Ισχύει ότι $\overrightarrow{\upsilon'} = \upsilon - \vec{V}$. Αναλύοντας σε άξονες έχουμε

$$\upsilon' \cos\theta = \upsilon \cos\phi - V \qquad (1) \quad \text{και}$$
$$\upsilon' \sin\theta = \upsilon \sin\phi \qquad (2)$$

Η βενζινάκατος θα φθάσει το παιδί σε χρόνο t0. Η απόσταση που θα διανύσει σε x και y άξονα δίνεται από τις εξισώσεις

$$D + Vt_0 = \upsilon \cos\phi \, t_0 \qquad (3) \quad \text{και}$$
$$d = \upsilon' \sin\theta \, t_0 \qquad (4)$$

(a) Από τις (1) και (3) έχουμε $D + Vt_0 = \upsilon' \cos\theta \, t_0 + Vt_0 \quad \Rightarrow \quad D = \upsilon' \cos\theta \, t_0 \quad (5)$
Διαιρώντας την (4) με την (5) έχουμε

$$\tan\theta = \frac{d}{D} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{d}{D}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6}{0.8}\right) = 36.86^\circ \qquad (6)$$

(β) Αντικαθιστώντας την τιμή του θ στην (4) έχουμε

$$d = \upsilon' \sin\theta \, t_0 \quad \Rightarrow t_0 = \frac{d}{\upsilon' \sin\theta} = \frac{0.6\, km}{(20\, km/h)\sin(36.86^\circ)} = 0.05\, h = 180\, s \qquad (7)$$

Διαιρώντας την (2) δια την (1)

$$\tan\phi = \frac{\upsilon' \sin\theta}{\upsilon' \cos\theta + V} = \frac{(20 km/h)\sin(36.86^\circ)}{(20 km/h)\cos(36.86^\circ) + (2..5\, km/h)} = 0.65$$
$$\Rightarrow \phi = \tan^{-1}(0.65) = 33.0^\circ \qquad (8)$$

Τέλος αντικαθιστώντας την τιμή της φ και της θ στην εξίσωση (2) έχουμε

$$\upsilon' \sin\theta = \upsilon \sin\phi \quad \Rightarrow \upsilon = \upsilon' \frac{\sin\theta}{\sin\phi} = (20\, km/h)\frac{\sin 36.86^\circ}{\sin 33.02^\circ} = 21.9\, km/h \qquad (9)$$

Πιο σύντομη λύση: από το τρίγωνο που σχηματίζεται $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}$

$$|\upsilon| = \sqrt{\upsilon'^2 + V^2 + 2\upsilon' V \cos\theta} \sim 22 \mathrm{km/h}$$

Από τον κανόνα των ημιτόνων

$$\frac{\upsilon'}{\sin\phi} = \frac{\upsilon}{\sin\theta} \Rightarrow \phi = 32.9^o$$

B) Δύο ποδοσφαιριστές αρχίζουν να τρέχουν από το ίδιο περίπου σημείο ταυτόχρονα. Ο πρώτος τρέχει βόρεια με ταχύτητα 4 m/s ενώ ο δεύτερος κατευθύνεται 60° βόρεια της ανατολής με ταχύτητα 5.4 m/s. (α) Μετά από πόσο χρόνο θα απέχουν μεταξύ τους 25 m; (β) Ποια είναι η ταχύτητα του δεύτερου παίκτη ως προς τον πρώτο; (γ) Πόση απόσταση θα απέχουν μεταξύ τους μετά από 4 s; ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>

Η ταχύτητα του πρώτου ποδοσφαιριστή είναι $\overrightarrow{\upsilon_1} = 4\hat{j} \;\; m/\hat{s}$

Η ταχύτητα του δεύτερου ποδοσφαιριστή είναι

$$\vec{\upsilon}_2 = \left(5.4\cos 60\vec{i} + 5.4\sin 60\vec{j}\right) m/s = \left(2.7\vec{i} + 4.7\vec{j}\right) m/s$$

Το διάνυσμα θέσης του πρώτου είναι $\vec{r}_1 = \vec{\upsilon}_1 t = \left(4t\hat{j}\right) \;\; m$

και του δεύτερου $\vec{r}_2 = \vec{\upsilon}_2 t = \left(2.7t\hat{i} + 4.7t\hat{j}\right) m$

(α) Η μεταξύ τους απόσταση είναι

$$\Delta\vec{r} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \left|\left(2.7t\hat{i} + (4.7 - 4.0)t\hat{j}\right)\right| m = t\sqrt{2.7^2 + (4.7 - 4.0)^2} \;\; m = 2.8t \; m$$

Τελικά t=Δr/(2.8 m/s)=(25 m)/(2.8 m/s) $\Rightarrow$ t = 8.9 s

(β) Η ταχύτητα του δεύτερου παίκτη ως προς τον πρώτο είναι

$$\vec{\upsilon}_{21} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 = \left(2.7\hat{i} + 4.7\hat{j}\right) m/s - 4\hat{j} \; m/s = \left(2.7\hat{i} + 0.7\hat{j}\right) m/s$$

(γ) Από το αποτέλεσμα του (α) έχουμε Δr=(2.8 m/s)t=(2.8 m/s)×(4 s) = 11.2 m

Εναλλακτικά η θέση του δεύτερου παίκτη ως προς τον πρώτο είναι

$$\vec{r}_{21} = \vec{\upsilon}_{21} t = \left(2.7\hat{i} + 0.7\hat{j}\right) t \; m$$

Η απόσταση που τους χωρίζει είναι

$$r_{21} = |\vec{r}_{21}| = \left|\left(2.7\hat{i} + 0.7\hat{j}\right) t\right| m = \left(\sqrt{2.7^2 + 0.7^2}\, t\right) m = 2.8t \; m$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα

ΘΕΜΑ 5

(Μονάδες 10)

Α) Ένας συνηθισμένος άνθρωπος δεν θα τολμούσε να πηδήξει από ύψος μεγαλύτερο των 2 m. Για μεγαλύτερες πτώσεις σχεδόν σίγουρα θα έσπαζε κάποιο πόδι. Σε ένα προσεληνωμένο όχημα από τι ύψος θα μπορούσε να πηδήξει ένας αστροναύτης με την ίδια αντοχή οστών; ($g_{Σελήνης} = \frac{1}{6} g_Γ$) ***(μον.5)***

Λύση

Δεχόμαστε ότι ο αστροναύτης θα προσεληνωθεί με ασφάλεια πηδώντας από την έξοδο του διαστημοπλοίου του αν η ταχύτητα που θα κτυπήσει την επιφάνεια της Σελήνης, $u_Σ^{max}$, είναι ίδια με την ταχύτητα $u_Γ^{max}$ που θα έχει κτυπώντας το έδαφος αφού έχει πηδήξει από ύψος h_G=2m στην Γη.

