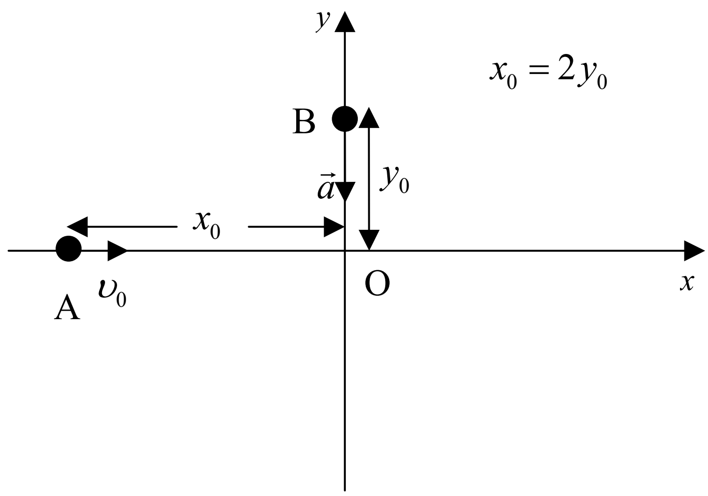
Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (7-7-2007) **Μηχανική**

Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α. Δύο σώματα ίσης μάζας m κινούνται σε οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εάν για $t = 0$ το σώμα Α κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0 και το σώμα Β αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$,

α) ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της επιτάχυνσης ώστε να συγκρουστούν τα δύο σώματα στην αρχή των αξόνων;

β) Ποια θα είναι η ταχύτητα του σώματος Β κατά τη στιγμή της σύγκρουσης; Υποθέστε ότι η αρχική απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο είναι διπλάσια της αρχικής απόστασης του σημείου Β.

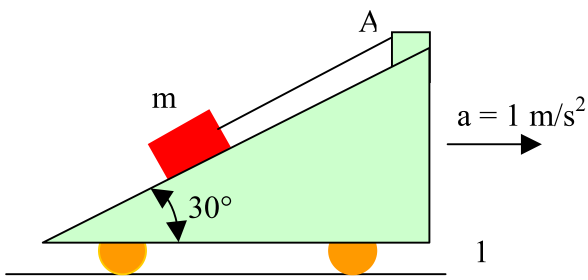
γ) Εάν τα δύο σώματα συγκρουσθούν πλαστικά ποιά θα είναι η διεύθυνση κίνησης και η ταχύτητα του συσσωματώματος `;

Β. Το πρίσμα του σχήματος κινείται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Πάνω στο πρίσμα βρίσκεται σώμα μάζας m=4 kg το οποίο είναι δεμένο μέσω αβαρούς νήματος στο σημείο Α. Η επιφάνεια μεταξύ σώματος και πρίσματος θεωρείται λεία. Υπολογίστε την τάση του νήματος και την κάθετη δύναμη που ασκεί το πρίσμα στο σώμα όταν:

(α) το πρίσμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.

(β) το πρίσμα κινείται με επιτάχυνση 1 m/s^2.

(Δίδεται: g = 10 m/sec^2)



<u>Λύση</u>

Α.

α) Έστω ότι η κρούση των δύο σωμάτων γίνει τη χρονική στιγμή $t = t_0$. Επομένως για $t = t_0$ και τα δύο σώματα θα πρέπει να βρίσκονται στη θέση Ο. Επομένως έχουμε:

Για το σώμα Α: $(OA) = x_0 = \upsilon_0 t_0 \Rightarrow t_0 = \dfrac{x_0}{\upsilon_0}$

Για το σώμα Β: $(OB) = y_0 = \dfrac{1}{2}\alpha t_0^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}x_0 = \dfrac{1}{2}\alpha\left(\dfrac{x_0}{\upsilon_0}\right)^2 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\upsilon_0^2}{x_0}$

β) Η ταχύτητα του σώματος Β κατά τη στιγμή της σύγκρουσης θα είναι

$$\upsilon_B = \alpha t = \frac{\upsilon_0^2}{x_0}\frac{x_0}{\upsilon_0} = \upsilon_0$$

Άρα τα δύο σώματα κατά τη στιγμή της σύγκρουσης θα έχουν το ίδιο μέτρο ταχύτητας υ_0

