Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (28-7-2007) **Μηχανική**

Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α. Υλικό σώμα μάζας m βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο με μέγιστο συντελεστή στατικής τριβής η και συντελεστή τριβής ολίσθησης μ. Τη χρονική στιγμή $t=0$ αρχίζει να ενεργεί στο σώμα προωστική δύναμη της μορφής $F(t)=\lambda^2 mt$. Μετά από πόσο χρόνο αρχίζει να κινείται το σώμα; Ποια η ταχύτητά του και ποιο το διάστημα που διανύει συναρτήσει του χρόνου;

Β. Ένα άδειο όχημα έχει αρχικά μάζα M_0 και κινείται ευθύγραμμα πάνω σε τροχιές που βρίσκονται σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς τριβές με ταχύτητα u_0. Όταν βρεθεί στη θέση x=0 αρχίζει να πέφτει χιόνι με σταθερό ρυθμό b Kg/s . Υπολογίστε α) τη ταχύτητα που θα αποκτήσει το όχημα σαν συνάρτηση της προστιθέμενης μάζας του χιονιού β)τη θέση του οχήματος σαν συνάρτηση του χρόνου.

<u>Λύση</u>

Α. ο σώμα αρχίζει να κινείται όταν η προωστική δύναμη γίνει ίση με τη δύναμη της τριβής. Έχουμε δηλαδή

$$F_{o\rho}=T\Rightarrow \lambda^2 mt_0=\eta mg\Rightarrow t_0=\frac{\eta g}{\lambda^2} \tag{1}$$

Άρα το σώμα αρχίζει να κινείται μετά από χρόνο $t_0=\dfrac{\eta g}{\lambda^2}$.

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου χρησιμοποιούμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Έχουμε

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F-T=\lambda^2 mt-\mu mg\Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt}=\lambda^2 t-\mu g \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$$\upsilon(t)=\frac{1}{2}\lambda^2\left(t-t_0\right)^2-\mu g\left(t-t_0\right)+C \tag{3}$$

Εφόσον για $t=t_0$ έχουμε $\upsilon=0$ (τότε αρχίζει να κινείται το σώμα) θα είναι $C=0$. Επομένως έχουμε τελικά

$$\upsilon(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 (t - t_0)^2 - \mu g (t - t_0) \tag{4}$$

Ολοκληρώνοντας την εξ. (4) ως προς το χρόνο προκύπτει ότι το διάστημα που διανύει το σώμα συναρτήσει του χρόνου είναι

$$\begin{gathered} x(t) = \int \upsilon(t)\,dt = \int \frac{1}{2}\lambda^2 (t - t_0)^2\,dt - \int \mu g (t - t_0)\,dt = \\ \frac{1}{6}\lambda^2 (t - t_0)^3 - \frac{1}{2}\mu g (t - t_0)^2 \end{gathered} \tag{6}$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$.

B. Θεωρούμε ότι το χιόνι αρχίζει να πέφτει στο όχημα τη χρονική στιγμή t=0. Έστω ότι σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή η μάζα του χιονιού που θα έχει εναποτεθεί στο όχημα είναι m.

$$\vec{p}(t) = (M_0 + m)\vec{u}$$
$$\vec{p}(t + dt) = (M_0 + m + dm)(\vec{u} + d\vec{u})$$
$$d\vec{p} = (M_0 + m)d\vec{u} + \vec{u}dm$$

Εφόσον δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις έχουμε:

$$(M_0 + m)\frac{du}{dt} + u\frac{dm}{dt} = 0$$

$$-\frac{du}{u} = \frac{dm}{M_0 + m} \Rightarrow -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u} = \int_0^m \frac{dm}{M_0 + m} \Rightarrow$$

$$-\ln\frac{u}{u_0} = \ln\frac{M_0 + m}{M_0} \Rightarrow \frac{u_0}{u} = \frac{M_0 + m}{M_0} \Rightarrow u = \frac{M_0 u_0}{M_0 + m}$$

Γνωρίζουμε ότι $u = dx/dt$. Επομένως έχουμε:

