Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = -\hat{i}+2\hat{j}$ και $\vec{b} = 2\hat{i}+2\hat{j}$.

a. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{c}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{b}$ τέτοιο ώστε $\vec{c}\cdot\hat{j} > 0$ και $|\vec{c}| = 2\sqrt{2}$.
b. Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας του $\vec{a}$ με το $\vec{c}$.
c. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\vec{b}$ και $\vec{c}$.
d. Να βρεθούν οι πραγματικοί λ και μ τέτοιοι ώστε $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

<u>Λύση</u>

(α′) Έστω $\vec{c} = c_1\hat{i}+c_2\hat{j}$. Τότε

$$\vec{c} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{c}\cdot\vec{b} \Rightarrow 2c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

Άρα $\vec{c} = -k\hat{i}+k\hat{j}$.

$$\vec{c}\cdot\hat{j} > 0 \Rightarrow k > 0$$

$$|\vec{c}| = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2k^2 = 8 \Rightarrow |k| = 2$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις $k = 2$ οπότε

$$\vec{c} = -2\hat{i}+2\hat{j}$$

(β′)

$$\cos(\vec{a},\vec{c}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{(-\hat{i}+2\hat{j})\cdot(-2\hat{i}+2\hat{j})}{|-\hat{i}+2\hat{j}||-2\hat{i}+2\hat{j}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(γ′)

$$E = \frac{1}{2}|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(4+4)\hat{k}| = 4$$

(δ') Η σχέση $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ δίνει

$$\lambda(-\hat{i}+2\hat{j}) + \mu(2\hat{i}+2\hat{j}) = -2\hat{i}+2\hat{j}$$

από όπου παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\left.\begin{array}{rcr} -\lambda+2\mu &=& -2 \\ 2\lambda+2\mu &=& 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} \lambda &=& \frac{4}{3} \\ \mu &=& -\frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

Άρα $\vec{c} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

ΘΕΜΑ 2

Α. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

(α) $\int x^2 \sin 2x \, dx$ (β) $\int \frac{1-x}{(x-2)(2x^2-x-6)} dx$

Β. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια χρησιμοποιώντας τον κανόνα του l' Hôpital:

(α) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\tan 2x)}{\ln(\tan 3x)}$ (β) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{3x} - 5x)}{x}$

<u>Λύση</u>

Α.

(α) $\int x^2 \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int 2x\frac{1}{2}\cos 2x \, dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \, dx =$

$-\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

(β) $\int \frac{1-x}{(x-2)(2x^2-x-6)} dx = \int \frac{1-x}{(x-2)^2(2x+3)} dx$

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{2x+3} = \frac{1-x}{(x-2)^2(2x+3)}$$

$$A(x-2)(2x+3) + B(2x+3) + C(x-2)^2 = 1-x$$

$$A(2x^2-x-6) + B(2x+3) + C(x^2-4x+4) = 1-x$$

x^2: $2A + C = 0 \Rightarrow C = -2A$

x: $-A + 2B - 4C = -1$

$-6A + 3B + 4C = 1$

$$\begin{Bmatrix} C=-2A \\ -A+2B+8A=-1 \\ -6A+3B-8A=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} C=-2A \\ 2B+7A=-1 \\ -7A+5B+0=0 \Rightarrow B=\frac{7}{5}A \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} C=-2A \\ \frac{14}{5}A+7A=-1 \\ B=\frac{7}{5}A \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A=-\frac{5}{49} \\ B=\frac{7}{5}A \\ C=-2A \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A=-\frac{5}{49} \\ B=-\frac{1}{7} \\ C=\frac{10}{49} \end{Bmatrix}$$

Άρα

$$\int \frac{1-x}{(x-2)(2x^2-x-6)}dx = -\frac{5}{49}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{7}\int\frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{10}{49}\int\frac{dx}{2x+3} =$$

$$-\frac{5}{49}\ln|x-2| + \frac{1}{7}\frac{1}{x-2} + \frac{5}{49}\ln|2x+3|$$

B.

(α) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\tan 2x)}{\ln(\tan 3x)}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\tan 2x}\,\frac{1}{\cos^2 2x}\,2}{\frac{1}{\tan 3x}\,\frac{1}{\cos^2 3x}\,3}$$ (εφαρμόσαμε τον κανόνα του l' Hôpital)

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin 2x}\,\frac{1}{\cos 2x}\,2}{\frac{1}{\sin 3x}\,\frac{1}{\cos 3x}\,3}$$ (χρησιμοποιήσαμε $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$)

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\,\frac{\sin 3x\cos 3x}{\sin 2x\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\,\frac{\frac{1}{2}\sin 6x}{\frac{1}{2}\sin 4x}$$ (χρησιμοποιήσαμε $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$)

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\,\frac{\sin 6x}{\sin 4x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\,\frac{6\cos 6x}{4\cos 4x}$$ (εφαρμόσαμε ξανά τον κανόνα του l' Hôpital)

$$= \frac{2}{3}\,\frac{6}{4} = 1\,.$$

(β) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(e^{3x}-5x)}\cdot(3e^{3x}-5)}{1}$$ (με τον κανόνα του l' Hôpital)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(3e^{3x}-5)}{(e^{3x}-5x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5}$$ (πάλι ο κανόνας του l' Hôpital)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{27e^{3x}}{9e^{3x}}$$ (ο κανόνας του l' Hôpital για τρίτη φορά)

$$= \frac{27}{9} = 3\,.$$

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4x+4}$$

(α) Να μελετήσετε την $f(x)$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_3^5 f(x)\,dx$ και να σκιαγραφήσετε το αντίστοιχο εμβαδόν στη γραφική παράσταση της $f(x)$.