γ) Για να βρούμε τη διεύθυνση και την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της ορμής.
Η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων αμέσως πριν τη σύγκρουση είναι

Κατά τον άξονα x: $p_x = m_A \upsilon_A = m\upsilon_0$

Κατά τον άξονα y: $p_y = m_B \upsilon_B = -m\upsilon_0$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα μάζας 2m θα έχει ορμή ίση με :

$$p'_x = p_x \Rightarrow 2m\upsilon'_x = m\upsilon_0$$
$$p'_y = p_y \Rightarrow 2m\upsilon'_y = -m\upsilon_0$$

Άρα $\upsilon'_x = \dfrac{\upsilon_0}{2}$ $\quad$ $\upsilon'_y = -\dfrac{\upsilon_0}{2}$ και η τελική ταχύτητα θα έχει μέτρο $\upsilon' = \dfrac{\upsilon_o}{\sqrt{2}}$ και διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x

Β. Το σώμα μάζας 4 kg ακολουθεί την κίνηση της σφήνας και θα έχει την ίδια επιτάχυνση με αυτήν. Πάνω στο σώμα ασκούνται η τάση του νήματος Τ, το βάρος του B=mg και η κάθετη δύναμη από την σφήνα Ν. Αναλύουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα στις x και y συνιστώσες. Η επιτάχυνση a είναι στην οριζόντια κατεύθυνση, (κατά το σχήμα στην κατεύθυνση x).

$$\sum F_x = ma \Rightarrow T\cos 30^\circ - N\sin 30^\circ = ma \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\sin 30^\circ + N\cos 30^\circ - B = 0 \qquad (2)$$

Από την εξίσωση (2) έχουμε

$$N = \frac{mg - T\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην εξίσωση (1) έχουμε

$$T\cos 30^\circ - \left(\frac{mg - T\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\right)\sin 30^\circ = ma \Rightarrow$$

$$T\left(\cos 30^\circ + \frac{\sin^2 30^\circ}{\cos 30^\circ}\right) = ma + mg\tan 30^\circ \Rightarrow$$

$$T(1.155) = ma + mg\tan 30^\circ \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην (4) τις τιμές α = 1 m/s^2, m = 4 kg, και g = 10m/s^2 βρίσκουμε

T=23,46 N και

Τέλος από την (3)

N=32,64 N

Στην περίπτωση που το σύστημα δεν επιταχύνεται, οι εξισώσεις κίνησης γίνονται

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T\cos 30^\circ - N\sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\sin 30^\circ + N\cos 30^\circ - B = 0$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων ως προς T και N παίρνουμε

T = 20 N και N = 34,64 N

ΘΕΜΑ 2

Α. Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου δίνεται από τη σχέση: $V(r) = D\left(-\frac{b}{r} + \frac{b^2}{r^2}\right)$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των ατόμων και D, b, είναι θετικές σταθερές. Το ένα άτομο είναι ακίνητο στη θέση $r = 0$.

α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο.

β) Ποια είναι η θέση ισορροπίας και ποιο το είδος της ισορροπίας;

Β. Σε σωματίδιο μάζας $m = 2\ kg$ ασκείται δύναμη $\vec{F} = 5t\hat{i}\ (N)$ όπου t συμβολίζει το χρόνο. Αν το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, να βρεθεί το έργο που παράγεται από τη δύναμη στα πρώτα 2 s της κίνησής του.

<u>Λύση</u>

Α. α) $\vec{F}(r) = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\hat{r} = -D[br^{-2} + b^2(-2)r^{-3}]\hat{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F}(r) = D\left(-\frac{b}{r^2} + \frac{2b^2}{r^3}\right)\hat{r}$$

β) Οι θέσεις ισορροπίας είναι εκείνες για τις οποίες:

$$\vec{F}(r) = 0 \Rightarrow D\left(-\frac{b}{r^2} + \frac{2b^2}{r^3}\right)\hat{r} = 0 \Rightarrow \frac{b}{r^2} = \frac{2b^2}{r^3} \Rightarrow r = 2b$$

Επομένως η θέση ισορροπίας είναι η $r = 2b$.