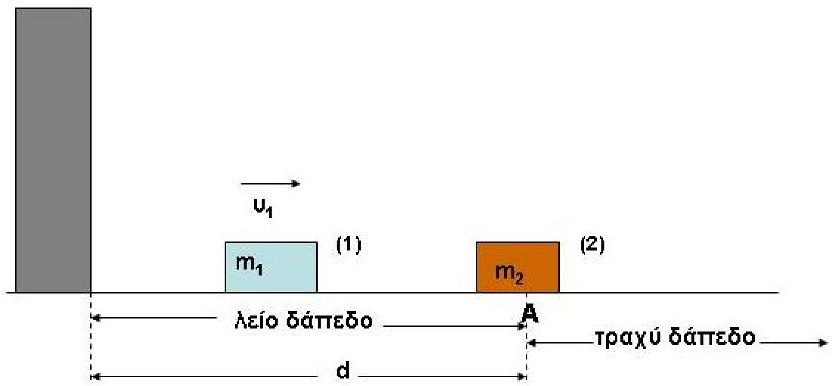
$$\frac{dx}{dt} = \frac{M_0 u_0}{M_0 + bt} \Rightarrow dx = M_0 u_0 \frac{dt}{M_0 + bt} \Rightarrow \int_0^x dx = M_0 u_0 \int_0^t \frac{dt}{M_0 + bt}$$

Ολοκληρώνοντας καταλήγουμε:

$$x = \ln\frac{M_0 u_0}{b}\ln\frac{M_0 + bt}{M_0}$$

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα φαίνονται δύο σώματα (1) και (2), με μάζες m_1=2 *kg* και m_2=8 kg αντίστοιχα, τα οποία αρχικά είναι ακίνητα σε οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα (2) βρίσκεται στο σημείο Α δεξιά του οποίου το δάπεδο είναι τραχύ ενώ αριστερά είναι λείο. Σε απόσταση d=18 *m* αριστερά του σημείου Α βρίσκεται κατακόρυφος τοίχος. Εκτοξεύουμε το σώμα (1) με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, όπως στο σχήμα και τη χρονική στιγμή t=0 αυτό συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα (2). Μετά την κρούση το σώμα (2) κινείται στο τραχύ επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0.2 και σταματά αφού διανύσει διάστημα s_2=4 *m*.
Να υπολογιστεί α) το μέτρο της ορμής του σώματος (2) αμέσως μετά την κρούση των δύο σωμάτων β) η κινητική ενέργεια του σώματος (1) ελάχιστα πριν την κρούση με το σώμα (2) γ) η απόσταση των δύο σωμάτων ελάχιστα πριν την ελαστική κρούση του σώματος (1) με τον κατακόρυφο τοίχο δ) να διερευνήσετε εάν θα γίνει και δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων (1) και (2) θεωρώντας γνωστό ότι και τα δύο σώματα εμφανίζουν με το τραχύ δάπεδο τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης. Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.



Λύση

α) Τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά και αποκτούν ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$ αντίστοιχα. Το σώμα (2) μετά την κρούση κινείται στο τραχύ επίπεδο. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κίνησή του από το σημείο Α μέχρι το σημείο Γ όπου σταματά έχουμε:

$$K_\Gamma - K_A = W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -T_2 s_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \mu N_2 s_2 = \mu m_2 g s_2 \Rightarrow \upsilon_2' = 4\ m/s$$

Άρα η ορμή του σώματος (2) είναι

$$p_2' = m_2\upsilon_2' = 32\ \text{kg}\cdot m/s$$

β) Από την ελαστική μετωπική κρούση έχουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 10\ m/s.$$

Άρα η κινητική ενέργεια του σώματος (1) πριν την κρούση με το σώμα (2) είναι :

$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = 100\ J$

γ) Το σώμα (1) αμέσως μετά την κρούση με το σώμα (2) έχει ταχύτητα:

$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = -6\ m/s$ και φτάνει στον τοίχο τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{d}{|\upsilon_1'|} = 3\ s$

Το σώμα (2) εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, οπότε ισχύει:

$\upsilon = \upsilon_2' - a_2 t$, οπότε για υ=0 $t_2 = \frac{\upsilon_2'}{a_2}$ (1)

Η επιτάχυνσή του προσδιορίζεται από τη σχέση:
$T_2 = m_2 a_2 \Rightarrow \mu m_2 g = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = 2\ m/s^2$. Άρα από τη σχέση (1) το σώμα (2) σταματά τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\upsilon_2'}{a_2} = 2\ s$. Επομένως τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\ s$ (όπου το σώμα (1) έχει φτάσει στον τοίχο) το σώμα (2) απέχει από το σημείο Α απόσταση:

$s_2 = \upsilon_2' t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 4\ m$. Άρα η απόσταση των δύο σωμάτων τη στιγμή που το σώμα (1) φτάνει στον τοίχο είναι: $d_1 = d + s_2 = 22\ m$