Η ταχύτητα που θα έχει ένας άνθρωπος μετά από πτώση στη Γη είναι $u_Γ^{max} = \sqrt{2g_Γ h_Γ^{max}}$ ενώ η αντίστοιχη ταχύτητα στην Σελήνη είναι $u_Σ^{max} = \sqrt{2g_Σ h_Σ^{max}}$

Σύμφωνα με την παραδοχή μας πρέπει $u_Γ^{max} = u_Σ^{max}$

Άρα $$g_Σ h_Σ^{max} = g_Γ h_Γ^{max} \Rightarrow h_Σ^{max} = \frac{g_Γ}{g_Σ} h_Γ^{max} = 6(2m) = 12m$$

Β) Δύο τραίνα κινούνται αντίθετα στην ίδια διεύθυνση, το καθένα με σταθερή ταχύτητα v. Τα τραίνα αρχίζουν να κινούνται συγχρόνως από δυο πόλεις A και B, οι οποίες απέχουν απόσταση d. Τα τραίνα ξεκινούν από τις πόλεις Α και Β ταυτόχρονα και μία μέλισσα που αρχικά βρισκόταν στο μπροστινό μέρος του τραίνου Α ξεκινά ταυτόχρονα με τα τρένα και ταξιδεύει με ταχύτητα u, κατά μήκος των σιδηροδρομικών γραμμών προς τη πόλη Β. Όταν φτάνει στο τραίνο Β αλλάζει κατεύθυνση μέχρι να συναντήσει το πρώτο τραίνο, οπότε αλλάζει πάλι κατεύθυνση κ.ο.κ. Η μέλισσα εξακολουθεί να πετάει ανάμεσα στα δύο τραίνα έως ότου συνθλιβεί ανάμεσα τους τη στιγμή της σύγκρουσης. Υπολογίστε τη συνολική απόσταση που διένυσε η μέλισσα μέχρι να συνθλιβεί ανάμεσα στα δύο τραίνα και τον αντίστοιχο χρόνο ($u > v$). ***(μον.5)***

Λύση

Α΄ τρόπος

Έστω, d_o η απόσταση που διανύει η μέλισσα από το πρώτο τραίνο μέχρι να συναντήσει το δεύτερο τραίνο από τη πόλη B, d_1 η απόσταση που διανύει η μέλισσα από το δεύτερο τραίνο (έρχεται από τη πόλη B) μέχρις ότου συναντήσει το τραίνο από τη πόλη A κ.ο.κ. Δεν έχουμε παρά να βρούμε το άθροισμα.

Έστω s_i, η απόσταση μεταξύ των δύο τραίνων, όπου s_0 είναι η αρχική απόσταση , s_1 είναι η απόσταση μετά τη πρώτη πτήση από τη πόλη A και συνεπώς s_i θα είναι η απόσταση τους μετά από i πτήσεις της μέλισσας. Ο χρόνος t_i για την (i+1)^η πτήση δίνεται από τη σχέση:

$$t_i = \frac{d_i}{u} \quad (1)$$

Η σχέση που συνδέει τα s_i και d_i

$$s_i = d_i + t_i u \quad (2)$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι , η απόσταση μεταξύ των τραίνων μετά από την i $^{\eta}$ πτήση, ισούται με την απόσταση που διήνυσε η μέλισσα κατά τη διάρκεια της (i+1)$^{\eta}$ πτήσεως , μείον την απόσταση που διήνυσε το ένα τραίνο κατά την (i+1)$^{\eta}$ πτήση.

Οι (2) , (1) μας δίνουν:

$$s_i = d_i (1 + \frac{v}{u})$$

Έχουμε:

$$s_i = s_{i+1} + 2t_i v$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι η απόσταση των δύο τραίνων στην (i+1) πτήση της μέλισσας, γίνεται κατά $2t_i v$ μικρότερη από την απόσταση τους στη i πτήση.

Επομένως έχουμε:

$$d_i = d_{i+1} + \frac{2t_i v}{1 + \frac{v}{u}} = d_{i+1} + \frac{2d_i}{\frac{u}{v} + 1}$$

$$d_{i+1} = d_i \frac{\frac{v}{u} - 1}{\frac{v}{u} + 1} = d_0 \left(\frac{u - v}{u + v} \right)^{i+1}$$

$$D = \sum_i d_i = d_0 \frac{1}{1 - \frac{u - v}{u + v}} = \frac{d_0}{2} \left(\frac{u}{v} + 1 \right) = \frac{du}{2v}$$

Β΄ τρόπος

Ο χρόνος μέχρι τη σύγκρουση των δύο τραίνων είναι:

$$t = \frac{d}{2v}$$

Όλο αυτό το χρόνο η μέλισσα θα τον δαπανήσει πετώντας ανάμεσά τους . Επομένως θα διανύσει απόσταση :

$$D = tu = \frac{du}{2v}$$

ΘΕΜΑ 6

(Μονάδες 10)

Α) Η τροχιά της Σελήνης γύρω από την Γη είναι σχεδόν κυκλική με ακτίνα περίπου 3.84×10^5 km. Η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται μεταξύ Γης και Σελήνης δίνεται από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα. Αν M και m είναι οι μάζες της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα, r η απόσταση μεταξύ των κέντρων των σωμάτων και $G=6.672\times10^{-11}$ $N\cdot m^2/kg^2$ η παγκόσμια βαρυτική σταθερά, τότε η δύναμη της βαρύτητας δίνεται από $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$

(α)Υπολογίστε την τροχιακή ταχύτητα της Σελήνης γύρω από την Γη (αγνοείστε την ταχύτητα του συστήματος Γη-Σελήνη γύρω από τον Ήλιο, κλπ).

