$5^{\text{η}}$ Εργασία
Παράδοση 20/5/2007
Οι ασκήσεις είναι ισοδύναμες

1

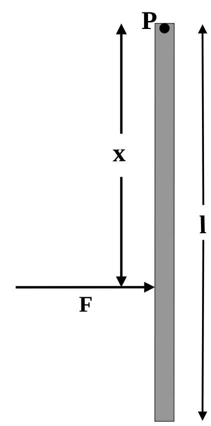
Για ένα συμμετρικό σώμα (για παράδειγμα, θεωρείστε ένα κυλινδρικό σώμα) που κυλά προς τα κάτω, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, να δείξετε ότι:

$$\mu \geq \frac{\tan\theta}{1 + MR^2/I_c},$$

όπου μ είναι ο συντελεστής τριβής του κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ. Τα R, I_c είναι η ακτίνα και η ροπή αδρανείας ως προς το κέντρου μάζας του συμμετρικού σώματος.

2

Θεωρούμε μια στερεά ράβδο με μήκος l, που την κρεμάμε από το ένα της άκρο με τη βοήθεια μιας άρθρωσης στο σημείο P. Μια δύναμη F πρόκειται να εφαρμοστεί για λίγο χρόνο, ώστε με την ώθηση που θα δώσει να θέσει τη ράβδο σε κίνηση εκκρεμούς, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διάταξη στήριξης στο P είναι πολύ εύθραυστη και η δύναμη F πρέπει να εφαρμοστεί σε απόσταση x, τέτοια, που να μην εκδηλώνεται δύναμη αντίδρασης στο P. Να βρεθεί η απόσταση x που ικανοποιεί αυτή την απαίτηση. Η αντίστοιχη θέση ονομάζεται κέντρο κρούσης για το σημείο εξάρτησης P.
(*Υπόδειξη: Η δύναμη F θα επιταχύνει το κέντρο μάζας, και θα δώσει γωνιακή επιτάχυνση ως προς το σημείο P εξαιτίας της ροπής ως προς το ίδιο το σημείο. Η συνθήκη για να είναι συμβιβαστές αυτές οι επιταχύνσεις, μαζί με την υπόθεση ότι δεν υπάρχει δύναμη αντίδρασης στο P, θα καθορίσουν την τιμή του x ως συνάρτηση του l*).



3

Η γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) μιας ευθύγραμμης ράβδου που έχει μήκος L αυξάνει από την τιμή λ_0 στο στο ένα άκρο της $(x = 0)$ σε $2\lambda_0$ στο άλλο άκρο της $x = L$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\lambda(x) = \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right).$$

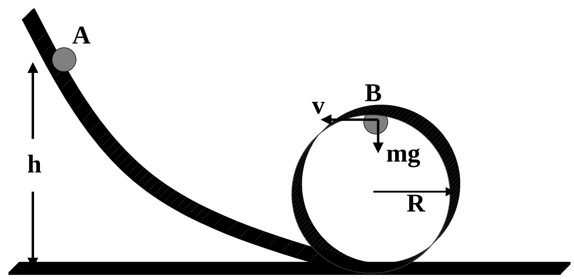
(α) Δείξατε ότι η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς άξονα y που περνά από το ελαφρό άκρο της και είναι κάθετος σε αυτήν είναι:

$$I = \frac{7}{18} ML^2,$$

όπου M είναι η μάζα της ράβδου.
(β) Η ράβδος ξεκινά από ηρεμία όταν είναι οριζόντια και περιστρέφεται χωρίς τριβές, υπό την επίδραση του βάρους της, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και περνά από το ελαφρό άκρο της O. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου ως συνάρτηση της γωνίας θ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια αρχική θέση.

4

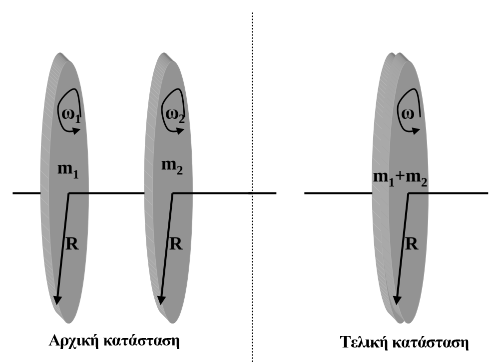
Μια μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται από το σημείο A, πάνω σε οδηγό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση, ποιο είναι το μικρότερο ύψος h συναρτήσει του R, από το οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα για να κάνει ανακύκλωση; Η ακτίνα της σφαίρας είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα R.



Σχήμα 4:

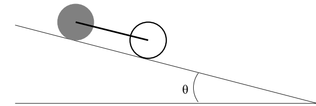
5

Δυο συμπαγείς δίσκοι με μάζες m_1 και m_2 περιστρέφονται με γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2 και στροφορμές L_1 και L_2 αντιστοίχως (Ο άξονας περιστροφής των δίσκων είναι κοινός, γι' αυτό μιλάμε μόνο για μέτρα των στροφορμών). Οι δίσκοι έρχονται σε επαφή (βλέπε σχήμα), θα υπάρξει ολίσθηση μεταξύ τους μέχρι να αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω, τότε η στροφορμή τους είναι L. Να βρεθούν τα L, ω καθώς και η απώλεια ενέργειας του συστήματος.



