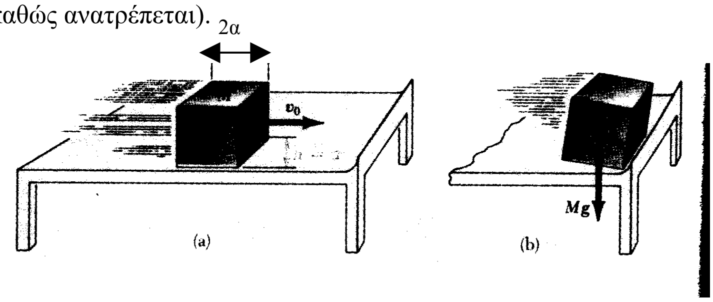
Θέμα 1

A) Ένας στερεός κύβος ακμής 2α και μάζας Μ γλιστράει σε μια λεία (χωρίς τριβές) επιφάνεια τραπεζιού με σταθερή ταχύτητα υ_o . Στη συνέχεια χτυπά σε ένα μικρό εμπόδιο στην άκρη του τραπεζιού, που κάνει τον κύβο να γείρει. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της u_0 έτσι ώστε ο κύβος να ανατραπεί. Δίδεται η ροπή αδράνειας του κύβου ως προς μια ακμή του $I=8M\alpha^2/3$.
(**Υπόδειξη**: Ο κύβος υφίσταται μια μη ελαστική κρούση στο άκρο του τραπεζιού και στην συνέχεια κάνει περιστροφή καθώς ανατρέπεται).



(12 μονάδες)

Λύση

Αμέσως μετά την κρούση ο κύβος εκτελεί περιστροφική κίνηση με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω. Θα ανατραπεί εάν φθάσει σε τέτοια θέση, περιστρεφόμενος ως προς μια ακμή του, ώστε ο φορέας του βάρους να τέμνει την ακμή.
Τότε ισχύει:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mga(\sqrt{2}-1) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{8Ma^2}{3}\omega^2 = Mga(\sqrt{2}-1) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6}{8}\cdot\frac{g}{a}(\sqrt{2}-1)} \qquad (1)$$

(Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο του τραπεζιού οπότε η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του κύβου από την αρχική θέση στην θέση ανατροπής είναι: $Mga\sqrt{2} - Mga = Mga(\sqrt{2}-1)$).
Κατά τη διάρκεια της κρούσης οι δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι εσωτερικές άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής. Οπότε:
Εάν $Mv_0\alpha$ είναι η στροφορμή του κύβου πριν την κρούση και Ιω αμέσως μετά την κρούση ισχύει:

$$Mv_0a = I\omega \Rightarrow Mv_0a = \frac{8Ma^2}{3}\cdot\left(\frac{6}{8}\frac{g}{a}(\sqrt{2}-1)\right)^{1/2} \Rightarrow v_0 = \left(\frac{8^2a^2}{3^2}\frac{6}{8}\frac{g}{a}(\sqrt{2}-1)\right)^{1/2}.$$

$$\Rightarrow v_0 = [\frac{16}{3}ga(\sqrt{2}-1)]^{1/2}$$

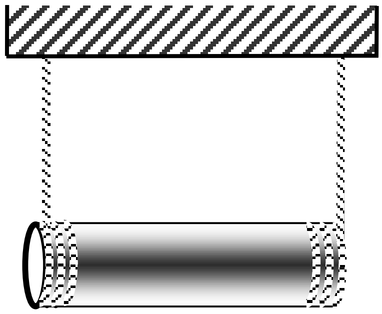
B) Ένας παρατηρητής βρίσκεται μέσα σε ένα κλειστό όχημα που κινείται στο οριζόντιο επίπεδο. Προτείνετε ένα πείραμα το οποίο θα εκτελούσε ο παρατηρητής και θα μπορέσει να αντιληφθεί εάν το όχημα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ή αν κινείται ευθύγραμμα ομαλά.

(8 μονάδες)

Λύση

Θα μπορούσε παραδείγματος χάριν να κρεμάσει από την οροφή ένα αντικείμενο. Αν το αντικείμενο κρεμόταν κατακόρυφα τότε διαπιστώνει ότι δεν χρειάζεται να εισάγει καμιά υποθετική δύναμη για να περιγράψει την ισορροπία του σώματος. Άρα το σύστημά του είναι αδρανειακό. Αν το νήμα παρουσιάζει κλίση με την κατακόρυφο τότε πρέπει να υποθέσει μια επιπλέον δύναμη η οποία είναι ίση με $-m\cdot\vec{a}$ όπου m η μάζα του αντικειμένου και $\vec{a}$ η επιτάχυνση του βαγονιού.

