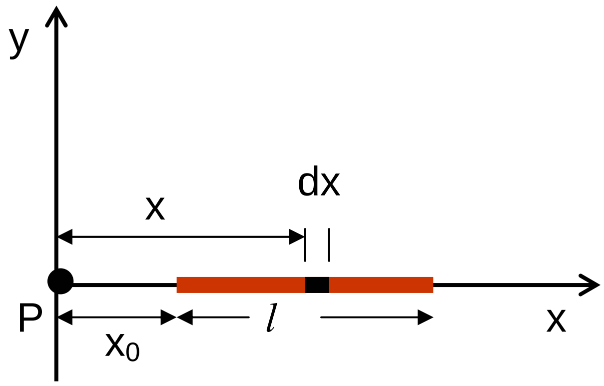
Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

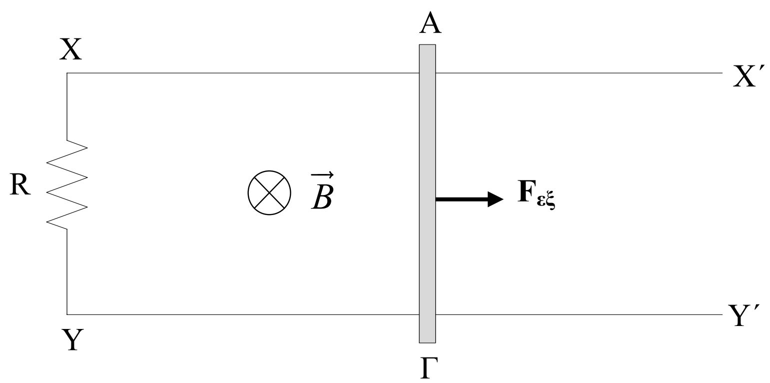
ΘΕΜΑ 1

A. Μια μονωτική ράβδος μήκους l φέρει ομογενώς κατανεμημένο θετικό φορτίο Q και είναι διατεταγμένη κατά μήκος του άξονα x όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο (μέτρο και διεύθυνση) σε σημείο P επί του άξονα x και σε απόσταση x_0 από το άκρο της. Εάν το P βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από την κατανομή πόσο γίνεται το πεδίο; Τι παρατηρείτε;



B. Δίδεται το κύκλωμα του σχήματος. Η ράβδος ΑΓ, μήκους l =1m, ηρεμεί και μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στους οριζόντιους αγωγούς xx΄ και yy΄. Η αντίσταση R έχει τιμή 4Ω και το ομογενές μαγνητικό πεδίο B =1 Tesla. Κάποια χρονική στιγμή, στη ράβδο ασκείται σταθερή δύναμη $F_{εξ}$= 2N.

1. Να δείξετε ότι η ράβδος θα αποκτήσει τελικά μια σταθερή οριακή ταχύτητα. Να υπολογιστεί η τιμή της οριακής ταχύτητας. Να γίνει η γραφική παράσταση του $E_{επ}$=f(u).
2. Από την χρονική στιγμή που η ράβδος απέκτησε την οριακή της ταχύτητα και μετά, να βρεθούν το φορτίο Q και η ηλεκτρική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα σε χρόνο Δt=10s.



<u>Λύση</u>

A.

Η γραμμική πυκνότητα φορτίου δίνεται από $\lambda = Q / l$. Το φορτίο που περιέχεται στο απειροστό μήκος dx είναι $dq = \lambda\, dx$. Αφού η κατανομή φέρει θετικό φορτίο το πεδίο στο P κατευθύνεται προς την αρνητική διεύθυνση x. Το πεδίο d**E** που οφείλεται στο dq είναι

$$d\mathrm{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2}\hat{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qdx}{lx^2}\hat{i}$$

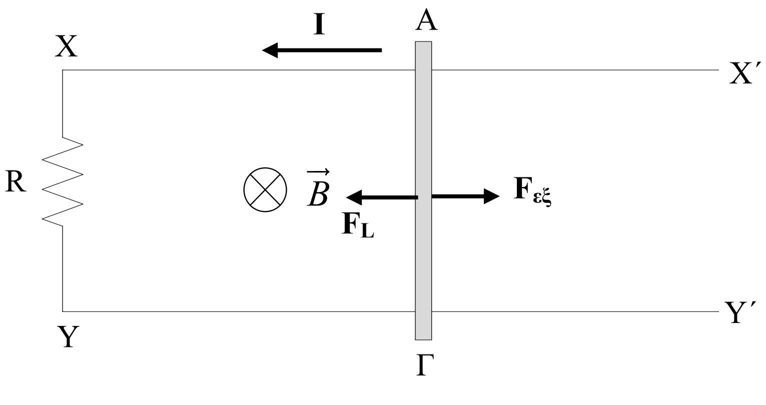
Ολοκληρώνοντας για όλο το μήκος της κατανομής έχουμε

$$\boldsymbol{E} = \int d\mathrm{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}\hat{i}\int_{x_0}^{x_0+l}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0+l}\right)\hat{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x_0\left(x_0+l\right)}\hat{i}$$

Όταν $x_0 >> l$ τότε

$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x_0^2}\hat{i}$. Το πεδίο σε αυτή την περίπτωση είναι ως να προέρχεται από σημειακό φορτίο.

B.