(β) Υπολογίστε την μάζα της Γης.

(Η περίοδος περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι 27,3 ημέρες) ***(μον.5)***

Λύση

Α) (α) Αφού η Σελήνη έχει περίοδο γύρω από την Γη 27.3 ημέρες, ισχύει

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\times3.84\times10^5\times10^3\,\mathrm{m}}{27.3\times24\times3600\ \mathrm{s}} = 1023\,\mathrm{m/s} = 1.023\,\mathrm{km/s}$$

(β) Η δύναμη της βαρύτητας παρέχει την απαιτούμενη κεντρομόλο δύναμη για να κινηθεί η Σελήνη σε κυκλική τροχιά

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow M = \frac{\upsilon^2 r}{G} = \frac{\left(1.023\times10^3\,\mathrm{m/s}\right)^2\left(3.84\times10^8\,\mathrm{m}\right)}{6.672\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}}$$

$$= 6.023\times10^{24}\,\mathrm{kg}$$

Β) Άνθρωπος βρίσκεται πάνω σε πλατφόρμα που ταξιδεύει με ταχύτητα σταθερού μέτρου 9.1 m/s. Επιθυμεί να ρίξει μία μπάλα μέσα από έναν ακίνητο κατακόρυφο δακτύλιο, στερεωμένο στο έδαφος, που βρίσκεται σε 4.9 m πάνω από το ύψος των χεριών του κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μπάλα να κινείται οριζόντια όταν περνά από τον δακτύλιο. Ρίχνει την μπάλα με ταχύτητα 13.4 m/s ως προς τον εαυτό του. (a) Ποια πρέπει να είναι η κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας της μπάλας; (b) Σε πόσα δευτερόλεπτα μετά το ρίξιμο της η μπάλα θα περάσει μέσα από τον δακτύλιο; (c) Σε ποια οριζόντια απόσταση πριν από τον δακτύλιο πρέπει να εκσφενδονίσει την μπάλα; ***(μον.5)***

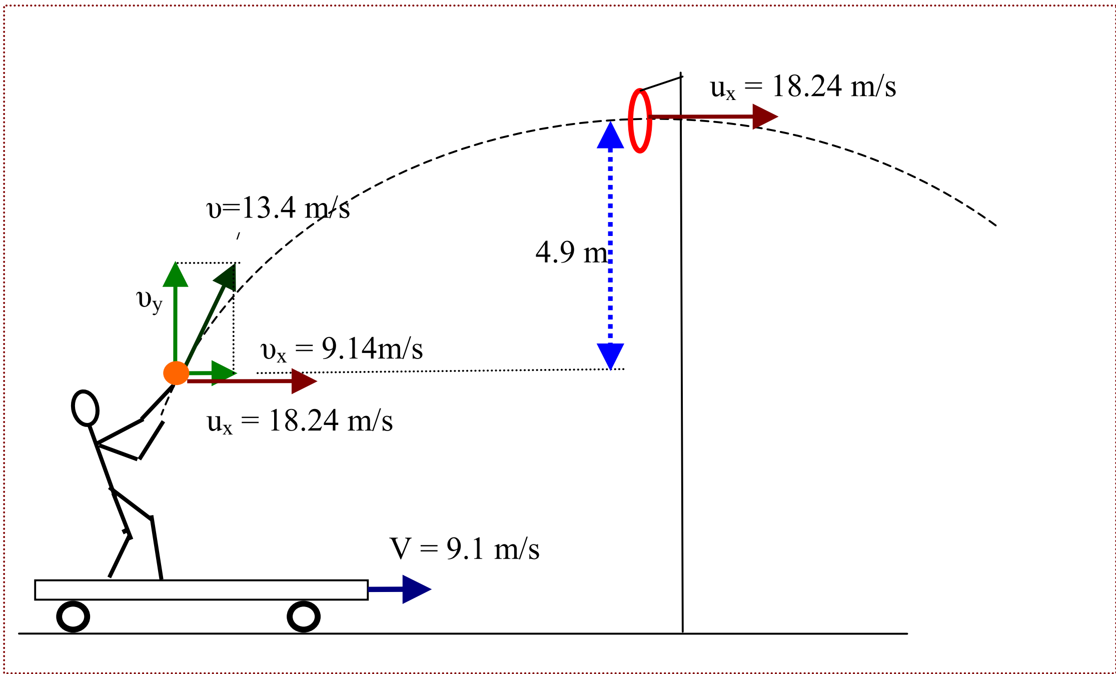
Λύση

(a) Η μπάλα εκτελεί στην γενική περίπτωση πλάγια βολή. Αφού περνάει οριζόντια μέσα από τον δακτύλιο η κατακόρυφη, y-συνιστώσα της ταχύτητας της είναι μηδέν και βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της. Από τις εξισώσεις κίνησης ξέρουμε ότι

$$h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}$$

και επομένως

$$\upsilon_{0y} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times9.8\times4.9}\ m/s = 9.8\ m/s$$



(b) Ο χρόνος που απαιτείται για αυτή την κίνηση είναι $t_1 = \dfrac{\upsilon_{0y}}{g} = \dfrac{9.8\ m/s}{9.8\ m/s^2} = 1s$

(c) Εδώ πρέπει να υπολογίσουμε την οριζόντια ταχύτητα της μπάλας ως προς το έδαφος. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα ως προς τον εαυτό του είναι 13.4 m/s. Η κατακόρυφη ταχύτητα βρέθηκε ότι είναι 9.8 m/s.Αυτή η ταχύτητα είναι η ίδια και στο κινούμενο σύστημα αναφοράς (πλατφόρμα) και στο ακίνητο (έδαφος). Αυτό συμβαίνει επειδή η ταχύτητα της πλατφόρμας είναι οριζόντια, άρα κάθετη στην κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας.
Μπορούμε να βρούμε εδώ την οριζόντια ταχύτητα της μπάλας ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς.