δ) Το σώμα (1) ανακλάται στον τοίχο ελαστικά συνεπώς επιστρέφει στο σημείο Α με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα $\upsilon_1' = 6 m/s$ και εισέρχεται στο τραχύ δάπεδο όπου εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Το διάστημα που διανύει μέχρι να σταματήσει υπολογίζεται :

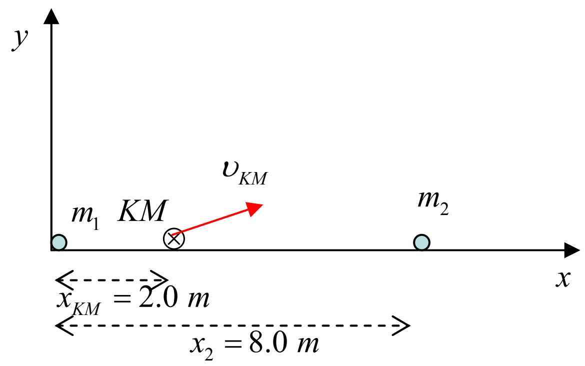
$K_{τελ} - K_{Γ} = W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2 = -T_1 s_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2 = \mu N_1 s_1 = \mu m_1 g s_1 \Rightarrow s_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2\mu g} = 9\ m$

Επειδή $s_1 \succ s_2$ έπεται ότι το σώμα (1) θα συγκρουστεί με το σταματημένο σώμα (2).

.

ΘΕΜΑ 3

Α. Σε κάποια χρονική στιγμή, το κέντρο μάζας (ΚΜ) ενός συστήματος δύο σωματιδίων βρίσκεται πάνω στον άξονα x και σε απόσταση $x_{KM} = 2.0\ m$ από την αρχή ενώ η ταχύτητά του είναι $\vec{\upsilon}_{KM} = (4.0\ m/s)\hat{i} + (3.0\ m/s)\hat{j}$. Το ένα από τα δύο σωματίδια βρίσκεται πάνω στην αρχή των αξόνων. Το άλλο σωματίδιο έχει μάζα $m_2 = 0.10\ kg$ και στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή βρίσκεται σε ηρεμία πάνω στον άξονα *x* και σε απόσταση $x_2 = 8.0\ m$. α) Ποια είναι η μάζα m_1 του σωματιδίου που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων; β) Υπολογίστε το διάνυσμα και το μέτρο της ολικής ορμής του συστήματος. γ) Υπολογίστε το διάνυσμα και το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.



Β. Σωματίδιο Α συγκρούεται ελαστικά με σωματίδιο Β που βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία. Η αρχική και η τελική κίνηση γίνονται στην ίδια ευθεία. Ποιο είναι το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου Α;
Θεωρείστε ότι η μάζα του σωματιδίου Β είναι 1840 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του σωματιδίου Α.

<u>Λύση</u>

Α.

α) Από τη σχέση $x_{KM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$,($M \equiv m_1 + m_2$), που μας δίνει τη συντεταγμένη του κέντρου μάζας στον άξονα x ,και δεδομένου ότι $x_1 = 0\ m$, παίρνουμε :

$$m_1 = m_2\left(\frac{x_2}{x_{KM}} - 1\right) = (0.10\ kg)\left(\frac{8.0\ m}{2.0\ m} - 1\right) = 0.30\ kg$$

β) Η ολική ορμή του συστήματος δίνεται από τη σχέση: $\vec{P}_{KM} = M\vec{\upsilon}_{KM}$. Με αντικατάσταση παίρνουμε :

$$\vec{P}_{KM} = M\vec{\upsilon}_{KM} = (0.40\ kg)\left[(4.0\ m/s)\hat{i} + (3.0\ m/s)\hat{j}\right] = (1.6\ kg\cdot m/s)\hat{i} + (1.2\ kg\cdot m/s)\hat{j}$$

Το μέτρο της ολικής ορμής είναι:

$$\left|\vec{P}_{KM}\right| = M\left|\vec{\upsilon}_{KM}\right| = (0.40\ kg)\left(\sqrt{4^2+3^2}\ \ m/s\right) = 2.0\ kg\cdot m/s$$

γ) Από τη σχέση $M\vec{\upsilon}_{KM} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$ και δεδομένου ότι $\vec{\upsilon}_2 = 0$ παίρνουμε :

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{M}{m_1}\vec{\upsilon}_{KM} = \frac{0.40}{0.30}\left[(4.0\ m/s)\hat{i} + (3.0\ m/s)\hat{j}\right] = (5.3\ m/s)\hat{i} + (4.0\ m/s)\hat{j}$$

Το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας του σωματιδίου είναι :

$$\left|\vec{\upsilon}_1\right| = \frac{M}{m_1}\left|\vec{\upsilon}_{KM}\right| = \frac{0.40}{0.30}\cdot 5\ m/s = 6.7\ m/s$$

Β. Έστω m_1 η μάζα του σωματιδίου Α , m_2 η μάζα του σωματιδίου Β, u_1, u_2 οι αρχικές ταχύτητες τους αντίστοιχα και υ_1, υ_2 οι αντίστοιχες ταχύτητές τους μετά την κρούση.