Θέμα 2



Α) Ένας κύλινδρος μήκους l και ακτίνας R έχει μάζα M. Γύρω από τον κύλινδρο τυλίγονται δύο νήματα, ένα σε κάθε άκρη και τα άκρα των νημάτων στερεώνονται στην οροφή. Ο κύλινδρος οριζοντιώνεται, με τα δύο νήματα ακριβώς κατακόρυφα, όπως δείχνει το σχήμα, και αφήνεται ελεύθερος. Βρείτε την τάση των νημάτων καθώς ξετυλίγονται και προσδιορίστε τη γραμμική επιτάχυνση του κυλίνδρου κατά την πτώση του.
Δίδεται ότι η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I=(1/2)MR^2$.

(12 μονάδες)

Λύση

Έστω α και a, η γραμμική και γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου, αντίστοιχα. Κατά την κίνησή του, θα ισχύουν οι εξής εξισώσεις:

$$Mg - 2T = M\alpha \Rightarrow \alpha = (Mg - 2T)/M \qquad (1)$$

$$TR + TR = I\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{a} = 2TR/I = 2TR/(1/2)MR^2 \Rightarrow \mathrm{a} = 4T/MR \qquad (2)$$

Οι δύο επιταχύνσεις, α και a, συνδέονται με τη σχέση: $\alpha = \mathrm{a}R$, (3)
η οποία λόγω των (1) και (2) γίνεται:

$$\alpha = 4TR/MR \Rightarrow (Mg - 2T)/M = 4T/M \Rightarrow 6T = Mg \Rightarrow T = Mg/6 \qquad (4)$$

Η (2) λόγω της (4) γίνεται: $\mathrm{a} = 4\mathrm{Mg}/6\mathrm{MR} = 2\mathrm{g}/3\mathrm{R}$ (5)
Η (3) λόγω της (5) γίνεται: $\alpha = \mathrm{a}R = 2gR/3R = 2g/3$

Β) Σφαιρικός αστέρας μάζας Μ και ακτίνας R περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που συμπίπτει με μια διάμετρό του. Κάποια χρονική στιγμή αφού έχει εξαντλήσει τα πυρηνικά του καύσιμα, υφίσταται βαρυτική κατάρρευση και όλη η μάζα του συγκεντρώνεται σε σφαίρα ακτίνας r ($r \ll R$). Βρείτε την τελική γωνιακή του ταχύτητα περιστροφής (διεύθυνση, φορά και μέτρο). Κατά την βαρυτική κατάρρευση στον αστέρα ασκούνται μόνο εσωτερικές δυνάμεις και η μάζα του παραμένει ίδια.
Δίδεται ότι η ροπή αδρανείας μιας σφαίρας ως προς μια διάμετρό της είναι $I=(2/5)MR^2$.

(8 μονάδες)

Λύση

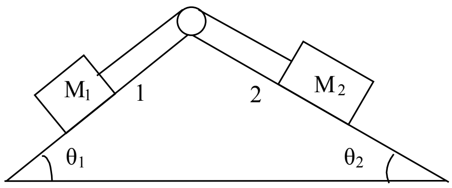
Προφανώς η ολική στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Έχουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Leftrightarrow \frac{2}{5}MR^2 \cdot \vec{\omega}_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{2}{5}Mr^2 \cdot \vec{\omega}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Leftrightarrow \vec{\omega}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \vec{\omega}_{\pi\rho\iota\nu}$$

Επομένως η γωνιακή ταχύτητα έχει ίδια φορά και διεύθυνση όπως και πριν την κατάρρευση αλλά μέτρο σημαντικά μεγαλύτερο.

Θέμα 3

A) Δύο κεκλιμένα επίπεδα που σχηματίζουν γωνίες θ_1 και θ_2 με το οριζόντιο επίπεδο έχουν μη λείες επιφάνειες. Δύο σώματα με μάζες M_1 και M_2 συνδέονται μέσω αβαρούς νήματος και τροχαλίας που περιστρέφεται χωρίς τριβές όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι συντελεστές στατικής τριβής μεταξύ των επιπέδων με τις βάσεις των δύο σωμάτων είναι μ_1 και μ_2 αντίστοιχα Βρείτε τη σχέση μεταξύ των μεγεθών M_1, M_2, θ_1, θ_2, μ_1 και μ_2 έτσι ώστε η μάζα M_1 μόλις να αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω στο επίπεδο 1.