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon_{0y}^2} = \sqrt{13.4^2 - 9.8^2}\ m/s = 9.14\ m/s$$

Όπως ξέρουμε η ταχύτητα της μπάλας (κινητό) ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς, $\vec{\upsilon}$, η ταχύτητα της μπάλας ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς, $\vec{u}$, και η ταχύτητα του κινούμενου συστήματος ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς, $\vec{V}$, συνδέονται με την σχέση $\vec{\upsilon} = \vec{u} - \vec{V}$

Γράφοντας την παραπάνω σχέση για τον x άξονα βρίσκουμε ότι η οριζόντια ταχύτητα της μπάλας ως προς το έδαφος είναι

$$u_x = \upsilon_x + V = 9.14\ m/s + 9.1\ m/s = 18.24\ m/s$$

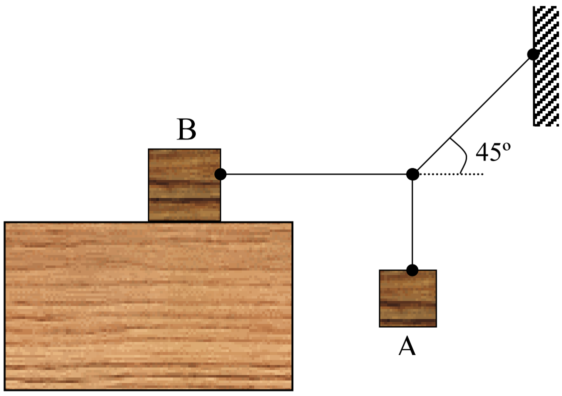
όπου V=9.1 m/s.

Τέλος βλέπουμε ότι η μπάλα πρέπει να εκσφενδονισθεί απόσταση x_0 πριν τον δακτύλιο όπου

$x_0 = u_x t_1 = (18.24\ \text{m/s})(1\ \text{s}) = 18.24\ \text{m}$

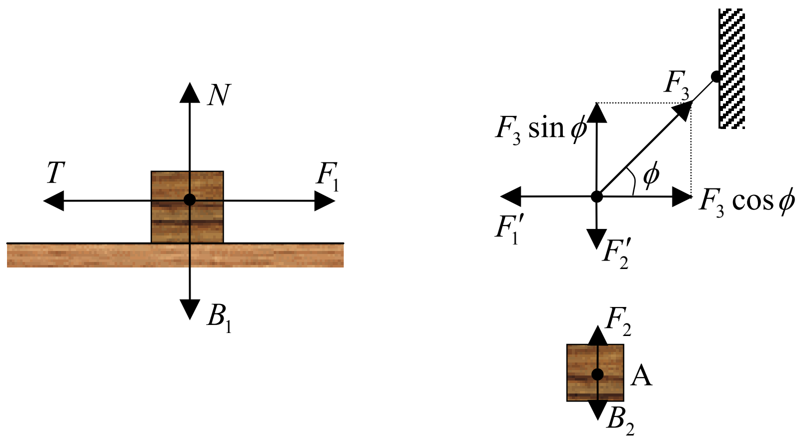
ΘΕΜΑ 7

Ο κύβος Β σχήμα έχει βάρος 710N. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κύβου και τραπεζιού είναι 0,25. Βρείτε το μέγιστο βάρος που μπορεί να έχει ο κύβος Α χωρίς να ανατραπεί η ισορροπία του συστήματος. ***(μον.8)***



<u>Λύση</u>

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στα δύο σώματα και τις τάσεις του σχοινιού χωριστά, όπως στο σχήμα.



Από τη συνθήκη ισορροπίας στο σώμα Α έχουμε
$F_2 - B_2 = 0 \Rightarrow F_2 = B_2$

Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε
$F'_2 = F_2$ άρα $F'_2 = B_2$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του κόμβου των σχοινιών έχουμε
$F_3 \cos\phi - F'_1 = 0$
$F_3 \sin\phi - F'_2 = 0$

Απ'όπου έχουμε $F'_1 = \dfrac{F'_2}{\tan\phi}$ άρα $F'_1 = \dfrac{B_2}{\tan\phi}$

Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$F_1 = F'_1$ άρα $F_1 = \dfrac{B_2}{\tan\phi}$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος Β , και τη σχέση της στατικής τριβής έχουμε

$F_1 - T = 0$

$N - B_1 = 0$

$T \le \mu_\sigma N$

απ'όπου έχουμε $F_1 \le \mu_\sigma B_1$. Αν αντικαταστήσουμε το F_1 έχουμε

$$\frac{B_2}{\tan\phi} \le \mu_\sigma B_1 \Rightarrow B_2 \le \mu_\sigma \cdot \mathrm{B}_1 \cdot \tan\phi$$

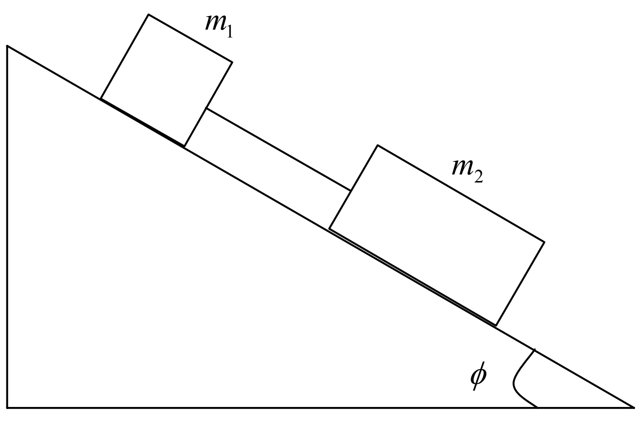
Το μέγιστο βάρος του κύβου Α είναι

$$\mathrm{B}_2 = \mu_\sigma \cdot \mathrm{B}_1 \tan\phi \Rightarrow \mathrm{B}_2 = 0{,}25 \times 710\mathrm{N} \times \tan 45^\circ \Rightarrow \mathrm{B}_2 = 177{,}5\mathrm{N}$$

ΘΕΜΑ 8

(Μονάδες 12)