6

Ένας στερεός κύλινδρος και μία λεπτή στεφάνη με το ίδιο βάρος B και την ίδια ακτίνα R συνδέονται με μία αβαρή ράβδο AB και κυλάνε χωρίς ολίσθηση πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο πού έχει κλίση θ, όπως στο σχήμα. Να βρείτε την επιτάχυνση με την οποία κατεβαίνει το σύστημα και τη δύναμη που ασκείται από τη ράβδο στη στεφάνη. Δίνονται: $I_K = mR^2/2$, $I_\Sigma = mR^2$.



7

Ένα σωματίδιο είναι ελεύθερο να κινηθεί στο επίπεδο (x, y) υπό την επίδραση μιας δύναμης που κατευθύνεται προς την αρχή των συντεταγμένων και εκφράζεται από την σχέση:

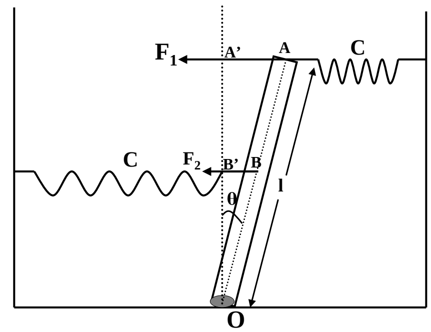
$$\boldsymbol{F} = -C(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}) = -C\boldsymbol{r}.$$

Αν M είναι η μάζα του σωματιδίου, να καταστρώσετε και να λύσετε τις εξισώσεις της κίνησης ως προς x και ως προς y.
(α) Ποιες είναι οι συνθήκες για να γίνεται η κίνηση πάνω σε κύκλο, και ποια είναι η περίοδος;
(β) Ποιες είναι οι συνθήκες για να γίνεται η κίνηση κατά μήκος ευθείας που σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα των x, και ποια είναι η περίοδος;

8

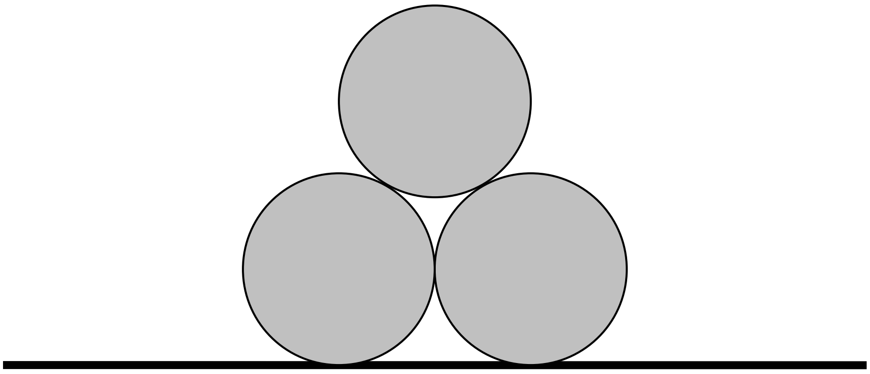
Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους l κρατιέται από δυο ελατήρια A, B με την ίδια σταθερά ελατηρίου C με τέτοιο τρόπο ώστε οι αποστάσεις $OB = AB = l/2$. Αποδείξετε ότι για μικρές αποκλίσεις της γωνίας θ η ράβδος θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση με περίοδο:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{m}{15C}}.$$



9

Τρεις ομογενείς κύλινδροι έχουν ίσα μήκη, διαμέτρους και μάζες. Δύο από αυτούς τοποθετούνται ο ένας δίπλα στον άλλο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, ενώ ο τρίτος κύλινδρος τοποθετείται πάνω στους άλλους δύο, έτσι ώστε ο άξονας του να είναι παράλληλος με τους άξονες των δύο άλλων κυλίνδρων. Στο Σχήμα δείχνεται μια εγκάρσια διατομή των τριών κυλίνδρων. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ των κυλίνδρων και του δαπέδου, και μεταξύ των κυλίνδρων, έτσι ώστε το σύστημα να ευσταθή.



10

Μια μπάλα, μάζας m και ακτίνας R, αρχικά ολισθαίνει χωρίς να περιστρέφεται σε οριζόντια επιφάνεια με τριβή. Η αρχική ταχύτητα της μπάλας είναι V_0, και η ροπή αδράνειας της ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο της (το οποίο είναι και κέντρο μάζας της) είναι $I=kmR^2$, όπου k αδιάστατη σταθερά.
Α) Χωρίς να γνωρίζετε τίποτα για την φύση των δυνάμεων τριβής, να υπολογίσετε την ταχύτητα της μπάλας όταν αυτή αρχίζει να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει. Επίσης να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμότητα, λόγω των τριβών, ενώ η μπάλα ολίσθαινε.
Β) Σας δίνετε ο συντελεστής τριβής ολίσθησης, μ, μεταξύ μπάλας και δαπέδου. Ποια χρονική στιγμή και σε ποια απόσταση η μπάλα άρχισε να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει; Υπολογίστε το έργο της δύναμης της τριβής και επιβεβαιώστε ότι ισούται με την απώλεια της κινητικής ενέργειας που βρήκατε στο ερώτημα (Α).