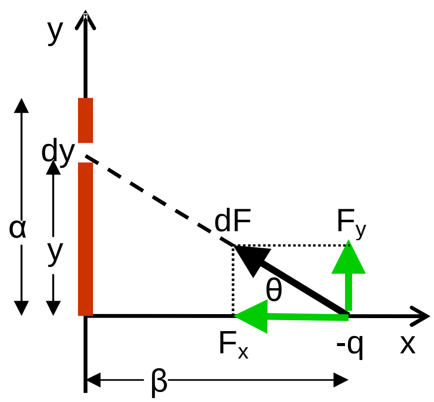
6^{η} ΕΡΓΑΣΙΑ

Ημερομηνία Παράδοσης: 1/7/2007

Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα

Άσκηση 1

Θετικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος του θετικού άξονα y μεταξύ των σημείων y = 0 και y = α. Ένα αρνητικό σημειακό φορτίο - q βρίσκεται πάνω στον θετικό άξονα x, σε απόσταση β από την αρχή (σχήμα). Υπολογίστε τις συνιστώσες x και y της δύναμης που εξασκεί στο q η κατανομή του φορτίου Q.



Λύση:

Χωρίζουμε την κατανομή φορτίου σε στοιχειώδη τμήματα μήκους dy. Το φορτίο κάθε στοιχειώδους τμήματος θα είναι $dQ = \frac{Q}{a} dy$. Το φορτίο αυτό ασκεί ελκτική δύναμη d**F** στο αρνητικό φορτίο -q (βλ. σχήμα) μέτρου

$$dF = \frac{1}{4pe_0}\frac{qdQ}{r^2} = \frac{1}{4pe_0}\frac{qdQ}{b^2+y^2}$$

Η διεύθυνση και η φορά της δείχνονται στο σχήμα. Η συνιστώσα κατά μήκος του άξονα x θα είναι

$$dF_x = -(dF)\cos q = -(dF)\frac{b}{\sqrt{b^2+y^2}} = -\frac{1}{4pe_0}\frac{qQb\,dy}{a(b^2+y^2)^{3/2}}$$

Αντιστοίχως θα έχουμε για τη συνιστώσα κατά μήκος του άξονα y

$$dF_y = +(dF)\sin q = +(dF)\frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}} = \frac{1}{4pe_0}\frac{qQydy}{a(b^2+y^2)^{3/2}}$$

Για να βρούμε τις συνιστώσες F_x και F_y της δύναμης που ασκεί όλη η κατανομή στο φορτίο -q, πρέπει να ολοκληρώσουμε τις dF_x και dF_y κατά μήκος της κατανομής (η ολοκλήρωση θα γίνει με μεταβλητή το y, και όρια από 0 ως α).

$$F_x = \int_{y=0}^{y=a} dF_x = -\frac{1}{4pe_0}\frac{qQb}{a}\int_0^a \frac{dy}{(b^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{4pe_0}\frac{qQb}{a}\left[\frac{1}{b^2}\frac{y}{(b^2+y^2)^{1/2}}\right]_0^a = -\frac{1}{4pe_0}\frac{qQ}{b}\frac{1}{(b^2+a^2)^{1/2}}$$

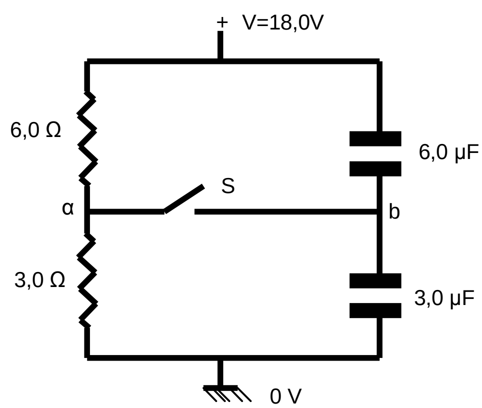
$$F_y = \int_{y=0}^{y=a} dF_y = \frac{1}{4pe_0}\frac{qQ}{a}\int_0^a \frac{ydy}{(b^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4pe_0}\frac{qQ}{a}\left[-\frac{1}{(b^2+y^2)^{1/2}}\right]_0^a = \frac{1}{4pe_0}\frac{qQ}{a}\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{(b^2+a^2)^{1/2}}\right]$$

Σημ. Για την εύρεση των αόριστων ολοκληρωμάτων που χρειάστηκαν εδώ χρησιμοποιήθηκαν οι τύποι

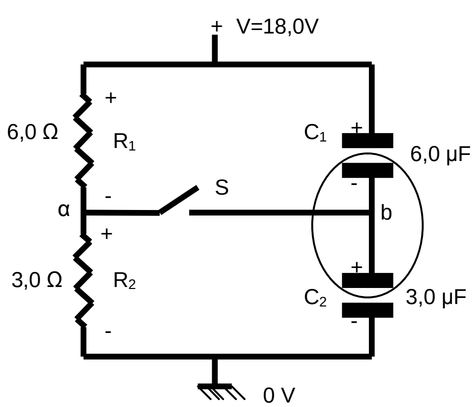
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} \qquad \int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

Άσκηση 2

α) Πόσο είναι το δυναμικό του σημείου α ως προς το β στο σχήμα όταν ο διακόπτης S είναι ανοικτός; β) Ποιο σημείο το α ή το β βρίσκεται σε ψηλότερο δυναμικό; γ) Πόσο είναι το τελικό δυναμικό του β ως προς τη γη αν ο διακόπτης S είναι κλειστός; δ) Πόσο φορτίο διέρχεται δια του διακόπτη S όταν αυτός κλείσει;