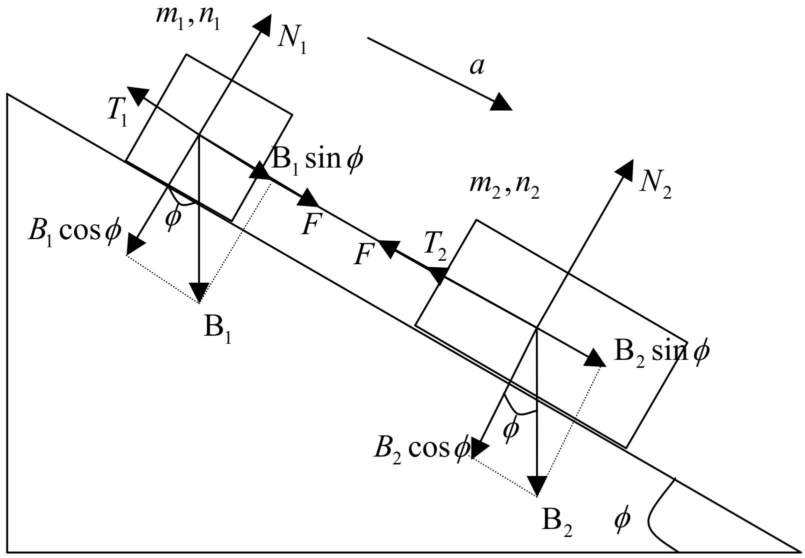
Α) Δύο μάζες, $m_1 = 1{,}65kg$ και $m_2 = 3{,}30kg$, που συνδέονται με αβαρή ράβδο παράλληλα προς το κεκλιμένο επίπεδο στο οποίο ολισθαίνουν, όπως δείχνει το σχήμα, κατεβαίνουν κατά μήκος του επιπέδου και η μάζα m_2 ρυμουλκεί τη μάζα m_1. Η γωνία κλίσης είναι $\phi = 30^\circ$. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ m_1 και επιπέδου είναι $\mu_1 = 0{,}226$ μεταξύ m_2 και επιπέδου ο αντίστοιχος συντελεστής είναι $\mu_2 = 0{,}113$. Υπολογίστε (α) την τάση στη ράβδο που συνδέει τις δύο μάζες και (β) την κοινή επιτάχυνσή τους˙ (γ) θα άλλαζαν οι απαντήσεις σας στα ερωτήματα (α) και (β) αν η μάζα m_1 ρυμουλκούσε τη μάζα m_2 ; (Αλλαγή θέσης σωμάτων) ***(μον.6)***



<u>Λύση</u>

(α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στα δύο σώματα, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων, παράλληλο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο και αναλύουμε τις δυνάμεις. Έχουμε
Για το πρώτο σώμα:

$$B_1 \sin\phi + F - T_1 = m_1 a$$
$$N_1 - B_1 \cos\phi = 0$$
$$T_1 = \mu_1 N_1$$



Αν αντικαταστήσουμε τις δύο πρώτες στη τρίτη έχουμε

$$m_1 g \sin\phi + F - m_1 a = \mu_1 m_1 g \cos\phi \qquad (1)$$

Για το δευτερο σώμα έχουμε

$$B_2 \sin\phi - F - T_2 = m_2 a$$
$$N_2 - B_2 \cos\phi = 0$$
$$T_2 = \mu_2 N_2$$

Αν αντικαταστήσουμε τις δύο πρώτες στη τρίτη έχουμε

$$m_2 g \sin\phi - F - m_2 a = \mu_2 m_2 g \cos\phi \qquad (2)$$

Αν κάνουμε απαλοιφή του α ανάμεσα στις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$F = \frac{(\mu_1 - \mu_2) m_1 m_2 g \cos\phi}{m_1 + m_2}$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$F = \frac{(0{,}226 - 0{,}113) \times 1{,}65kg \times 3{,}30kg \times (9{,}8m/s^2) \times 0{,}87}{1{,}65kg + 3{,}30kg}$$
$$F = 1{,}1\mathrm{N}$$

(β) Αν κάνουμε απαλοιφή του F, ανάμεσα στις σχέσεις (1) και (2), έχουμε

$$a = g\left(\sin\phi - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\phi\right)$$

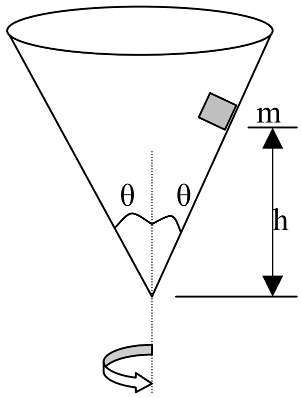
Με αντικατάσταση

$$a = 9{,}8m/s^2\left(0{,}5 - \frac{0{,}226\times 1{,}65kg + 0{,}113\times 3{,}30kg}{1{,}65kg + 3{,}30kg}\cdot 0{,}87\right)$$

$$\Rightarrow a = 3{,}4m/s^2$$

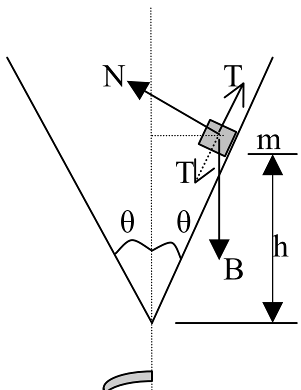
(γ) Αν αλλάξει η θέση των σωμάτων θα αλλάξει μόνο το πρόσημο της F (αντί να σέρνει το m_2, θα σπρώχνει) ενώ τα μέτρα θα μείνουν τα ίδια.