Για το χαρακτηρισμό της θέσης αυτής ελέγχουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της $V(r)$:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = D[br^{-2} - 2b^2r^{-3}]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2} = D[-2br^{-3} - 2b^2(-3)r^{-4}] = D\left(-\frac{2b}{r^3} + \frac{6b^2}{r^4}\right)$$

Για $r = 2b$:

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2} = D\left(-\frac{2b}{8b^3} + \frac{6b^2}{16b^4}\right) = D\left(-\frac{1}{4b^2} + \frac{3}{8b^2}\right) = \frac{D}{8b^2} > 0\,.$$

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο και επομένως η θέση $r = 2b$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Β. *1ος τρόπος:*
Από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας προκύπτει:

$$W_F = K_f - K_i = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad (1),$$

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα:

$$F = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \Rightarrow 5t = 2\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\upsilon = \frac{5}{2}t\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\mathrm{d}\upsilon = \frac{5}{2}\int_0^{t}t\mathrm{d}t \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{5}{4}t^2 \quad (2)$$

Επομένως η ταχύτητα του σωματιδίου για $t = 2\ s$ θα είναι $\upsilon = 5\ m/s$.
Άρα αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:
$W_F = 25\ J$

2^{ος} τρόπος:

$$W_F = \int_0^x F\mathrm{d}x = \int_0^x 5t\mathrm{d}x = \int_0^t 5t\upsilon(t)\mathrm{d}t \quad (3)$$

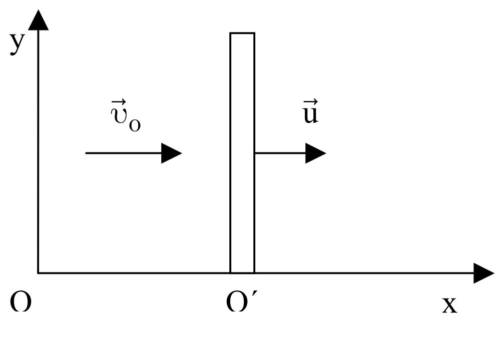
Αντικαθιστώντας την (2) στην (3) προκύπτει:

$$W_F = \int_0^t 5t\frac{5}{4}t^2\mathrm{d}t = \frac{25}{4}\int_0^t t^3\mathrm{d}t = \frac{25}{16}t^4$$

Για $t = 2\ s$, $W_F = 25\ J$

ΘΕΜΑ 3

Κατακόρυφο τοίχωμα πολύ μεγάλης μάζας (πρακτικά άπειρης) κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{u} = u\hat{i}$. Σωματίδιο μάζας m που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o = \upsilon_o\hat{i}$ ($\upsilon_o > |u| > 0$) συγκρούεται με το τοίχωμα ελαστικά. Υπολογίστε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου εάν α) το τοίχωμα κινείται προς τα δεξιά (u > 0) και β) το τοίχωμα κινείται προς τα αριστερά (u<0).



<u>Λύση</u>
α) Στο σύστημα O΄ (που κινείται μαζί με το τοίχωμα) το σωματίδιο έχει ταχύτητα $\upsilon'_o = \upsilon_o - u$.
Επειδή η κρούση είναι ελαστική η ταχύτητά του στο O΄ μετά την κρούση θα γίνει:
$\upsilon' = -\upsilon'_o = u - \upsilon_o$
Στο σύστημα O η νέα του ταχύτητα είναι :

$\upsilon = \upsilon' + u = 2u - \upsilon_o$

Αρχικά $E_o = \frac{1}{2} m\upsilon_o^2$

Τελικά $E = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m(2u - \upsilon_o)^2$. Επομένως

$\Delta E = E - E_o = \frac{1}{2} m(2u - \upsilon_o)^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_o^2 = 2mu(\upsilon_o - u) < 0$

Άρα η κινητική του ενέργεια μειώνεται.

