Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες - Μαθηματικά **Αύγουστος 2004**
Ονοματεπώνυμο:
Τμήμα :

Θέμα 1

A) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int x^3 \sin x \, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ **50%**

B) Για τον κύκλο $x^2+y^2=r^2$ δείξτε ότι $\left| \frac{y''}{\left\{1+(y')^2\right\}^{3/2}} \right| = \frac{1}{r}$ **50%**

Λύση

A) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\int x^3 \sin x \, dx = -\int x^3 (\cos x)' \, dx = -x^3 \cos x + \int 3x^2 \cos x \, dx$$

$$\int 3x^2 \cos x \, dx = \int 3x^2 (\sin x)' \, dx = 3x^2 \sin x - \int 6x \, \sin x \, dx$$

$$\int 6x \, \sin x \, dx = -\int 6x \, (\cos x)' \, dx = -6x \, \cos x + \int 6 \cos x \, dx = -6x \, \cos x + 6 \sin x + C$$

Επομενως

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \, \cos x - 6 \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \underset{dx=2y\,dy}{\overset{\sqrt{x}=y}{=}} \int \frac{2y}{y(1+y^2)} dy = 2\int \frac{1}{y^2+1} dy = 2\tan^{-1} y + c = 2\tan^{-1}\sqrt{x} + c$$

B) Παραγωγίζοντας 2 φορές τη σχέση $x^2+y^2=r^2$ έχουμε

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$2x + 2yy' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$2 + 2(y'y' + yy'') = 0 \Leftrightarrow 1 + y'^2 + yy'' = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{1+y'^2}{y}$$

$$\left| \frac{y''}{\left\{1+(y')^2\right\}^{3/2}} \right| = \left| -\frac{\frac{1+y'^2}{y}}{\left\{1+(y')^2\right\}^{3/2}} \right| = \left| -\frac{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}{y\left\{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2\right\}^{3/2}} \right| = \left| -\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y\left\{1+\frac{x^2}{y^2}\right\}^{3/2}} \right| =$$

$$\left| -\frac{y^2+x^2}{y^3\left\{\frac{x^2+y^2}{y^2}\right\}^{3/2}} \right| = \left| -\frac{r^2}{y^3\left\{\frac{r^2}{y^2}\right\}^{3/2}} \right| = \left| -\frac{r^2}{y^3\sqrt{\frac{r^6}{y^6}}} \right| = \left| -\frac{r^2|y|^3}{y^3 r^3} \right| = \frac{r^2|y|^3}{|y^3| r^3} = \frac{1}{r}$$

Θέμα 2

A) Αν $\vec{a}=(2,-3,1)$, $\vec{b}=(1,1,1)$, $\vec{c}=(-1,0,1)$ βρείτε το $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ **30%**

B) Βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ αν $f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}-\lambda x+1$ και $\lambda\in R$. **70%**

<u>Λύση</u>

A)

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i-2j+k$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(2,-3,1)\cdot(1,-2,1)=2+6+1=9$$

B)

Είναι

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}-\lambda x+1=|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-\lambda x+1=-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda-\frac{1}{x}\right)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\lambda-\frac{1}{x}\right)=2+\lambda$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. $2+\lambda>0\Leftrightarrow\lambda>-2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=(+\infty)(2+\lambda)=+\infty$

II. $2+\lambda<0\Leftrightarrow\lambda<-2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=(+\infty)(2+\lambda)=-\infty$

III. Για λ=-2 η f γράφεται:

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x+3}+2x+1=\frac{\left(\sqrt{4x^2+x+3}+2x+1\right)\left(\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1\right)}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1}=$$

$$\frac{4x^2+x+3-(2x+1)^2}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1}=\frac{-3x+2}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x-1}=\frac{-x(3-\frac{2}{x})}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2+\frac{1}{x}}$$

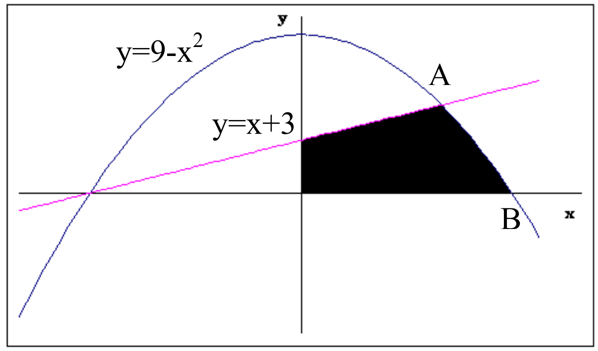
Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ =3/4