(10 μονάδες)

Λύση

Ανάλυση δυνάμεων σε άξονες (παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και κάθετο σ΄αυτόν) και για τα δύο σώματα.
Αν το M_1 αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω η δύναμη $M_1 g \sin\theta_1$ θα είναι ίση με την τάση του νήματος T και την δύναμη τριβής, δηλαδή
$M_1 g \sin\theta_1 = T + \mu_1 M_1 g \cos\theta_1$ (1)
Σ΄αυτή την περίπτωση το M_2 θα αρχίζει να ολισθαίνει προς τα πάνω και τότε η τάση του νήματος T θα είναι ίση με την $M_2 g \sin\theta_2$ συνιστώσα του βάρους και την δύναμη τριβής, δηλαδή
$T = M_2 g \sin\theta_2 + \mu_2 M_2 g \cos\theta_2$ (2)
Άρα τελικά από (1) και (2) ισχύει
$M_1 \sin\theta_1 - \mu_1 M_1 \cos\theta_1 = M_2 \sin\theta_2 + \mu_2 M_2 \cos\theta_2$

B) Χορεύτρια στον πάγο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0. Τι θα συμβεί εάν ξαφνικά η χορεύτρια, καθώς περιστρέφεται, εκτείνει τα χέρια της; Συγκεκριμένα δείξτε ότι η γωνιακή της ταχύτητα θα μεταβληθεί. Εκφράστε το λόγο της αρχικής προς την τελική γωνιακή ταχύτητα συναρτήσει των ροπών αδρανείας ως προς τον άξονα περιστροφής. Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής ελαττώνεται. Που καταναλώθηκε η ενέργεια;

(10 μονάδες)

Λύση

Κατά την περιστροφή δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές με αποτέλεσμα η στροφορμή της χορεύτριας να διατηρείται. Επομένως:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2}$$

Αλλά $I_1 < I_2$ επομένως $\omega_1 > \omega_2$
Επίσης:

$$E_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{I_1\omega_1}{I_2}\right)^2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{I_1^2\omega_1^2}{I_2^2} = \frac{1}{2}\frac{I_1^2\omega_1^2}{I_2} = \frac{1}{2} I_1^2 \omega_1^2 \frac{I_1}{I_2}$$

Επειδή $I_1 < I_2$ έχουμε ότι $E_1 > E_2$. Άρα η κινητική ενέργεια μειώνεται κατά την έκταση των χεριών της χορεύτριας. Η ενέργεια καταναλώθηκε για την απομάκρυνση των χεριών της χορεύτριας από το σώμα της.

:

Θέμα 4

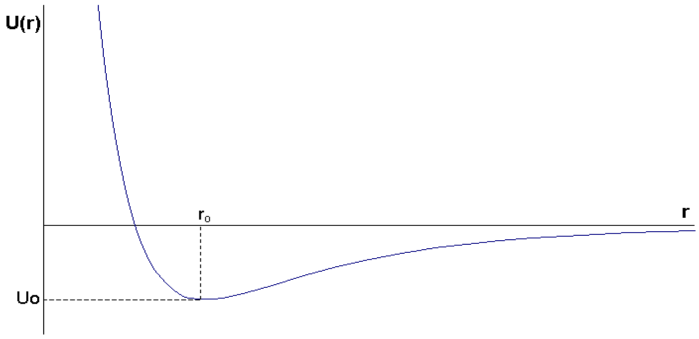
Α) Η δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί σε ένα διατομικό μόριο δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $U(r) = U_o\left[\left(\frac{r_o}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_o}{r}\right)^{6}\right]$

όπου U_o και r_o θετικές σταθερές και r η απόσταση των δύο ατόμων.

α) Βρείτε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ένα άτομο στο άλλο συναρτήσει της απόστασής τους r.

β) Σε ποια απόσταση μπορεί να ισορροπήσει το σύστημα των δύο ατόμων και τι είδους ισορροπία είναι αυτή;

γ) Πόση ενέργεια χρειάζεται για να διασπαστεί το μόριο; (Δηλαδή πόση κινητική ενέργεια πρέπει να δώσουμε στα άτομα ενώ βρίσκονται στη θέση ισορροπίας για να μπορέσουν να απομακρυνθούν σε ικανή απόσταση ώστε να μην αλληλεπιδρούν ασκώντας δυνάμεις μεταξύ τους).



