ΦΥΕ 14 ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2007-2008

1^Η ΕΡΓΑΣΙΑ

Ημερομηνία παράδοσης: 12 Νοεμβρίου 2007

(Όλες οι ασκήσεις βαθμολογούνται ισοτίμως με 10 μονάδες η κάθε μία)

Άσκηση 1

α) Να υπολογισθεί η προβολή του $\vec{\delta} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ πάνω στο διάνυσμα

$\vec{\varepsilon} = (-1, -1, 2)$ όταν:
$\vec{\alpha} = (2, 0, -1)$, $\vec{\beta} = (-1, 3, 2)$, $\vec{\gamma} = \hat{\imath}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + \hat{k}(\hat{\imath} \cdot \vec{\alpha})$.

β)Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος

$$\vec{\delta} = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot [(\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \cdot \hat{\imath}] + (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + [\,\vec{\alpha}\, \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})](\vec{\gamma} \cdot \hat{k})\vec{\gamma}$$

όταν $\vec{\alpha} = (1, -1, 2)$, $\vec{\beta} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{\gamma} = (3, 2, 1)$

Τα $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, είναι τα μοναδιαία διανύσματα.

Άσκηση 2

Αν Ο, Α, Β, Γ είναι τέσσερα σημεία του χώρου, να δειχθεί ότι:

$\vec{AB} \times \vec{A\Gamma} - \vec{OB} \times \vec{O\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\vec{OA}$

Άσκηση 3

Α) i) Δείξτε ότι $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{A})$ είναι μηδέν για όλα τα διανύσματα $\vec{A}$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{B}$.

ii) Με τι ισούται το $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A})$ αν οι διευθύνσεις των $\vec{A}$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{B}$ σχηματίζουν γωνία θ;

Β) Δείξτε ότι αν $\vec{\alpha} \neq 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \quad (1)$$

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\alpha} \times \vec{\gamma} \quad (2)$$

τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει μόνο η μία από τις δύο, τότε δεν ισχύει πάντοτε ότι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Άσκηση 4

Α) Να υπολογιστούν οι πίνακες Α + 2Β και Α – 3Γ, όταν

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, όπου i πραγματικός αριθμός.

Β) Να υπολογιστεί ο πίνακας Α Β – Γ, όταν:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Άσκηση 5

Α) Να υπολογιστούν οι πίνακες $A\,A^T$ και $A\,A$ όταν $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Β) Να υπολογιστούν οι πίνακες $A\,A^T$ και $A^T\,A$ όταν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 6

Α) Να υπολογίσετε τις τιμές του k, για τις οποίες μηδενίζεται η ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{pmatrix}$.

Β) Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των ακολούθων πινάκων

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$

Άσκηση 7

Α) Να αποδειχθεί ότι το παρακάτω σύστημα έχει ακριβώς μια λύση και να βρεθεί αυτή.

$3x - y + 2z = 10$

$x + y - 4z = -10$

$2x - 4y + 5z = 24$

Β) Θεωρείστε τα παρακάτω συστήματα

α) $\begin{aligned} x + y + az &= 1 \\ x + ay + z &= 4 \\ ax + y + z &= b \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ x + ay + 3z &= 3 \\ x + 11y + az &= b \end{aligned}$

Για ποιες τιμές των *α,b* έχει το καθένα σύστημα μια μοναδική λύση; Η μοναδικότητα της λύσης εξαρτάται από το *b*; Γιατί;

Για ποιες τιμές των *α,b* έχει το καθένα σύστημα περισσότερες από μια λύσεις;

Άσκηση 8

Α) Έστω η συνάρτηση f(x) για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + 2f^3(x) - x + 1 = 0 \text{ για } x \in \Re$$

a) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

b) Να βρείτε την αντίστροφη της f

B)

a. Να βρεθούν όλα τα λ και μ για τα οποία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda x+1}{\mu x-1}$ ταυτίζεται με την αντίστροφή της.
b. Να βρεθεί και το πεδίο ορισμού των f και f^{1} για κάθε λ και μ.
c. Υπάρχουν σημεία τομής των f και f^{1} για $\lambda=0$, $\mu=1$;
d. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ λ και μ ώστε οι f και f^{1} να έχουν ένα και μοναδικό σημείο τομής.

Άσκηση 9

A) Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda^2-1)x^2+(\lambda+1)x+1$. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε:

α) να έχει 2 αρνητικές ρίζες και

β) να έχει 2 αντίστροφες ρίζες.

B)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^2+\lambda x+1$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η γραφική της παράσταση:

α) εφάπτεται στον άξονα xx΄

β) έχει άξονα συμμετρίας τον yy΄ και

γ) έχει κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη 4.

Άσκηση 10

A)

α) Να ευρεθεί το $\lambda\in\Re$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\left[\lambda x^2+(\lambda-3)x+1\right]$ να έχει πεδίο ορισμού το $\Re$.

β) Εάν $(fog)(x)=x^2+x-12$ και $g(x)=x-3$, να ευρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f

γ) Η συνάρτηση f είναι 1-1 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(3, 2006) και Β(4,2007). Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}\left[-1+f\left(x^2-12\right)\right]=3$

B)

Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-2x^2}$. Δίδεται επίσης η συνάρτηση $g(x)=\sin x$ με πεδίο ορισμού $[0,2k\pi]$ με $k\in\mathbf{Z}$.Να εξετάσετε αν υπάρχει η συνάρτηση fog και αν ναι, βρείτε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της. Να επαναλάβετε για την σύνθετη συνάρτηση gof.