ΛΥΣΗ



Ο διακόπτης ανοικτός. Οι πυκνωτές θα φορτιστούν και οι τάσεις τους υπολογίζονται ως εξής;

$$Q = C_1 V_{C_1} = C_2 V_{C_2}$$

όπου Q είναι το φορτίο του καθενός που είναι ίδιο διότι οι πυκνωτές είναι σε σειρά. Άρα

$$V_{C_1} = \frac{C_2}{C_1} V_{C_2}$$

Ισχύει προφανώς

$$V = V_{C_1} + V_{C_2}$$

Οπότε $V = \frac{C_2}{C_1} V_{C_2} + V_{C_2} = \left(\frac{C_2}{C_1} + 1 \right) V_{C_2}$

Συνεπώς

$$V_{C_2} = \frac{V}{\frac{C_2}{C_1} + 1} = \frac{18,0 \text{ V}}{\frac{3,0}{6,0} + 1} = +12,0 \text{ V} \quad \text{και} \quad V_{C_1} = +6,0 \text{ V}$$

Ρεύμα διαρρέει τελικά μόνο το κλάδο με τις αντιστάσεις. Συνεπώς το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο αυτό είναι

$$V = I(R_1 + R_2) \to I = \frac{V}{(R_1 + R_2)} = \frac{18,0 \text{ V}}{9,0 \ \Omega} = 2,0 \text{ A}$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης R_2 (των 3,0 Ω) είναι

$$V_{R_2} = IR_2 = +2,0 \cdot 3,0 \text{ A} \cdot \Omega = 6,0 \text{ V}$$

Οπότε

$$V_{ab} = V_a - V_b = V_{R_2} - V_{C_2} = (+6,0 - 12,0) \text{ V} = -6,0 \text{ V}$$

β) Άρα το σημείο b είναι σε υψηλότερο δυναμικό από το α.

γ) Αφού φορτιστούν οι πυκνωτές θα διέρχεται ρεύμα I μόνο από τις αντιστάσεις που είναι το ίδιο με αυτό που διέρχεται από την πηγή. Επομένως η τάση στα άκρα της αντίστασης R_2 (3,00 Ω) θα είναι όπως και πριν

$$V'_{R_2} = V_{R_2} = +6,0 \text{ V}$$

Τα σημεία α και b βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό ως προς τη γη, επομένως,

$$V'_b - 0\text{V} = V'_a - 0\text{V} = V'_{R_2} = +6,0 \text{ V}$$

Δηλαδή

$$V'_b = +6,0 \text{ V}$$

δ) Επειδή οι πυκνωτές είναι σε σειρά, πριν κλείσει ο διακόπτης, το αρνητικό φορτίο στον κάτω οπλισμό του C_1 έχει το ίδιο μέτρο με το φορτίο του πάνω οπλισμού του πυκνωτή C_2. Αυτό σημαίνει ότι το συνολικό φορτίο στους αγωγούς που περικλείονται από τη διακεκομμένη επιφάνεια στο πρώτο σχήμα είναι Q + (- Q) = 0. Οι πολικότητες φαίνονται στο πρώτο σχήμα.

Όταν ο διακόπτης κλείσει τότε η τάση στα άκρα του C_2 είναι ίση με V'_{R_2} , δηλαδή

$V'_{R_2} = V'_{C_2} = +6,0 \text{ V}$

επομένως η τάση στα άκρα του C_1 είναι

$V'_{C_1} = V - V'_{R_2} = (18,0 \text{ V-}6,0) \text{ V=} +12,0 \text{ V}$

Επομένως το φορτίο του πυκνωτή C_2 είναι

$Q'_2 = C_2 V'_{C_2} = (3,0\ \mu\text{F})\cdot(6,0\text{ V})\text{=18,0 }\mu\text{C}$

Το φορτίο του C_1 είναι

$Q'_1 = C_1 V'_{C_1} = (6,0\ \mu\text{F})\cdot(12,0\text{ V})\text{=72,0 }\mu\text{C}$

Το συνολικό φορτίο πάνω στις γειτονικές πλάκες των δύο πυκνωτών είναι

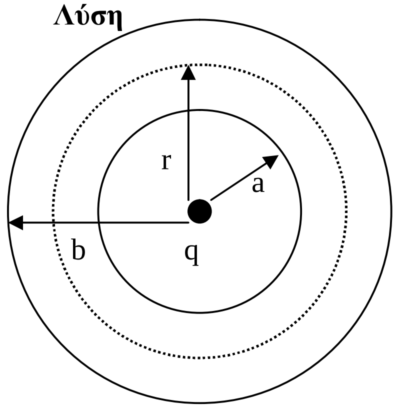
$Q'_t = -Q'_1 + Q'_2 = (-72{,}0\ \mu\text{C+18,0 }\mu\text{C})\text{=54,0 }\mu\text{C}$

Αυτό σημαίνει ότι αυτό το αρνητικό φορτίο ήρθε μέσω του διακόπτη (ή θετικό φορτίο απομακρύνθηκε από τους αγωγούς μέσω του διακόπτη). Πρέπει να τονίσουμε ότι θεωρούμε ότι οι χωρητικότητες των συρμάτων είναι αμελητέε ς σε σχέση με τους πυκνωτές, άρα πρακτικώς τα φορτία είναι τα φορτία των o:τλισ~ω1ν των πυκνωτών.