B) Μικρό σώμα μάζας m είναι τοποθετημένο μέσα σε ανεστραμμένο κώνο που περιστρέφεται γύρω από τον (κατακόρυφο) άξονά του με περίοδο P. Τα τοιχώματα του κώνου σχηματίζουν γωνία θ με την κατακόρυφο. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος και της εσωτερικής επιφάνειας του κώνου είναι μ_s. Το σώμα παραμένει σε σταθερό ύψος h στο εσωτερικό του κώνου συμπαρασυρόμενο με αυτόν –το ύψος h μετριέται από την κορυφή του. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της περιόδου P για την οποία το σώμα δεν μπορεί να συμπαρασυρθεί από το τοίχωμα του κώνου και αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω; Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή της περιόδου P για την οποία το σώμα δεν μπορεί να συμπαρασυρθεί από το τοίχωμα του κώνου και αρχίζει να ολισθαίνει προς τα πάνω;
(μον.6)



<u>Λύση</u>

Όταν το σώμα περιστρέφεται με μεγάλη ταχύτητα u (από $u = \omega\, r = \frac{2\pi r}{P}$, ελάχιστη περίοδος P_{min}) αρχίζει και ολισθαίνει προς τα πάνω οπότε η τριβή T είναι προς τα κάτω. Αναλύοντας τις δυνάμεις σε δύο άξονες στη διεύθυνση της ακτίνας του κώνου και στην κάθετη προς αυτήν ισχύει:



$$\sum F = \frac{mu^2}{R}$$

(1) $N\cos\theta + T_{min}\sin\theta = \dfrac{mu^2}{R}$

(3) $T = \mu_s N$

$$(4)\quad N\sin\theta - T_{min}\cos\theta = B$$

Από (3), (4)

$$N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = B \quad (5)$$

$$N = \frac{B}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta} \quad (6)$$

και η (3) δίνει $\quad T = \dfrac{\mu_s mg}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}$

οπότε η (1) δίνει

$$mg\frac{(\cos\theta + \mu_s\sin\theta)}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta} = m\omega^2 h\tan\theta$$

$$\omega_{min}^2 = \left(\frac{2\pi}{P_{min}}\right)^2 = \frac{g}{h\tan\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}$$

$$P_{min} = 2\pi\left[\frac{h\tan\theta}{g}\cdot\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}\right]^{1/2}$$

Αντίστοιχα όταν το σώμα περιστρέφεται με μικρή ταχύτητα u (μέγιστη περίοδος P_{max}) αρχίζει και ολισθαίνει προς τα κάτω οπότε η τριβή T είναι προς τα πάνω. Άρα ισχύει :

$$(2)\quad N\cos\theta - T_{max}\sin\theta = \frac{mu^2}{R}$$

$$(5)\quad N\sin\theta + T_{max}\cos\theta = B$$

$$N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = B \Rightarrow N = \frac{B}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}$$

$T = \mu_s\dfrac{mg}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}$ οπότε η (2) δίνει

$$m\omega^2 h\tan\theta = mg\frac{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta} \Rightarrow$$

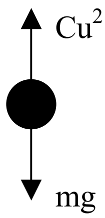
$$P_{max} = 2\pi\left[\frac{h\tan\theta}{g}\cdot\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}\right]^{1/2}$$

ΘΕΜΑ 9

(Μονάδες 10)

Α) Ένας βώλος (μπίλια) βυθίζεται ξεκινώντας από την ηρεμία, εντός μέσου το οποίο ασκεί δύναμη αντίστασης η οποία μεταβάλλεται ανάλογα προς το τετράγωνο της ταχύτητας ($R = Cu^2$). α) Σχεδιάστε διάγραμμα που να δείχνει την κατεύθυνση της κίνησης και σημειώστε με τη βοήθεια διανυσμάτων όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο βώλο. β) Να εφαρμόσετε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και να συνάγετε, από την προκύπτουσα εξίσωση τις γενικές ιδιότητες της κίνησης. γ) Δείξτε ότι ο βώλος αποκτά οριακή ταχύτητα ίση με $u_t = \sqrt{\dfrac{mg}{C}}$. δ) Να εξάγετε την εξίσωση που δίνει την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου. [Σημείωση: $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan h\left(\dfrac{x}{a}\right)$ όπου η σχέση $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ ορίζει τη συνάρτηση tanh, που ονομάζεται υπερβολική εφαπτομένη.] ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>



β) $ma = mg - Cu^2$ (1)

γ) Όταν $a = 0$ $u_t = \sqrt{\dfrac{mg}{C}}$ (2)

δ) Η εξίσωση της κίνησης (1) $\dfrac{du}{dt} = g - \dfrac{C}{m}u^2$ (3)

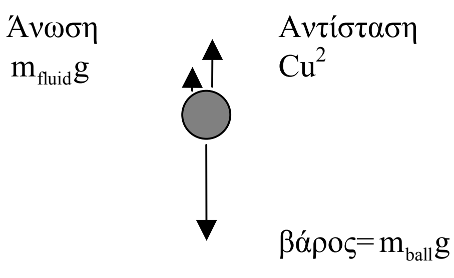
από (2) έχω $\mathrm{u_t^2 = \dfrac{m}{C}g \Rightarrow \dfrac{C}{m} = \dfrac{g}{u_t^2}}$

οπότε η (3) γίνεται $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{g}{u_t^2}(u_t^2 - u^2) \Rightarrow \int \dfrac{du}{u_t^2 - u^2} = \dfrac{g}{u_t^2}\int dt$

$$\frac{1}{u_t}\arctan h\left(\frac{u}{u_t}\right) = \frac{gt}{u_t^{\,2}} \Rightarrow u = u_t ta\,\mathrm{n}\,h\left(\frac{gt}{u_t}\right)$$

Παρατήρηση: *Η παραπάνω λύση αφορά τη περίπτωση που η άνωση είναι αμελητέα. Στη περίπτωση που λάβουμε υπόψη μας και την άνωση η λύση της άσκησης είναι η εξής:*

α) Το διάγραμμα με τις διάφορες δυνάμεις που ασκούνται στο βώλο:



όπου: $\mathrm{m_{ball} = g_{ball}V_{ball}}$ και

$$\mathrm{m_{fluid} = g_{fluid}V_{ball} = \frac{g_{fluid}}{g_{ball}}m_{ball}}$$

β) Ο 2[ος] νόμος του Νεύτωνα (με $\mathrm{m = m_{ball}}$):

$$ma = mg - \frac{g_{fluid}}{g_{ball}} mg - Cu^2$$

$$= m(1 - \frac{g_{fluid}}{g_{ball}})g - Cu^2$$

$$= m\tilde{g} - Cu^2 \qquad \text{όπου} \quad \tilde{g} = (1 - \frac{g_{fluid}}{g_{ball}})g \quad (*)$$