Από τις αρχές διατήρησης ορμής και κινητικής ενέργειας παίρνουμε:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα και θέτοντας $u_2 = 0$ βρίσκουμε (βλ. «Εισαγωγική Φυσική –Κλασσική Μηχανική», Τόμος Β-Μέρος Β, σχέση 3.48 σελ. 58):

$$\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1$$

Θέτοντας $m_2 = 1840m_1$, βρίσκουμε $\upsilon_1 = -\frac{1839}{1841}u_1$ (1)

Αν E_1, E_2 είναι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου Α πριν και μετά την κρούση αντίστοιχα, το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου Α θα είναι:

$$Q = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2} = 1 - \frac{\upsilon_1^2}{u_1^2} \quad (2)$$

Με αντικατάσταση της (1) στη (2) προκύπτει $Q = 0.0022$ ή 0.22%

ΘΕΜΑ 4

Α. Μια σφαίρα και ένας κύλινδρος ξεκινούν από την ίδια θέση όπου βρίσκονταν σε ακινησία και κυλούν προς τα κάτω (χωρίς να ολισθαίνουν) στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο. Όταν θα διανύσουν το ίδιο μήκος πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής. **(***δίνεται: η ροπή αδρανείας σφαίρας μάζας Μ και ακτίνας R ως προς τον άξονά της,* $I_{\sigma\phi} = \frac{2}{5}MR^2$ *και η ροπή αδρανείας κυλίνδρου μάζας Μ και ακτίνας R ως προς τον άξονά του,* $I_{\kappa\upsilon\lambda} = \frac{1}{2}MR^2$ **).** Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

α) Ο κύλινδρος θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο και αυτό είναι ανεξάρτητο της μάζας και της ακτίνας των δύο αντικειμένων.
β) Το σώμα με τη μεγαλύτερη μάζα θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο.
γ) Θα διανύσουν την απόσταση και τα δύο συγχρόνως, ανεξάρτητα από τη μάζα και την ακτίνα των δύο αντικειμένων.
δ) Η σφαίρα θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο και αυτό είναι ανεξάρτητο της μάζας και της ακτίνας των δύο αντικειμένων.

Β. Μία μάζα κρέμεται από ένα κατακόρυφο ελατήριο και μετατοπίζεται, κατά την κατακόρυφη προς τα κάτω, κατά μία απόσταση *y* από το σημείο ισορροπίας του. Αφού αφεθεί ελεύθερο, εκτελεί μία αρμονική περιοδική κίνηση με περίοδο *T*. Μετά από χρόνο $\frac{5T}{4}$ η ταχύτητα της μάζας είναι (Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας):

α) Μέγιστη και κινείται προς τα πάνω.
β) Σταθερή.
γ) Μέγιστη και κινείται προς τα κάτω.
δ) Μηδέν.

Λύση

Α. Εάν η μετατόπιση στον κατακόρυφο άξονα είναι Δh, τότε ισχύει

$$\left.\begin{array}{r} mg\Delta h = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ \upsilon = \omega R \\ I = KmR^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta h = \frac{g\,\upsilon^2}{2}(K+1) \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2\Delta h\, g}{K+1}$$

όπου $\left.\begin{array}{r} K_{\sigma\phi} = \frac{2}{5} \\ K_{\kappa\upsilon\lambda} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad K_{\kappa\upsilon\lambda} > K_{\sigma\phi}$