Άσκηση 3

Μια κοίλη μονωτική σφαίρα έχει πυκνότητα φορτίου ρ =A/r όπου A σταθερά. Η εσωτερική και εξωτερική ακτίνα της είναι a και b, αντίστοιχα. Στο κέντρο της κοιλότητας (r = 0) βρίσκεται σημειακό φορτίο q. A) Πόση είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στίς περιοχές r < a, a < r < b, r > b. B) Για ποια τιμή του A η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου έχει σταθερό μέτρο στην περιοχή α<r<b.

Λύση



A)

<u>Περιοχή r < a</u>

Θεωρώντας μία γκαουσιανή επιφάνεια μέσα στην περιοχή αυτή, βλέπουμε ότι περικλείει μόνο το σημειακό φορτίο. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου λόγω του σημειακού φορτίου q σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου που απέχει απόσταση r από αυτό, είναι:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Άρα αυτή είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στη συγκεκριμένη περιοχή.

<u>Περιοχή a < r < b</u>

Εδώ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου οφείλεται στο σημειακό φορτίο αφ’ ενός και στο φορτίο του σφαιρικού φλοιού αφ’ ετέρου.

Από το νόμο του Gauss έχουμε

$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \dfrac{q'}{\varepsilon_0}$, όπου q’ το φορτίο που περικλείει η γκαουσιανή επιφάνεια. Το διάνυσμα της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου $\vec{E}_2$ έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με το διάνυσμα $d\vec{S}$. Άρα

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \oint E_2 dS \cos 0^o = E_2 4\pi r^2 \Rightarrow E_2 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_o}$$

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + \int \rho\, dV\right) \Rightarrow E_2 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + \int_a^r \frac{A}{r} 4\pi r^2 dr\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\int_a^r r dr = \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{2\pi A}{\varepsilon_0}\left(r^2 - a^2\right) \Rightarrow$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} + \frac{A}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right).$$

Άρα

$$E_2 = \frac{A}{2\varepsilon_0} + \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}$$

<u>Περιοχή r > b</u>

Και σ’ αυτή την περίπτωση η ένταση οφείλεται στο σημειακό φορτίο και στο φορτίο του σφαιρικού φλοιού, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του οποίου υπολογίζεται όπως προηγουμένως, μόνο που το άνω όριο ολοκληρώσεως είναι τώρα ίσο με b:

$$\oint \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = \frac{1}{e_0}\left(q + \int r\, dV\right) \Rightarrow E_3 4p r^2 = \frac{1}{e_0}\left(q + \int_a^b \frac{A}{r} 4p r^2 dr\right) = \frac{q}{e_0} + \frac{4p A}{e_0}\int_a^b r dr = \frac{q}{e_0} + \frac{2p A}{e_0}\left(b^2 - a^2\right) \Rightarrow$$

$$E_3 = \frac{q}{4p r^2 e_0} + \frac{A(b^2 - a^2)}{2e_0}\frac{1}{r^2}$$

Άρα

$$E_3 = \frac{1}{2e_0} + \left(A(b^2 - a^2) + \frac{q}{2p}\right)\frac{1}{r^2}$$

Β) Για να είναι το E_2 σταθερό στην περιοχή a < r < b, θα πρέπει $\frac{\partial E_2}{\partial r} = 0$, άρα

$$\frac{\partial\left(\frac{A}{2e_0} + \left(\frac{q}{4pe_0} - \frac{Aa^2}{2e_0}\right)\frac{1}{r^2}\right)}{\partial r} = -2\left(\frac{q}{4pe_0} - \frac{Aa^2}{2e_0}\right)\frac{1}{r^3} = 0 \Rightarrow A = \frac{q}{2p a^2}$$

Άσκηση 4

<u>Μονωτικός</u> κύλινδρος ακτίνας R και μήκους L (L>>R), έχει πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου

$\rho = \rho_o(C - Br)$

όπου C, B θετικές σταθερές, r η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου και ρ_o μια σταθερή πυκνότητα αναφοράς. Εκτιμείστε τις μονάδες των σταθερών C και B.

.Α)Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο ακτινικά μέσα στον κύλινδρο (r < R) και έξω από αυτόν (r > R).

Β)Αν αντί για μονωτικό κύλινδρο δινόταν <u>αγώγιμος συμπαγής</u> φορτισμένος κύλινδρος θα άλλαζε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από αυτόν ? Εξηγείστε.

Λύση

Η σταθερά C πρέπει να είναι καθαρός αριθμός. Η σταθερά b, πρέπει να έχει διαστάσεις αντιστρόφου μήκους.

Α) Από τη γεωμετρία του προβλήματος, διαπιστώνουμε ότι έχουμε κυλινδρική κατανομή φορτίου. Ως εκ τούτου θεωρούμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss, μήκους l και ακτίνας r, ομοαξονική με την κυλινδρική κατανομή φορτίου, δεδομένου ότι η γκαουσιανή επιφάνεια την οποία

επιλέγουμε, πρέπει να έχει την ίδια συμμετρία με εκείνη της κατανομής του φορτίου. Από το νόμο του Gauss έχουμε:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{e_0} = \frac{1}{e_0}\int r dV$$

Αλλά:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_p + 2\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_B$$

όπου dA_π στοιχειώδες τμήμα της παράπλευρη συνιστώσας της γκαουσιανής επιφάνειας και dA_B στοιχειώδες τμήμα των βάσεων αυτής. Το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου έχει την ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα $d\vec{A}_p$ ενώ είναι κάθετο στο διάνυσμα $d\vec{A}_B$. Ως εκ τούτου ο δεύτερος προσθεταίος της προηγούμενης σχέσης μηδενίζεται και

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_p = \oint EdA\cos(0) = E2prl$$

A)