β) Ανάλογα παίρνουμε

$\upsilon_o' = \upsilon_o + u$

$\upsilon' = -\upsilon_o' = -\upsilon_o - u$

$\upsilon = \upsilon' - u = -\upsilon_o - 2u$

$E_o = \frac{1}{2} m\upsilon_o^2$

$E = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m(2u + \upsilon_o)^2$

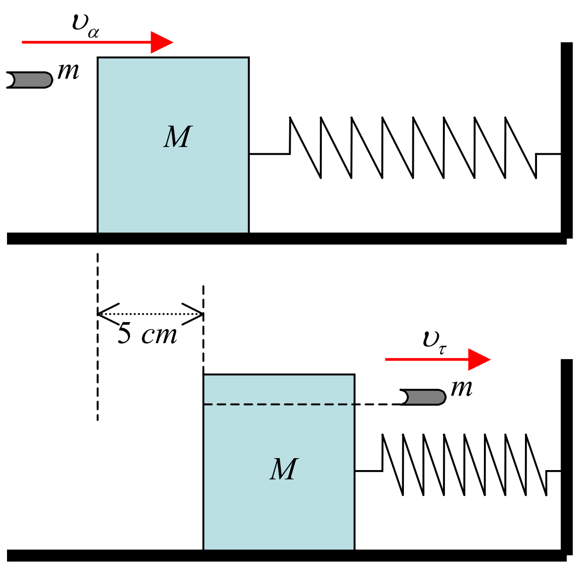
$\Delta E = E - E_o = -2mu(\upsilon_o + u) < 0$

Για $\upsilon_o >> u$ έχουμε $\Delta E = -2m\upsilon_o u$

ΘΕΜΑ 4

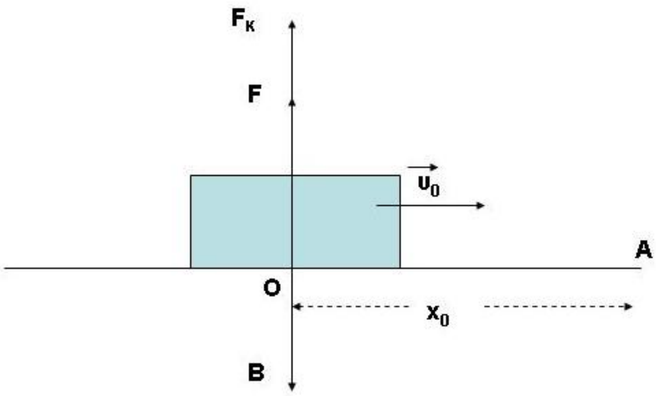
Α. Σώμα μάζας *m* είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής *n*=0.3. Στο σώμα προσδίδεται οριζόντια ταχύτητα υ_0=10m/s και ταυτόχρονα αρχίζει να του ασκείται δύναμη κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω που το μέτρο της δίδεται από τη σχέση $F=kx$, όπου k=0.4 *N/m* και *x* είναι το διάστημα που διανύει το σώμα στο οριζόντιο επίπεδο. Διαπιστώνεται ότι τη στιγμή που το σώμα εγκαταλείπει το επίπεδο η οριζόντια ταχύτητά του είναι η μισή της αρχικής. Ζητείται η μάζα του σώματος.
Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.

Β. Σώμα μάζας $M = 1.0\ kg$ βρίσκεται σε ηρεμία πάνω σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές και από τη μία πλευρά του είναι συνδεδεμένο σε αβαρές ελατήριο σταθεράς $k = 900$ N/m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σφαίρα μάζας $m = 5.0\ g$ και αρχικής ταχύτητας $\upsilon_\alpha = 400$ m/s συγκρούεται και διαπερνά το σώμα εξερχόμενη με ταχύτητα υ_τ. Το σώμα διανύει απόσταση $x = 5.0\ cm$ μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία. (Όλες οι κινήσεις είναι κατά μήκος του άξονα x)
Υπολογίστε:
α) την ταχύτητα με την οποία εξήλθε η σφαίρα.
β) τη διαφορά μηχανικής ενέργειας του συστήματος μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατάστασης.



Λύση

Α.