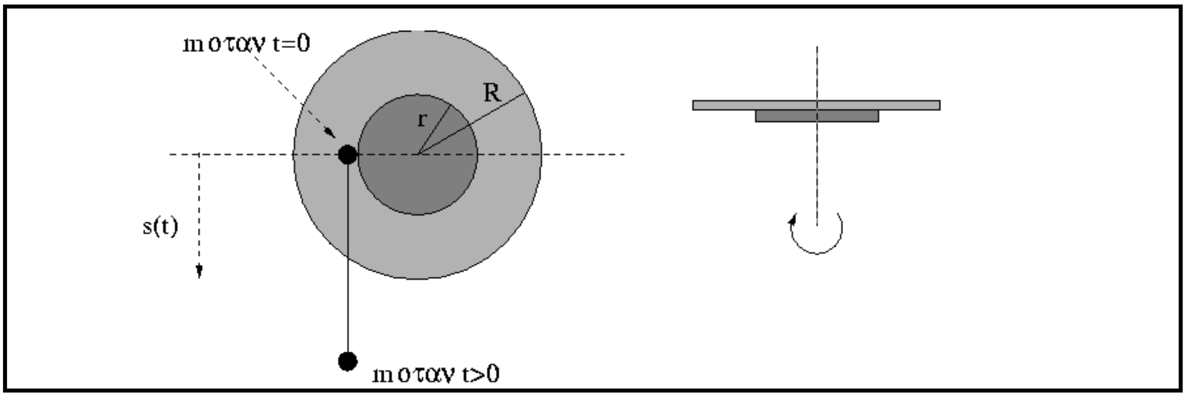
Άρα $\upsilon_{\kappa\upsilon\lambda} < \upsilon_{\sigma\phi}$

Σωστή απάντηση η (δ) η σφαίρα θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο και αυτό είναι ανεξάρτητο της μάζας και της ακτίνας των δύο αντικειμένων

Β. Είναι $\frac{5T}{4} = T + \frac{T}{4}$**.** Άρα η ταχύτητα της μάζας είναι μέγιστη και κινείται προς τα πάνω, σωστή απάντηση η (α)

ΘΕΜΑ 5

Ένας τροχός αποτελείται από δυο ομόκεντρους δίσκους με ακτίνες R = 0,5m και r = 0,3m όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο μικρότερος δίσκος έχει μάζα m_r = 0,2Kg και ο μεγαλύτερος m_R = 10Kg. Γύρω από το μικρότερο δίσκο είναι τυλιγμένο σχοινί μήκους L = 10m αμελητέου βάρους και στην μια άκρη του είναι συνδεδεμένη μια μάζα m= 0,1Kg. Τη χρονική στιγμή t = 0 η μάζα m αφήνεται ελεύθερη και πέφτει ξετιλύγωντας το σχοινί. **(α)** Ποια είναι η τάση που αναπτύσσεται στο σχοινί ενώ ξετυλίγεται. **(β)** Υπολογίστε την γωνιακή επιτάχυνση α(t), την γωνιακή ταχύτητα ω(t) των δίσκων και τη θέση s(t) της μάζας ως συνάρτηση του χρόνου t. **(γ)** Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί όλο το σχοινί.



Λύση

(α) Το σώμα κινείται προς τα κάτω υπό την επίδραση του βάρους του mg, ενώ στο σχοινί αναπτύσσεται μία τάση προς τα πάνω. Το σύστημα των δύο τροχών έχει ροπή αδρανείας I :

$$I = \frac{1}{2} m_r r^2 + \frac{1}{2} m_R R^2 = 1.259\,kg\ m^2 \qquad (1)$$

Η ροπή του συστήματος είναι:

$$Tr = I\frac{d\omega}{dt} = I\,a(t) \qquad (2)$$

Η ταχύτητα μετατόπισης και η επιτάχυνση της μάζας m είναι:

$$\frac{ds}{dt} = \omega r \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = a(t)\,r \qquad (3)$$

αντίστοιχα. Επίσης απότο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = mg - T \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = g - \frac{T}{m} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) έχουμε;

$$g - \frac{T}{m} = \frac{T}{I} r^2 \Rightarrow T = \frac{mg}{1 + \dfrac{mr^2}{I}} = 0.992N$$

(β) Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε;

$$a(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{Tr}{I} = 0.236 s^{-2}$$

ολοκληρώνοντας

$$\Rightarrow \omega(t) = 0.236\,t\ s^{-1} \qquad (5)$$

Από την (3) έχουμε:

$$\frac{ds}{dt}(0.236t)\,0.3 = 0.0708\,t$$

και ολοκληρώνοντας

$$s(t) = \frac{0.0708}{2} t^2 = 0.0354 t^2 \qquad (6)$$

(γ) από την (6) για το συνολικό μήκος του σχοινιού βρίσκουμε τον συνολικό χρόνο που θα χρειαστεί για να ξετυλιχτεί

$$t_{ολ} = \sqrt{\frac{10}{0.0354}} = 16.807s$$

και αντικαθιστώνατς στην (5) βρίσκουμε την γωνιακη ταχύτητα: $\omega(t_{ολ}) = 3.966\,s^{-1}$