A1. <u>r < R</u>

$$E2prl = \frac{1}{e_0}\int_0^r r_0(C - Br)dV = \frac{1}{e_0}\int_0^r r_0(C - Br)(2prldr) = \frac{r_0 2pl}{e_0}\left[C\int_0^r rdr - B\int_0^r r^2 dr\right] =$$

$$\frac{r_0 2pl}{e_0}\left[C\frac{r^2}{2} - B\frac{r^3}{3}\right] \Rightarrow E = \frac{r_0 r}{e_0}\left(\frac{C}{2} - \frac{B}{3}r\right)$$

A2. <u>r > R</u>

$$E2prl = \frac{1}{e_0}\int_0^R r_0(C - Br)dV = \frac{1}{e_0}\int_0^R r_0(C - Br)(2prldr) = \frac{r_0 2pl}{e_0}\left[C\int_0^R rdr - B\int_0^R r^2 dr\right] =$$

$$\frac{r_0 2pl}{e_0}\left[C\frac{R^2}{2} - B\frac{R^3}{3}\right] \Rightarrow E = \frac{r_0 R^2}{e_0}\left(\frac{C}{2} - \frac{BR}{3}\right)\frac{1}{r}$$

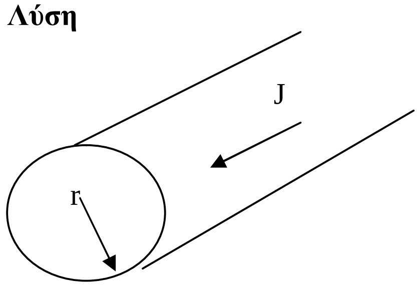
B) Για r < R ξέρουμε ότι στο εσωτερικό του αγωγού δεν μπορεί να υπάρξει ηλεκτρικό φορτίο. Οπότε από το νόμο του Gauss βρίσκουμε ότι E = 0.

Για $r > R$ με το Νόμο του Gauss, το πεδίο υπολογίζεται ίδιο με εκείνο της περίπτωσης Α2 αφού μέσα στην Γκαουσιανή κυλινδρική επιφάνεια περιέχεται όλο το ηλεκτρικό φορτίο του κυλίνδρου. Μόνη διαφορά είναι ότι τώρα (δηλ. στην περίπτωση του αγωγού) όλο το φορτίο είναι συγκεντρωμένο στην επιφάνεια του κυλίνδρου.

Άσκηση 5

Κυλινδρικός αγωγός ακτίνας R διαρρέεται κατά μήκος του άξονά του από ρεύμα I. Η πυκνότητα του ρεύματος J δεν είναι σταθερή σε όλη τη διατομή του αγωγού, αλλά μεταβάλλεται συναρτήσει της ακτίνας σύμφωνα με τη σχέση $J = b\,r$ όπου b σταθερά. Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο B μέσα στον κυλινδρικό αγωγό ($r_1<R$) και έξω από το κυλινδρικό αγωγό ($r_2>R$).

Λύση



Εφαρμόζοντας το νόμο του Ampère,

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I$$

και εκφράζοντας την ένταση του ρεύματος συναρτήση της πυκνότητος ρεύματος, έχουμε:

<u>$r_1 < R$</u>

Για κυλινδρική επιφάνεια ομοαξονική ως προς τον αγωγό, ακτίνας μικρότερης αυτής του αγωγού.

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \oint B\, ds \cos 0^\circ = \mu_0 \int J\, dA \Rightarrow B 2\pi r_1 = \mu_0 \int_0^{r_1} (br)(2\pi r)\, dr = 2\pi \mu_0 b \int_0^{r_1} r^2 dr = 2\pi \mu_0 b \frac{r_1^3}{3} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 b}{3} r_1^{\,2}$$

<u>$r_2 > R$</u>

$$B 2\pi r_2 = \mu_0 \int_0^{R} (br)(2\pi r)\, dr = 2\pi \mu_0 b \frac{R^3}{3} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 b R^3}{3} \frac{1}{r_2}$$

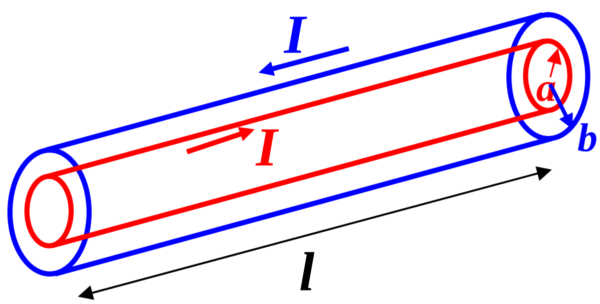
Άσκηση 6

Ομοαξονικό καλώδιο μήκους *l* αποτελείται από δύο λεπτούς ομοαξονικούς κυλίνδρους ακτίνων ***a*** και ***b*** (*a*<*b*). Υποθέτουμε ότι οι δύο κύλινδροι διαρρέονται

1. από ίσα και αντίρροπα ρεύματα *I*,
2. από ίσα και ομόρροπα ρεύματα *I*
3. από αντίρροπα ρεύματα που το ένα να είναι *I* και το άλλο *I/2*

υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το μαγνητικό πεδίο ***B*** στις θέσεις: *r*<*a*, *a*<*r*<*b*, *r*>*b*.