Έστω ότι το σώμα εγκαταλείπει το επίπεδο στη θέση Α διανύοντας διάστημα x_0 .
Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή Ο→Α έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=W_T\Rightarrow-\frac{3}{8}m\upsilon_0^2=W_T \quad (1)$$

Η τριβή Τ δίνεται από τη σχέση $T=nF_K$, όπου F_K η δύναμη που δέχεται το σώμα από το επίπεδο. Η δύναμη αυτή προσδιορίζεται από τη σχέση :

$$\Sigma F_y=0\Rightarrow F_K+F=B\Rightarrow F_K=mg-kx$$

Με συνδυασμό των δύο προηγούμενων σχέσεων προκύπτει ότι η τριβή είναι μεταβλητή δύναμη μέτρου:

$$T=n(mg-kx) \quad (2)$$

Επιπλέον επειδή στη θέση (Α) το σώμα χάνει την επαφή του με το επίπεδο ισχύει :

$$F_K = 0 \Rightarrow mg - kx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k}$$

Άρα το έργο που καταναλώνει η τριβή είναι:

$$W_T = -\int_0^{mg/k} n(mg - kx)dx \Rightarrow W_T = -\frac{nm^2 g^2}{2K} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει για τη μάζα του σώματος: m=1 kg

Β. α) Κατά τη στιγμή της εξόδου της σφαίρας to σώμα θα έχει αποκτήσει ταχύτητα V. Από την αρχή διατήρησης της ορμής θα έχουμε :

$$m\upsilon_\alpha = MV + m\upsilon_\tau \quad (1)$$

Το σώμα θα κινηθεί επιβραδυνόμενο μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία, οπότε το ελατήριο θα έχει συσπειρωθεί κατά $x = 5.0\ cm$. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα σώμα-ελατήριο παίρνουμε :

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2)$$

Από τη (2) βρίσκουμε την V :

$$V = \sqrt{\frac{kx^2}{M}} = \sqrt{\frac{(900\ N/m)\cdot\left(5.0\times10^{-2}\ m\right)^2}{1.0\ kg}} = ... = 1.5\ m/s \quad (3)$$

Από την εξίσωση (1) και με αντικατάσταση της τιμής του V υπολογίζουμε την τελική ταχύτητα της σφαίρας :

$$\upsilon_\tau = \frac{m\upsilon_\alpha - MV}{m} = \frac{\left(5.0\times10^{-3}\ kg\right)\cdot(400\ m/s) - (1.0\ kg)\cdot(1.5\ m/s)}{5.0\times10^{-3} kg} = 100\ m/s \quad (4)$$

β) Αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος :

$$E_\alpha = \frac{1}{2}m\upsilon_\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(5.0\times10^{-3}\ kg\right)\cdot(400\ m/s)^2 = 400\ J \quad (5)$$

Τελική μηχανική ενέργεια :

$$E_\tau = \frac{1}{2}m\upsilon_\tau^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left(5.0\times10^{-3}\ kg\right)\cdot(100\ m/s)^2 + \frac{1}{2}(900\ N/m)\cdot\left(5.0\times10^{-2}\ m\right)^2$$

$$\approx 25\ J + 1\ J = 26\ J \quad (6)$$

Οπότε οι απώλειες μηχανικής ενέργειας είναι :

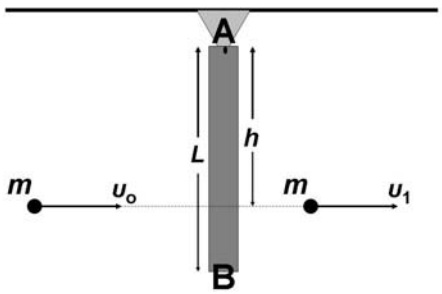
$$\Delta E = E_\alpha - E_\tau = 400J - 26J = 374\ J$$

ΘΕΜΑ 5

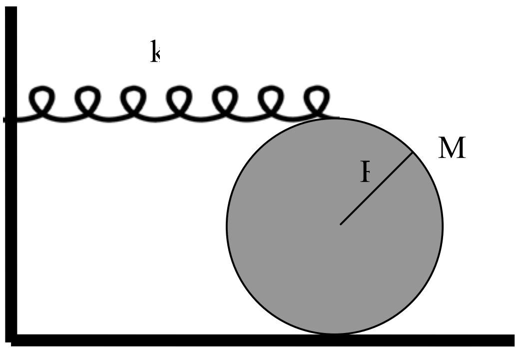
Α. Μια ράβδος μήκους L μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το ένα άκρο της Α. Αρχικά η ράβδος βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση και είναι ακίνητη. Υλικό σημείο μάζας m προσκρούει στη ράβδο με οριζόντια ταχύτητα υ_o , ενώ βγαίνει από αυτή με οριζόντια ταχύτητα υ_1. Το σημείο πρόσκρουσης βρίσκεται σε απόσταση h από το άκρο Α.