γ) Η οριακή ταχύτητα αντιστοιχεί στην περίπτωση που οι δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται (και επομένως μηδενίζεται η επιτάχυνση, δίνοντας μια σταθερή ταχύτητα u_t):

$$0 = m\tilde{g} - Cu_t^2 \Rightarrow u_t = \sqrt{\frac{m\tilde{g}}{C}}$$

δ) Η εξίσωση κίνησης (*) γράφεται δηλαδή ως εξής:

$$m\frac{du}{dt} = C(u_t^2 - u^2) \quad \text{ή} \qquad \frac{du}{u_t^2 - u^2} = \frac{C}{m}dt = \frac{\tilde{g}}{u_t^2}dt$$

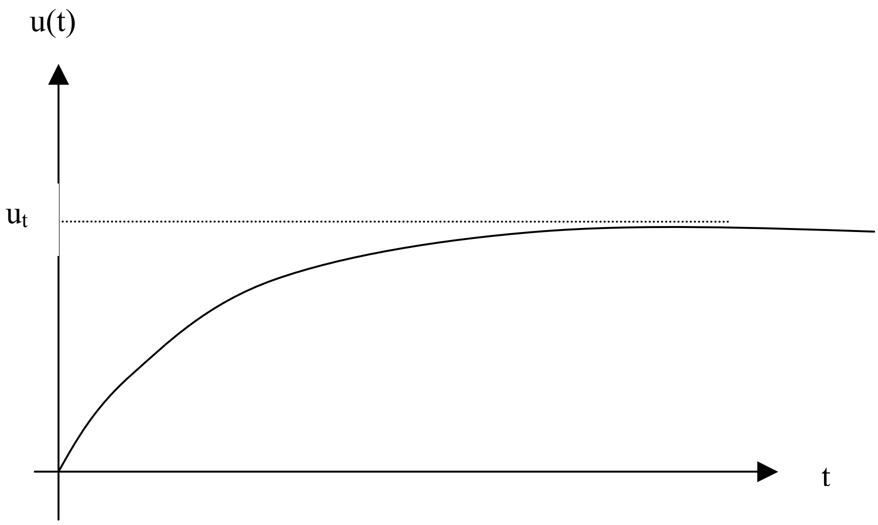
ολοκληρώνουμε (χρησιμοποιώντας τη σημείωση στην εκφώνηση):

$$\frac{1}{u_t}\operatorname{arctan}h(\frac{u}{u_t}) = \frac{\tilde{g}}{u_t^2}t + k_0$$

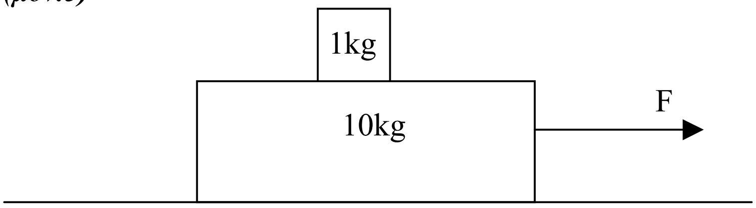
όπου η σταθερά k_0 καθορίζεται από την αρχική συνθήκη $u(0) = 0$, άρα $k_0 = 0$

Η τελική λύση είναι δηλαδή:

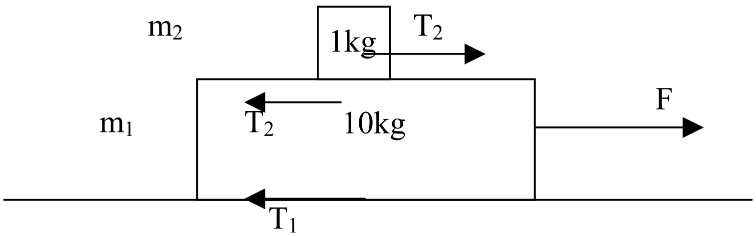
$$u(t) = u_t \tanh(\frac{\tilde{g}}{u_t}t)$$



Β) Σώμα μάζας 1kg τοποθετείται πάνω σε σώμα μάζας 10kg που βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη F μεταβάλλεται με το χρόνο t (που εκφράζεται σε δευτερόλεπτα) έτσι, ώστε F=0,2t N. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι 0,2 και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης 0,15 μεταξύ όλων των επιφανειών, βρείτε την κίνηση κάθε σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου. ***(μον.5)***



Λύση



F=0,2t
μ_s=0,2
μ_k=0,15
g=9,8m/s^2

① σαν σύστημα
αν F<T ηρεμεί όπου η $T \leq \mu_s(m_1+m_2)g \Rightarrow 0{,}2t < 0{,}2\times 9{,}8\times 11 \Rightarrow t < 107{,}8\text{sec}$

② αν γίνει F>T τότε

$$F - T = (m_1+m_2)a \Rightarrow F - \mu_k(m_1+m_2)g = (m_1+m_2)a$$

$$a = \frac{F-\mu_k(m_1+m_2)g}{m_1+m_2} = \frac{0{,}2t - 0{,}15\times 11\times 9{,}8}{11} = \frac{0{,}2t - 16{,}17}{11} = 0{,}0182t - 1{,}47 \Rightarrow$$

$$a = -1{,}47 + 1{,}82\cdot 10^{-2}t$$

③ Για να παρακολουθεί το m_2 την κίνηση του m_1 πρέπει $T_2 = m_2 a$ αλλά $T_2 \leq \mu_s m_2 g$

οπότε $m_2 a \leq \mu_s m_2 g \Rightarrow a \leq \mu_s g$

αν γίνει $a > \mu_s g$ τότε το m_2 γλιστρά προς τα πίσω

$$-1{,}47 + 1{,}82\cdot 10^{-2}t > 0{,}2\times 9{,}8$$

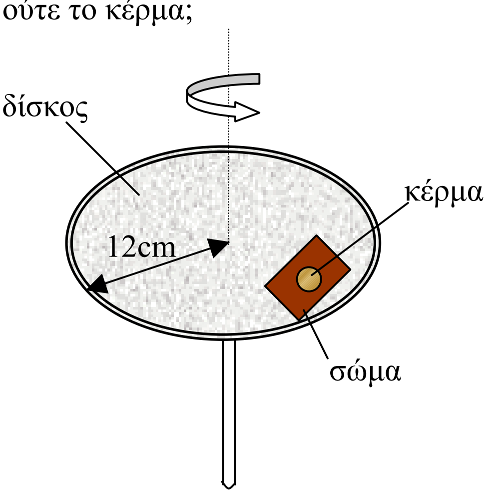
$$1{,}82\cdot 10^{-2}t > 1{,}96 + 1{,}47 = 3{,}43$$

$$t > \frac{3{,}43}{1{,}82\cdot 10^{-2}} = 1{,}885\cdot 10^{-2} = 188.5s$$

ΘΕΜΑ 10

(Μονάδες 10)