Λύση



1. Εφαρμόζουμε το νόμο του Ampère,

$$\oint \vec{B}\,d\vec{s} = \mu_0 I \tag{1}$$

για κάθε περιοχή:

<u>r<a</u>

Το ολικό ρεύμα το οποίο περνάει μέσα από οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή στην περιοχή αυτή είναι μηδέν, οπότε:

$$\oint \vec{B}\,d\vec{s} = \oint B\,ds\cos 0^\circ = B\oint ds = \mathrm{B}\,(2\pi\,\mathrm{r}) = \mu_0 0 \Rightarrow \mathrm{B} = 0 \tag{2}$$

<u>*a*<*r*<*b*</u>

Το ολικό ρεύμα το οποίο περνάει μέσα από οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή στην περιοχή αυτή είναι I, οπότε:

$$\mathrm{B}\,(2\pi\,\mathrm{r}) = \mu_0\,\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{B} = (\mu_0/2\pi\,\mathrm{r})\,\mathrm{I} \tag{3}$$

r>b

Το ολικό ρεύμα το οποίο περνάει μέσα από οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή στην περιοχή αυτή είναι μηδέν, δεδομένου ότι οι εντάσεις στους δύο αγωγούς είναι αντίρροπες, οπότε το καθαρό ρεύμα που διαπερνά την κλειστή διαδρομή είναι μηδέν:

2. Στην περίπτωση αυτή (r<a)

Ισχύουν ακριβώς οι εξ. (1) και (2) δηλ. και πάλι B=0

Για *a<r<b*

Ισχύουν ακριβώς οι εξ. (1) και (3) δηλ. και πάλι $B = (\mu_0/2\pi\, r)\, I$

Για *r>b*

Το ολικό ρεύμα το οποίο περνάει μέσα από οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή στην περιοχή αυτή είναι I+I = 2I, δεδομένου ότι οι εντάσεις στους δύο αγωγούς είναι ομόρροπες, οπότε

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 (I+I) = \mu_0 2I \tag{4}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint B ds \cos 0^\circ = B\oint ds = B\,(2\pi\, r) \tag{5}$$

Από (4) και (5) προκύπτει $B = (\mu_0/\pi\, r)\, I$

3. Εργαζόμενοι όπως και προηγουμένως προκύπτει:

Για r<a B=0, Για *a<r<b* $B = (\mu_0/2\pi\, r)\, I$ και

Για *r>b* $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 (I - \frac{I}{2}) = \mu_0 \frac{I}{2}$ = B (2π r) οπότε $B = (\mu_0/4\pi\, r)\, I$

Άσκηση 7

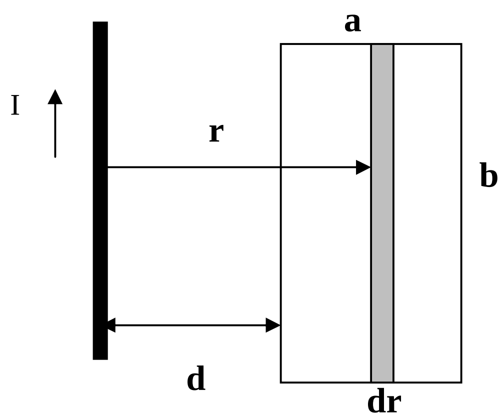
Σύρμα είναι παράλληλο προς την πλευρά b ακίνητου ορθογώνιου βρόχου (πλευρών a και b) και απέχει απόσταση d από αυτόν.

α) Το σύρμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I. **β)** Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα που μεταβάλλεται χρονικά σύμφωνα με τη σχέση: $\mathbf{I = I_0\, e^{-t/\tau}}$.

Να υπολογιστεί σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις**:**

- Το μαγνητικό πεδίο που περνάει από το επίπεδο του βρόχου.
- Η μαγνητική ροή που περνάει από το επίπεδο του βρόχου
- Η επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο.

Λύση



α) Το μαγνητικό πεδίο δίνεται από τον νόμο Ampère:

$$\oint \vec{B}\,d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow B\oint ds = \mu_0 I \Rightarrow B(2\pi r) = I \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόχου (δηλ, παράλληλο προς το διάνυσμα **dS,** όπου dS στοιχειώδης επιφάνεια του βρόχου (γραμμοσκιασμένο τμήμα), δεν είναι ομογενές, αλλά μεταβάλλεται μέσα σε αυτόν, αντιστρόφως ανάλογα με τη απόσταση r.

Η μαγνητική ροή η οποία περνάει από το επίπεδο του βρόχου θα είναι:

$$\Phi_m = \int \vec{B}\,d\vec{S} = \int B\,dS\cos(0) = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,dS$$

Αλλά dS = b dr, οπότε:

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \int_d^{d+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Η επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο δίνεται από το νόμο Faraday:

$$\mathrm{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Από τη σχέση που υπολογίσαμε προηγουμένως, βλέπουμε ότι η μαγνητική ροή είναι χρονικώς αμετάβλητη (δεδομένου ότι καμμία από τις παραμέτρους της σχέσης αυτής δεν μεταβάλλεται με το χρόνο), ως εκ τούτου Ε = 0.