(α) Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία αρχίζει να κινείται η ράβδος.

(β) Να βρείτε την ταχύτητα του άκρου Β τη στιγμή την οποία αρχίζει να κινείται η ράβδος. (Δίνεται για τη ράβδο: $I = \frac{1}{3}ML^2$)



Β. Η κορυφή ενός ομογενούς κυλίνδρου μάζας Μ και ακτίνας R στερεώνεται στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου με σταθερά k, ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι κολλημένο σε κατακόρυφο τοίχο, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Αν ο κύλινδρος κυλάει χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, να υπολογίσετε την περίοδο μικρών ταλαντώσεων του κέντρου μάζας του κυλίνδρου γύρω από την θέση ισορροπίας. (*Υπόδειξη:* Να λάβετε υπόψη ότι σε ένα κύλινδρο που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει η μετατόπιση ενός σημείου του κυλίνδρου στην κορυφή του είναι διπλάσια της μετατόπισης του κέντρου του)



<u>Λύση</u>

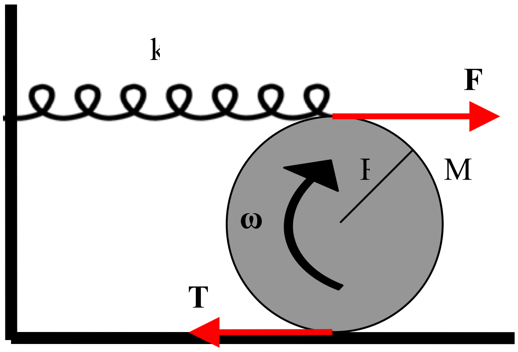
Α.

α) Από διατήρηση στροφορμής ως προς το σημείο Α:

$$m\upsilon_o h = m\upsilon_1 h + I\omega \Rightarrow m\upsilon_o h = m\upsilon_1 h + \frac{1}{3}ML^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{3mh(\upsilon_o - \upsilon_1)}{ML^2}$$

β) $\upsilon_B = \omega L = \dfrac{3mh(\upsilon_o - \upsilon_1)}{ML}$

Β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου,F, και η δύναμη της τριβής από το δάπεδο, Τ. Την κάθετη αντίδραση από το δάπεδο, καθώς και το βάρος του κυλίνδρου τις αγνοούμε εφόσον δίνουν συνισταμένη μηδέν.



Η κίνηση του κέντρου μάζας ακολουθεί τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$M\ddot{x} = F - T \qquad (1)$$

Θεωρούμε τα γωνιακά μεγέθη να είναι θετικά όταν έχουν φορά όπως δείχνεται στο Σχήμα, ενώ τα γραμμικά μεγέθη να είναι θετικά όταν τα αντίστοιχα διανύσματα έχουν φορά προς τα δεξιά. Εφόσον ο κύλινδρος κυλάει χωρίς να ολισθαίνει έχουμε:

$$\dot{x} = R\omega \qquad (2)$$

Η ροπή που ασκείται στον κύλινδρο ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του, οπότε:

$$R(F + T) = I\dot{\omega} \qquad (3)$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (2) και (3) λύνοντας ως προς την δύναμη της τριβής:

$$T = I\frac{\ddot{x}}{R^2} - F$$

και αντικαθιστούμε στην (1):

$$(M + \frac{I}{R^2})\ddot{x} = 2F \qquad (4)$$

Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου ισούται με :

$F = -kx_t$,

όπου x_t η μετατόπιση του σημείου στην κορυφή του κυλίνδρου όπου είναι δεμένο το ελατήριο. Αυτή είναι διπλάσια της μετατόπισης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, x, οπότε η δύναμη επαναφοράς θα είναι:

$F = -2kx$

Αντικαθιστούμε στην (4) και έχουμε:

$$(M + \frac{I}{R^2})\ddot{x} = -4kx \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{4kR^2}{I + MR^2}x = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{8}{3}\frac{k}{M}x = 0\,, \qquad (5)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2}MR^2$

Από την εξίσωση κίνησης (5) έχουμε ότι η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων θα ισούται με:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{8k}}\,.$$