(12 μονάδες)

Λύση

Σχήμα

α) $\vec{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{r} = U_o\left[12\left(\frac{r_o}{r}\right)^{12}\frac{1}{r} - 12\left(\frac{r_o}{r}\right)^{6}\frac{1}{r}\right] = 12\frac{U_o}{r}\left(\frac{r_o}{r}\right)^{6}\left[\left(\frac{r_o}{r}\right)^{6} - 1\right]\hat{r}$

$\Rightarrow \vec{F} = 12\frac{U_o}{r}\left(\frac{r_o}{r}\right)^{6}\left(\frac{r_o^6 - r^6}{r^6}\right)\hat{r}$

β) $\vec{F} = 0$ για $r = r_0$

γ) $U(r_o) = U_o(1-2) = -U_o$

Δηλαδή πρέπει να δώσουμε ενέργεια U_o για να διασπαστεί το μόριο.

Β) Εξηγείστε γιατί κατά την διάρκεια ενός αυτοκινητικού δυστυχήματος το άνοιγμα του αερόσακου σώζει την ζωή μας.

(8 μονάδες)

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η μέση δύναμη που θα ασκηθεί στον επιβάτη για την ακινητοποίησή του είναι:

$<F> = m\frac{\upsilon}{\Delta t}$ όπου υ η ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο λίγο πρίν την σύγκρουση και Δt ο χρόνος που χρειάζεται για να ακινητοποιηθεί ο επιβάτης.

Λόγω του αερόσακου ο χρόνος που χρειάζεται για να ακινητοποιηθεί ο επιβάτης είναι σημαντικά μεγαλύτερος από ότι χωρίς αερόσακο. Έτσι η μέση δύναμη που ασκείται στον επιβάτη είναι μικρότερη και επομένως λιγότερα τα τραύματα που θα υποστεί.

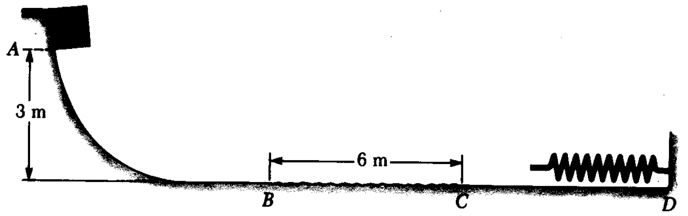
Θέμα 5

Α) Ένα σώμα μάζας m=10 kgr αφήνεται ελεύθερο από το σημείο A πάνω στη διαδρομή ABCD όπως φαίνεται στο σχήμα.
Η διαδρομή είναι λεία (χωρίς τριβές) εκτός από το τμήμα BC μήκους 6m. Το σώμα κινείται, κτυπά ένα ελατήριο σταθεράς k=2250 N/m και στιγμιαία ακινητοποιείται όταν το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά 0.3m. Υπολογίστε:

I) Το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του τμήματος BC και του σώματος.

II) Την ταχύτητα του σώματος όταν το ελατήριο επανέλθει στο φυσικό του μήκος.

Δίδεται $g=10m/sec^2$.



(10 μονάδες)

Λύση

I)

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2 + nmgS_{BC} \Leftrightarrow n = \frac{mgh - \frac{1}{2}kx^2}{mgS_{BC}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 3 - \frac{1}{2}2250 \cdot 0.3^2}{10 \cdot 10 \cdot 6} \approx 0.33$$

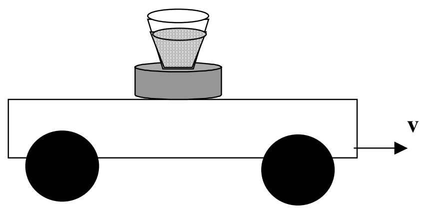
II)

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x = \sqrt{\frac{2250}{10}} \cdot 0.3 = 4.5ms^{-1}$$

Β) Βαγόνι κινείται με σταθερή ταχύτητα και χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, Πάνω στο βαγόνι υπάρχει θερμαντήρας που ζεσταίνει ένα δοχείο με νερό όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια χρονική στιγμή το νερό αρχίζει να βράζει και οι ατμοί του νερού εγκαταλείπουν το δοχείο με μηδενική σχεδόν ταχύτητα ως προς ακίνητο παρατηρητή.. Βρείτε αν θα αλλάξει η ταχύτητα του οχήματος στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

I) η αρχική ταχύτητα του οχήματος είναι μηδέν,

II) η αρχική ταχύτητα είναι μεγαλύτερη του μηδενός.