Θέμα 3

Α) Να βρεθούν τα α,b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι παντού συνεχής **50%**

$$\begin{array}{ll} a\ e^{2x+1}+x^2+x & x\le -1 \\ x^2+2ax-2b & -1<x<0 \\ \alpha\sin x+2b\cos x+2 & 0\le x \end{array}$$

Β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες $y=9-x^2$ και $y=x+3$ και τους θετικούς ημιάξονες. **50%**



<u>Λύση</u>

Α)

Θα εξεταστεί η συνέχεια στα σημεία που η συνάρτηση αλλάζει μορφή. Πρέπει :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

$$\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=a/e+1-1=a/e \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1-2a-2b \\ f(-1)=a \end{array}\right\}\Leftrightarrow 1-2a-2b=a/e \Leftrightarrow 2a+a/e=1-2b$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{1-2b}{2+1/e}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-2b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2b+2 \\ f(0)=2b+2 \end{array}\right\}\Leftrightarrow 2b+2=-2b \Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$$

Οπότε α=2/(2+1/e) και b=-1/2

Β) Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία που επαληθεύουν την εξίσωση $9-x^2=x+3$. Τα σημεία αυτά είναι το x=-3 και x=2. Το σημείο Α λοιπόν έχει συντεταγμένες Α(2,5) Το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η $9-x^2$ είναι τα x=-3 και x=3. Το σημείο Β λοιπόν έχει συντεταγμένες Β(3,0). Το εμβαδόν που μας ζητείται υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_0^2 (x+3)dx+\int_2^3 (9-x^2)dx=\left.\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\right|_0^2+\left.\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\right|_2^3=$$

$$(2+6)-0+(27-9)-(18-\frac{8}{3})=8+\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$$

Θέμα 4

Α) Έστω το σύστημα.

$$3x+\lambda y+z=\lambda$$
$$2x+y-2z=-2$$
$$x-3y+z=3$$

α) Για ποιες τιμές του λ∈R το σύστημα έχει λύση;
β) Βρείτε μια λύση του συστήματος όπου x=0 και την κατάλληλη τιμή του λ.
γ) Βρείτε μια λύση του συστήματος όπου y=0 και την κατάλληλη τιμή του λ.
50%

Β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$ **50%**

Λύση

Α) α) Το σύστημα είναι μη ομογενές 3x3. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Cramer. Οι ορίζουσες είναι

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & \lambda & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=3(1-6)-\lambda(2+2)+(-6-1)=-15-7-4\lambda=-22-4\lambda$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 3 & -3 & 1\end{vmatrix}=\lambda(1-6)-\lambda(-2+6)+(6-3)=-5\lambda-4\lambda+3=-9\lambda+3$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3 & \lambda & 1\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=3(-2+6)-\lambda(2+2)+(6+2)=12-4\lambda+8=20-4\lambda$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}3 & \lambda & \lambda\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 3\end{vmatrix}=3(3-6)-\lambda(6+2)+\lambda(-6-1)=-9-8\lambda-7\lambda=-9-15\lambda$$

Αν Δ=0 τότε λ=-11/2 με τις υπόλοιπες ορίζουσες να είναι διάφορες του μηδενός οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.
Επομένως για κάθε λ≠-11/2 το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{-9\lambda+3}{-22-4\lambda}\quad y=\frac{20-4\lambda}{-22-4\lambda}\quad z=\frac{-9-15\lambda}{-22-4\lambda}$$

β) Για να είναι x=0 πρέπει λ=1/3 οπότε $x=0$ $\quad y=\frac{20-\frac{4}{3}}{-22-\frac{4}{3}}$=-$\frac{56}{70}$=-$\frac{4}{5}$ $\quad z=\frac{-9-5}{-22-\frac{4}{3}}=\frac{42}{70}=\frac{3}{5}$

γ) Για να είναι y=0 πρέπει λ=5 οπότε $x=\frac{-45+3}{-22-20}$=1 $\quad y=0\quad z=\frac{-9-75}{-42}=2$

B) Είναι $x^3+x^2-6x=x(x-2)(x+3)$ οπότε

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}A+B+C=0\\A+3B-2C=1\\C=-2/15\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}A=-1/6\\B=3/10\\C=-2/15\end{array}\right\}$$

Επομένως

$$\int\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx=-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{10}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{2}{15}\int\frac{dx}{x+3}=-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+C$$