Β) Ο νόμος Ampère δίνει για το μαγνητικό πεδίο, με την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως:

$$B = \frac{m_0 I_0}{2pr}\exp\left(-\frac{t}{t}\right).$$

Η μαγνητική ροή θα είναι:

$$\Phi_m = \frac{m_0 I_0}{2p} b \exp\left(-\frac{t}{t}\right)\int_d^{d+a}\frac{dr}{r} = \frac{m_0 I_0 b}{2p}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\exp\left(-\frac{t}{t}\right)$$

και η επαγόμενη ΗΕΔ:

$$E = -\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 I_0 b}{2p}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\exp\left(-\frac{t}{t}\right)\right] = -\frac{m_0 I_0 b}{2p}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\frac{d}{dt}\left[\exp\left(-\frac{t}{t}\right)\right] \Rightarrow$$

$$E = -\frac{m_0 I_0 b}{2pt}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\exp\left(-\frac{t}{t}\right)$$

Άσκηση 8

Μια δέσμη 100 ευθυγράμμων μονωμένων συρμάτων μεγάλου μήκους σχηματίζει κύλινδρο ακτίνας R = 0.5cm και κάθε σύρμα διαρρέεται από ρεύμα I = 2A.
Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης ανά μονάδα μήκους που ασκείται σ' ένα από τα σύρματα το οποίο βρίσκεται σε απόσταση r = 0.2cm από το κέντρο της δέσμης.
Να εξετασθεί αν ένα σύρμα που βρίσκεται στην εξωτερική επιφάνεια της δέσμης υφίσταται μεγαλύτερη ή μικρότερη δύναμη από εκείνη του σύρματος της προηγούμενης περίπτωσης.

Λύση

(a) Υπολογισμός του B σε απόσταση r = 0.2cm από το κέντρο της δέσμης

$$\oint \vec{B}\cdot\overrightarrow{dS} = \mu_o I \;\rightarrow\; \oint B\,dS\,\cos 0^o = \mu_o I \;\rightarrow B2\pi r = \mu_o I \qquad (1)$$

όπου I το ρεύμα που περιέχεται στη διαδρομή ακτίνας r και είναι:

$$\frac{I_{o\lambda}}{\pi R^2}\pi r^2 = \frac{100I}{\pi R^2}\pi r^2 = 100I\frac{r^2}{R^2} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει $B = \frac{\mu_o}{2\pi R^2}100Ir$ (3)

Υπολογισμός $\vec{F}$ $\kappa\alpha\iota$ $\frac{F}{l}$

$\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B}$ με κατεύθυνση προς το **<u>κέντρο</u>**

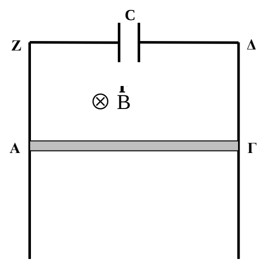
$F = IlB\sin 90^o = IlB = I(\frac{\mu_0}{2\pi R^2}100I)r$ και

$\frac{F}{l} = (\frac{\mu_o}{2\pi R^2}100I^2)r$ =………..= 6.4 10^{-3} Nt/m

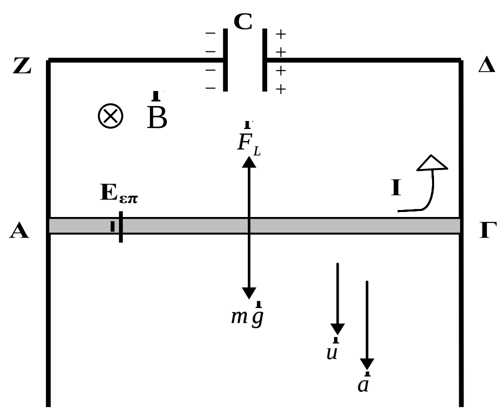
(b) Υπολογίσθηκε ότι το B είναι ανάλογο της απόστασης r από το κέντρο. Αυτό σημαίνει ότι B γίνεται μεγαλύτερο όσο απομακρυνόμαστε από το κέντρο. Επιπλέον, αφού κάθε σύρμα διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα , η δύναμη είναι μεγαλύτερη σε σύρμα της εξωτερικής επιφάνειας.

Άσκηση 9

Αφήνουμε τον οριζόντιο αγωγό ΑΓ να πέσει κατακόρυφα με την επίδραση του βάρους του. Τα άκρα του αγωγού εφάπτονται χωρίς τριβές στους κατακόρυφους συρμάτινους οδηγούς του σχήματος. Τα πάνω άκρα των αγωγών συνδέονται με αφόρτιστο πυκνωτή. Δίνονται: Το μήκος l και η μάζα m του αγωγού ΑΓ, το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου, η χωρητικότητα C του πυκνωτή και η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Α) Να αποδειχθεί ότι ο ΑΓ πρέπει να πέφτει με σταθερή επιτάχυνση. Β) Να βρεθούν η $E_{\varepsilon\pi}$ και το φορτίο του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο. Οι αγωγοί θεωρούνται αμελητέας αντίστασης.



Λύση



Α) Αφού ο αγωγός πέφτει ελεύθερος, κάποια χρονική στιγμή θα έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και επιτάχυνση $\vec{a}$. Εκείνη τη στιγμή έχει αναπτύξει $E_{\varepsilon\pi}$ = Βυl. Εφαρμόζοντας το 2ο κανόνα Kirchhoff στο βρόχο ΑΓΔΖΑ, έχουμε:

$E_{\varepsilon\pi} - V_c = 0 \Rightarrow V_c = E_{\varepsilon\pi}$ δηλαδή εκείνη τη στιγμή ο πυκνωτής έχει τάση V_c = Β υ l άρα και φορτίο q = C V_c = C B υ l.