(10 μονάδες)

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι δεν εφαρμόζονται εξωτερικές δυνάμεις (εκτός του βάρους και της αντίδρασης του δαπέδου που έχουν συνισταμένη μηδέν) τότε η ολική ορμή διατηρείται. Αν m μάζα του συστήματος πριν το νερό να αρχίσει να βράζει και m΄ η μάζα του συστήματος αφού έχει απομακρυνθεί μια ποσότητα ατμών τότε: $m \cdot v = m'v'$

Επειδή όμως m΄<m συμπεραίνουμε ότι v΄>v.

Πιο αναλυτικά θα μπορούσε να πει κανείς:

Αν υποθέσουμε ότι Μ είναι η μάζα του βαγονιού και m η μάζα του νερού και ότι ο ρυθμός με τον οποίο απομακρύνονται οι ατμοί είναι σταθερός ρ (ρ>0) έχουμε:

$$\frac{dm}{dt} = -\rho \Leftrightarrow m = m_0 - \rho \cdot t$$

$$t_f = \frac{m_0}{\rho}$$

:

Δηλαδή από χρόνο 0 έως t_f η μάζα του συστήματος μεταβάλλεται. Αν δεν εφαρμοστούν εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα έχουμε:

$0 \le t < t_f$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=0 \Leftrightarrow \frac{d((M+m)\cdot\vec{\upsilon})}{dt}=0 \Leftrightarrow \frac{dm}{dt}\vec{\upsilon}+\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}(M+m)=0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=-\frac{\vec{\upsilon}}{(M+m)}\frac{dm}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{\vec{\upsilon}}d\vec{\upsilon}=\frac{1}{(M+m)}\rho\cdot dt \Leftrightarrow$$

$$\ln\upsilon=-\int\frac{(-\rho)}{(M+m_0-\rho\cdot t)}dt \Leftrightarrow \ln\upsilon=-\ln(M+m_0-\rho\cdot t)+C' \Leftrightarrow$$

$$e^{\ln\upsilon}=e^{-\ln(M+m_0-\rho\cdot t)}\cdot C \Leftrightarrow \upsilon=\frac{1}{M+m_0-\rho\cdot t}C \Leftrightarrow \upsilon=\frac{(M+m_0)}{M+m_0-\rho\cdot t}v$$

$t_f \le t$

Η ταχύτητα παραμένει σταθερή και ίση με $u=\frac{M+m_0}{M}v$

Προφανώς όταν η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν η ταχύτητα δεν αλλάζει.

Θέμα 6

A) Ένα σώμα έχει μάζα m και κινείται κατά τον άξονα των x ενώ ασκείται πάνω του συνεχώς μια διατηρητική δύναμη που κατευθύνεται κατά τον θετικό άξονα των x . Αν η κινητική ενέργεια K του σώματος δίνεται από τη σχέση : $K=\frac{1}{2}\lambda t^2$, όπου t είναι ο χρόνος και λ μία σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου, να βρεθεί το μέτρο της δύναμης και η ταχύτητα του σώματος για κάθε χρονική στιγμή.

(10 μονάδες)

Λύση

$$\frac{1}{2}\lambda t^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon=\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\cdot t \Rightarrow a=\sqrt{\frac{\lambda}{m}}$$

Δηλαδή η επιτάχυνση είναι σταθερή και θετική, επομένως η δύναμη είναι σταθερή και θετική με μέτρο $F=m\cdot a=\sqrt{\lambda\cdot m}$

B) Το γυάλινο πάτωμα ενός ανελκυστήρα μπορεί να συγκρατεί ένα σώμα μάζας M, όταν ο ανελκυστήρας ηρεμεί. Παρατηρήθηκε ότι όταν ο ανελκυστήρας ανέρχεται επιταχυνόμενος με κατακόρυφη επιτάχυνση, a, το γυάλινο πάτωμα σπάει. Εξηγήσετε το φαινόμενο. (Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα).

(10 μονάδες)

Λύση

Η δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο είναι το βάρος και η αντίδραση από το πάτωμα. Ισχύει:

$A-B=m\cdot a \Rightarrow A=B+m\cdot a$

Δηλαδή η δύναμη από το δάπεδο (και επομένως η δύναμη που ασκεί ο άνθρωπος στο γυάλινο πάτωμα) είναι μεγαλύτερη από ότι όταν ο ανελκυστήρας ηρεμεί κατά, $m\cdot a$. Προφανώς η επιτάχυνση είναι τέτοια ώστε η δύναμη να γίνει τόσο μεγάλη και να σπάσει τελικά το γυάλινο πάτωμα.