Λύση

(α) Καταρχάς παρατηρούμε ότι η συνάρτηση γράφεται πιο κομψά ως εξής:

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$$

Πεδίο ορισμού : Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x \in \Re$ εκτός $x = 2$. Σ'αυτό το σημείο η $f(x)$ έχει μια κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \infty .$$

Ρίζες : Η μοναδική ρίζα $f(x) = 0$ είναι $x = 0$.
Εκτός από αυτό παρατηρούμε ότι η $f(x)$ μηδενίσεται για $x \to \pm\infty$, δηλαδή η x-άξονας είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Ακρότατα: Η παράγωγος

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{(x+2)}{(x-2)^3}$$

μηδενίζεται για $x = -2$. Στο σημείο $x = +2$ βρίσκεται (όπως είδαμε πιο πάνω) η κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f(x)$. Στο σημείο $x = -2$ βρίσκεται το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης:

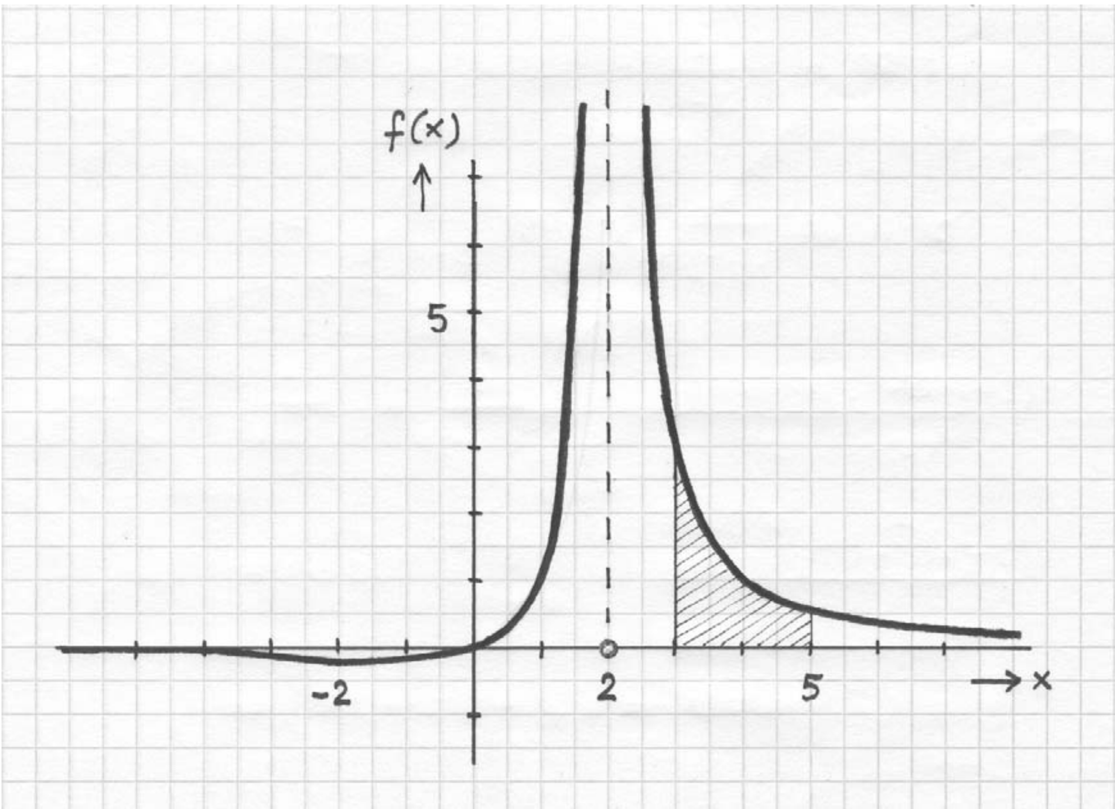
$$f(-2) = \frac{-2}{(-4)^2} = -\frac{1}{8}.$$

Για να επιβεβαιώσουμε ότι πρόκειται πραγματικά για ελάχιστο υπολογίζουμε και την δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = \frac{2(x+4)}{(x-2)^4} \underset{x=-2}{=} \frac{1}{64} > 0 .$$

Στο $x =$ - 4 (όπου $f''(x)$ μηδενίζεται) βρίσκεται ένα **σημείο καμπής**.

Γραφική παράσταση



Το σκιαγραφημένο εμβαδόν ανάμεσα στα $x = 3$ και $x = 5$ αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα $\int_3^5 f(x)\,dx$, το οποίο υπολογίζουμε στο μέρος (β).

(β) Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αναλύουμε την συνάρτηση σε απλά κλάσματα

$$\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}}{(\mathrm{x}-2)^2} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x}-2} + \frac{\mathrm{B}}{(\mathrm{x}-2)^2} = \frac{\mathrm{A(x-2)+B}}{(\mathrm{x}-2)^2}$$

όπου δηλαδή οι συντελεστές A και B καθορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} Ax = x \;\Rightarrow\; A = 1, \\ -2A+B = 0 \;\Rightarrow\; B = 2A = 2. \end{cases}$$

Άρα:

$$\int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 \frac{dx}{x-2} + 2\int_3^5 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$= \left[\ln|x-2|\,\right]_3^5 + 2\left[\frac{-1}{(x-2)}\right]_3^5$$

$$= \ln 3 + \frac{4}{3} \qquad (= 2.43...) \quad \text{τετραγωνικές μονάδες.}$$

Το αντίστοιχο εμβαδόν έχει σκιαγραφηθεί στη γραφική παράσταση της $f(x)$.