Η ένταση του ρεύματος φόρτισης του πυκνωτή εκείνη τη στιγμή θα είναι:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CB\upsilon l)}{dt} \Rightarrow I = CBl\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow I = CBla$$

Άρα στον αγωγό ΑΓ ασκείται F_L = B I l $\Rightarrow$ $F_L = C\,B^2\,l^2\,\alpha$

Εφαρμόζοντας αυτή τη στιγμή το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΑΓ:

$\sum F = m\,\alpha \Rightarrow mg - F_L = m\,\alpha \Rightarrow mg - C\,B^2\,l^2\,\alpha = m\,\alpha \Rightarrow a = \dfrac{mg}{m + B^2 l^2 C} = s\,t\,a\,q$

Β) Προφανώς $E_{\varepsilon\pi}$ = Β υ l και αφού υ = α t ⇒ $E_{\varepsilon\pi}$ = Β l α t ⇒

$$E_{ep} = Bl\frac{mg}{m+B^2l^2C}t\,,$$

Ενώ το φορτίο του πυκνωτή: q = C B υ l ⇒ q = C B l υ t ⇒

$$q = \frac{CBlmg}{m+B^2l^2C}t$$

2ος τρόπος υπολογισμού της $E_{\varepsilon\pi}$ και της δύναμης Laplace

Ισχύει $$E_{ep} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{B}\cdot\vec{A}) \qquad (1)$$

Κατά τη μετακίνηση του αγωγού ΑΓ αυξάνει η μαγνητική ροή που περνάει από το βρόχο ΑΓΔΖ. Τότε, σύμφωνα με το νόμο του ***Lentz*** πρέπει να αναπτυχθεί στο βρόχο ρεύμα τέτοιο που να αντισταθμίζει την αύξηση της μαγνητικής ροής. Τέτοιο ρεύμα είναι αυτό που έχει κατεύθυνση ΖΑΓΔ και δημιουργεί μαγνητική ροή αντίθετη της προηγούμενης ώστε να αντισταθμίσει τη μεταβολή (κατεύθυνση από τη σελίδα προς εμάς).

Από τον Β κανόνα του Kirchhoff (φορά διαγραφής όμοια με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού) έχουμε:

$$V_c - E_{ep} = 0 \Rightarrow V_c = E_{ep} \qquad (2)$$

Από την (1)

$$E_{ep} = -\frac{d}{dt}(\vec{B}\cdot\vec{A}) = -\frac{d}{dt}\left(BA\cos 180^o\right) = -\frac{d}{dt}\left(BA(-1)\right) = \frac{d}{dt}\left(BA\right) = B\frac{dA}{dt} = B\frac{\mathbf{l}dx}{dt} = B\mathbf{l}u$$

Από αυτήν και τη (2) έχουμε:

$$V_c = \frac{q}{C} = B\mathbf{l}u \Rightarrow q = CB\mathbf{l}u$$

και

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(CB\mathbf{l}u\right) = CB\mathbf{l}\frac{du}{dt} = CB\mathbf{l}a$$

Αφού ο αγωγός ΑΓ διαρρέεται από ρεύμα $I = CB\mathbf{l}a$ με κατεύθυνση από το Α προς το Γ και είναι μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ θα υφίσταται δύναμη Laplace:

$$F_L = I\vec{\mathbf{l}}\times\vec{B} = \left(I\mathbf{l}B\sin 90^o\right)\hat{y} = I\mathbf{l}B\hat{y} = CB\mathbf{l}a\,\mathbf{l}B\hat{y} \Rightarrow$$

$$F_L = CB^2\mathbf{l}^2a$$

με κατεύθυνση προς τα πάνω (+Υ κατεύθυνση)

…………*από εδώ και πέρα ακριβώς τα ίδια όπως στον 1ο τρόπο λύσης*

Άσκηση 10

Στο κύκλωμα το σχήματος η ράβδος ΑΓ μήκους l = 1 m με μάζα m = 0,5 kg και αντίσταση r = 1 Ω, κινείται με αρχική ταχύτητα $υ_0$ = 10 m.s^{-1}, ολισθαίνοντας πάνω στους αγωγούς xx' και yy' (αμελητέας αντίστασης). Δίνονται επίσης: R = 4 Ω και B = 1 T. Τη χρονική στιγμή 0 ασκείται στον αγωγό εξωτερική δύναμη $F_{εξ}$ τέτοια ώστε ο αγωγός να επιταχύνεται με α = 2 m.s^{-2}.

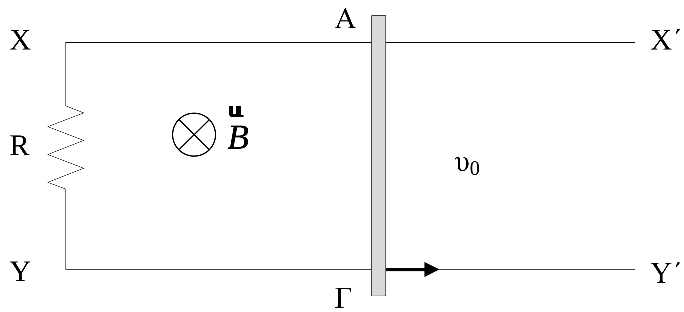
Α) Να βρεθεί η $Ε_{επ}$ που αναπτύσσει η ράβδος συναρτήσει του χρόνου.

Β) Να βρεθεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα συναρτήσει του χρόνου και να γίνει γραφική παράσταση.

Γ) Να βρεθεί η $F_{εξ}$ που πρέπει να ασκείται στη ράβδο ώστε να κινείται με την επιτάχυνση αυτή.