Ένα κέρμα μάζας 3.1g τοποθετείται πάνω σε ένα μικρό σώμα μάζας 20g που συγκρατείται από τον περιστρεφόμενο δίσκο, σε απόσταση r =12cm όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και δίσκου είναι 0.75 (στατικής) και 0.64 (ολίσθησης) ενώ για το κέρμα και το σώμα είναι 0.45 (ολισθήσεως) και 0.52 (στατικής), ποια είναι η μέγιστη συχνότητα περιστροφής του δίσκου σε στροφές ανά λεπτό, ώστε να μην γλιστρήσει πάνω στο δίσκο ούτε το σώμα ούτε το κέρμα;



<u>Λύση</u>

$m_\sigma = 20g$

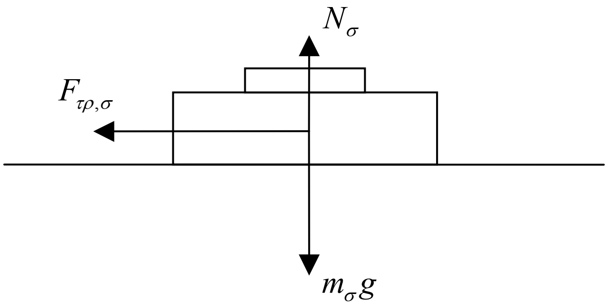
$m_\kappa = 3{,}1$

$\mu_{s_{\sigma,\delta}} = 0{,}75$

$\mu_{k_{\sigma,\delta}} = 0{,}64$

$\mu_{s_{\kappa,\sigma}} = 0{,}52$

$\mu_{k_{\kappa,\sigma}} = 0{,}45$

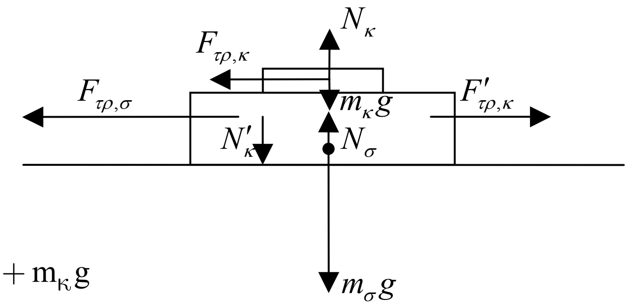


Ισορροπία σε κέρμα

άξονας y: $N_\kappa = m_\kappa g$

άξονας x: $F_{\tau\rho,\kappa} = m_\kappa \dfrac{u^2}{r}$ ①

$F_{\tau\rho,\kappa} \le \mu_{s_{\kappa,\sigma}} N_\kappa = \mu_{s_{\kappa,\sigma}} m_\kappa g$ ②



Ισορροπία σε σώμα

άξονας y: $\mathrm{N}_\sigma = \mathrm{m}_\sigma \mathrm{g} + \mathrm{N}'_\kappa = \mathrm{m}_\sigma \mathrm{g} + \mathrm{N}_\kappa = \mathrm{m}_\sigma \mathrm{g} + \mathrm{m}_\kappa \mathrm{g}$

άξονας x: $F_{\tau\rho,\sigma} - F'_{\tau\rho,\kappa} = m_\sigma \dfrac{u^2}{r}$

Από συνδυασμό των παραπάνω:

$$F_{\tau\rho,\sigma} - F_{\tau\rho,\kappa} = m_\sigma \frac{u^2}{r}$$

$$F_{\tau\rho,\sigma} = F_{\tau\rho,\kappa} + m_\sigma \frac{u^2}{r} = m_\kappa \frac{u^2}{r} + m_\sigma \frac{u^2}{r} = (m_\sigma + m_\kappa)\frac{u^2}{r} \qquad ③$$

$$F_{\tau\rho,\sigma} \le \mu_{s_{\sigma,\delta}} N_\sigma = \mu_{s_{\sigma,\delta}} (m_\sigma + m_\kappa) g \qquad ④$$

③,④ $\Rightarrow (m_\sigma + m_\kappa)\dfrac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\sigma,\delta}}(m_\sigma + m_\kappa)g$

$\dfrac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\sigma,\delta}} g = 0{,}75 \cdot g$ ⑤

Αλλά από την ①,② $\Rightarrow m_\kappa \dfrac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\kappa,\sigma}} m_\kappa g \Rightarrow \dfrac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\kappa,\sigma}} g = 0{,}52 \cdot g$ ⑥

Πρέπει να ισχύουν οι ⑤ και ⑥.

Άρα $\dfrac{u^2}{r} \le 0{,}52 \cdot g \Rightarrow u^2 \le 0{,}52 \cdot g \cdot r$

$$\Rightarrow u_{\max} = 0{,}52 \cdot g \cdot r \underset{\omega = 2\pi\nu}{\overset{u=\omega r}{\Longrightarrow}} 4\pi^2 \nu_{\max}^2 r^2 = 0{,}52 \cdot g \cdot r \Rightarrow$$

$$\nu_{\max}^2 = \frac{0{,}52 \cdot g}{4\pi^2 r} \Rightarrow \nu_{\max} = \sqrt{\frac{0{,}52 \cdot g}{4\pi^2 r} = \sqrt{\frac{0{,}52 \cdot 9{,}8}{4\pi^2 \cdot 12 \cdot 10^{-2}}}} = \sqrt{1{,}077}\ {}^{\sigma\tau\rho}/_{\sec} = 1{,}03768\ {}^{\sigma\tau\rho}/_{\sec}$$

$$\nu_{\max} = 1{,}03768 \frac{\sigma\tau\rho}{\frac{1}{60}\min} = 1{,}03768 \cdot 60\ {}^{\sigma\tau\rho}/_{\min} = 62{,}26\ {}^{\sigma\tau\rho}/_{\min}$$