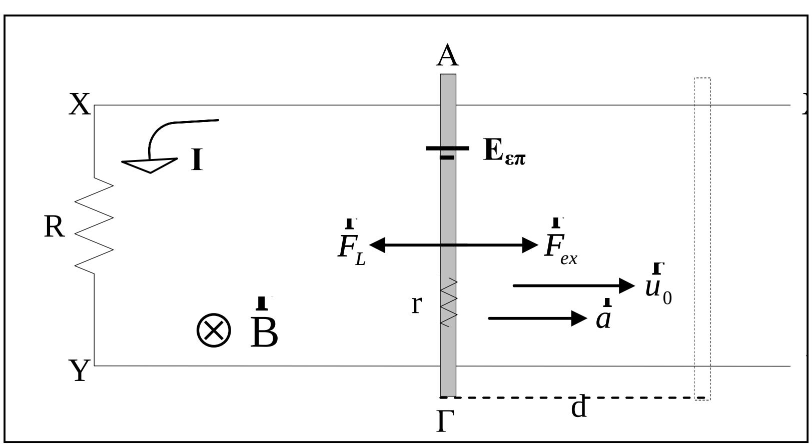
Δ) Να βρεθεί το φορτίο που θα περάσει από κάποια διατομή του αγωγού σε χρόνο t = 5 s.

Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.



Λύση

Α) Η ράβδος με την κίνησή της στο ομογενές μαγνητικό πεδίο, δημιουργεί $Ε_{επ}$ με πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα.



$E_{επ}$ = B υ l ⇒ $E_{επ}$ = B ($υ_0$ + γ t) l ⇒ $E_{επ}$ = B $υ_0$ l + B l α t ⇒ $E_{επ}$ (V) = 10 + 2 t(s).B)

Β) Εφαρμογή του 2^ου^ κανόνα Kirchhoff στο βρόχο προκύπτει:

$E_{επ}$ – I R – I r = 0 ⇒ $I = \dfrac{E_{ep}}{R+r} \Rightarrow I = \dfrac{Bu_0 l + Blgt}{R+r} \Rightarrow I(A) = 2 + 0{,}4t(s)$

και με φορά που δίνεται στο σχήμα.

Γ) Λόγω του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο και του μαγνητικού πεδίου που υπάρχει στο χώρο, στη ράβδο, εκτός της $\vec{F}_{ex}$ θα ασκείται $\vec{F}_L$ με φορά που φαίνεται στο σχήμα και μέτρο

F_L = B I l ⇒ F_L (N) = 2 + 0,4 t(s)

Η εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής στη ράβδο δίνει:

∑ F = m α ⇒ F_{ex} - F_L = m α ⇒ F_{ex} = m γ + F_L ⇒ F_{ex} (N) = 1 + 2 + 0,4 t(s) ⇒

F_{ex} (N) = 3 + 0,4 t(s)

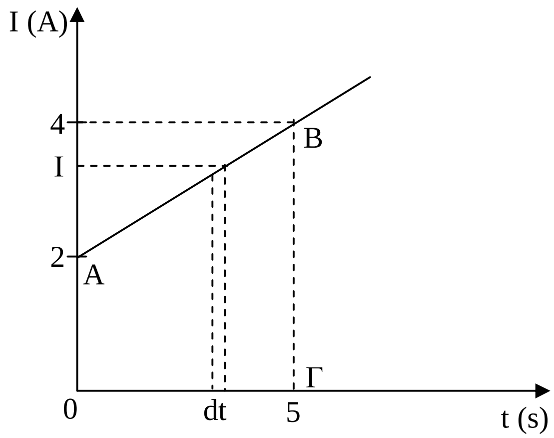
Όταν η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται, το φορτίο που περνά από μία διατομή του αγωγού σε χρόνο t μπορεί να βρεθεί με δύο τρόπους:

1^ος^ τρόπος

$$Q = \int_0^5 I \cdot dt = \int_0^5 \left(2 + 0,4t\right) \cdot dt = \int_0^5 2 \cdot dt + \int_0^5 0,4t \cdot dt = 2t\Big|_0^5 + 0.2t^2\Big|_0^5 = \left(10 + 5\right)C = 15C$$

2^ος^ τρόπος

Από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης του ρεύματος με το χρόνο: Σε στοιχειώδη χρόνο dt θα περνά φορτίο dq = I dt, που στη γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε στοιχειώδες εμβαδόν dS. Έτσι το συνολικό φορτίο που περνά σε χρόνο t = 5 s θα είναι $Q = \int dq = \int_0^t I \cdot dt$ δηλαδή αριθμητικώς ίσο με το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζει η γραφική παράσταση σε χρόνο t = 5 s: q = ΟΓ (ΟΑ + ΟΒ)/2 ⇒ q = 5 s (2+4)Α/2 = 15 C.



3^{ος} τρόπος

Επειδή το φορτίο που περνά από το κύκλωμα είναι επαγωγικό, ισχύει ο τύπος $q = \Delta\Phi/R_{ολ} \Rightarrow q = \Delta\Phi/(R + r)$ (1).

Η μεταβολή της ροής Φ κατά την κίνηση της ράβδου θα είναι ΔΦ = Β ΔS όπου ΔS το εμβαδόν που σχηματίζει η κίνηση της, σε χρόνο t = 5 s (σχήμα). Επομένως

ΔΦ = B l x

όπου $x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow x = 75cm$. Άρα

$$q = \frac{Blx}{R+r} \Rightarrow q = 15\,\text{C}.$$

Σημείωση 1:

Σύντομη απόδειξη της (1)

$$Q = \int_0^Q dq = \int_0^t I \cdot dt = \int_0^t \frac{E_{επ}}{R_{ολ}} \cdot dt = \int_0^t \frac{\frac{d\Phi}{dt}}{R_{ολ}} \cdot dt = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{1}{R_{ολ}} \cdot d\Phi = \frac{1}{R_{ολ}} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{1}{R_{ολ}}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) = \frac{1}{R_{ολ}} \cdot \Delta\Phi$$

Σημείωση 2:

Ο τρόπος υπολογισμού της $E_{επ}$ και της δύναμης Laplace μπορούν να γίνουν όπως και στην υπόδειξη της Άσκησης 9