1) Υπό την επίδραση της εξωτερικής δύναμης η ράβδος αρχίζει να κινείται αποκτώντας επιτάχυνση. Η κίνηση όμως αυτή έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ηλεκτρεγερτικής δύναμης $E_{\varepsilon\pi}$ από επαγωγή στα άκρα της ράβδου. Επομένως το κύκλωμα αρχίζει και διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα φοράς η οποία σημειώνεται στο σχήμα. Εξαιτίας του ρεύματος στην ράβδο εμφανίζεται δύναμη Laplace φοράς αντίθετης από την φορά της εξωτερικής δύναμης. Το μέτρο της δύναμης Laplace αυξάνεται με την αύξηση της ταχύτητας της ράβδου. Την χρονική στιγμή κατά την οποία ισχύει:

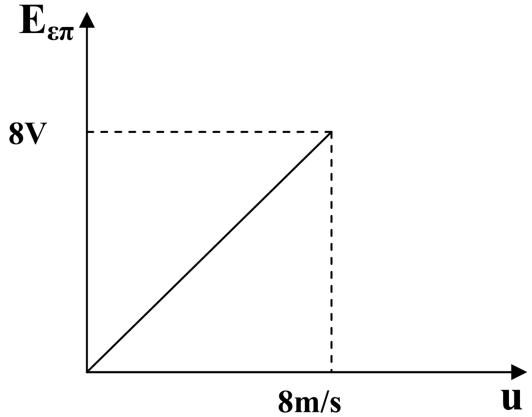
$F_L = F_{\varepsilon\xi}$

Το μέτρο της ταχύτητας της ράβδου σταματά να αυξάνει και παραμένει σταθερό. Από την χρονική στιγμή αυτή και μετά η κίνηση της ράβδου είναι ευθύγραμμη και ομαλή.

Έχουμε:

$$F_L = F_{\varepsilon\xi} \Rightarrow BIL = F_{\varepsilon\xi} \Rightarrow B\frac{E_{\varepsilon\pi}}{R}L = F_{\varepsilon\xi} \Rightarrow B\frac{BuL}{R}L = F_{\varepsilon\xi} \Rightarrow u = \frac{F_{\varepsilon\xi} \cdot R}{B^2 \cdot L^2} = 8m/s$$

Έχουμε: $E_{\varepsilon\pi} = BuL$



3) Από τη στιγμή κατά την οποία η ράβδος αποκτά οριακή ταχύτητα το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης $I = \dfrac{Bu_o L}{R} = 2A$.

Επομένως το ηλεκτρικό φορτίο το οποίο περνά από μία διατομή του κυκλώματος σε χρόνο 10s θα είναι: $Q = I \cdot \Delta t = 20Cb$

Η ηλεκτρική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι: $Q = I^2 \cdot R \cdot \Delta t = 160J$.

ΘΕΜΑ 2

Α. Συμπαγής αγώγιμη φορτισμένη σφαίρα ακτίνας α και φορτίου Q, περιβάλλεται από αγώγιμο σφαιρικό φλοιό ακτίνας b και φορτίου –Q.

Να υπολογιστούν κατά σειρά:

α. Το ηλεκτρικό πεδίο 1) στο εσωτερικό της συμπαγούς σφαίρας, 2) μεταξύ των δύο σφαιρών και 3) εκτός του συστήματος των σφαιρών.

β. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σφαιρικών αγωγών και

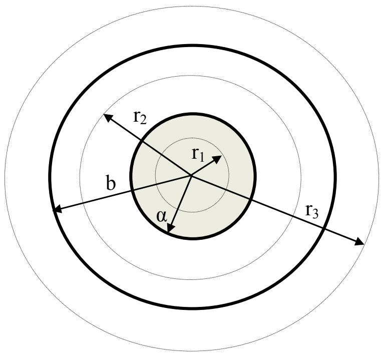
γ. Η χωρητικότητα του συστήματος.

Β. Κοίλος κυλινδρικός αγωγός, εσωτερικής ακτίνας α και εξωτερικής ακτίνας β, διαρρέεται από ρεύμα I_0, ομογενώς κατανεμημένο. Αποδείξτε ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου εντός του αγωγού (α<r<β), δίνεται από τη σχέση

$$B = \frac{\mu_o I_o \left(r^2 - \alpha^2\right)}{2\pi\left(\beta^2 - \alpha^2\right) r}$$

<u>Λύση</u>

Α.



α.

(1) Θεωρώντας μία γκαουσιανή επιφάνεια στο εσωτερικό της συμπαγούς σφαίρας βλέπουμε ότι αυτή δεν περικλείει φορτίο, αφού στους αγωγούς όλο το φορτίο συγκεντρώνεται στην επιφάνεια τους. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου τότε θα είναι

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \text{οπότε και E=0}$$

(2) Θεωρώντας μία γκαουσιανή επιφάνεια μεταξύ των δύο σφαιρών (α<r<b) θα έχουμε

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS \cos 0^o = E\, 4\pi r^2 \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{+Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{+Q}{4\pi r^2 \varepsilon_o} = k\frac{Q}{r^2}$$

(3) Θεωρώντας μία γκαουσιανή επιφάνεια εκτός των δύο σφαιρών (r>b) θα έχουμε

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS \cos 0^o = E\, 4\pi r^2 \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{+Q - Q}{\varepsilon_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

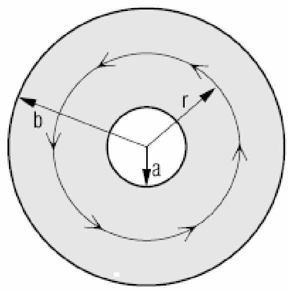
β. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σφαιρών είναι

$$V_b - V_a = -\int \vec{E} d\vec{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} Q \int_a^b \frac{dr}{r^2} \quad = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} Q \left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = kQ\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

γ. Η χωρητικότητα δίνεται γενικά από τον τύπο C=Q/V που στην περίπτωσή μας γίνεται

$$C=\frac{Q}{|V_b-V_a|}=\frac{Q}{\dfrac{kQ}{\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)}}=\frac{ab}{k(b-a)}$$

B.



Το ρεύμα διαρρέει τον αγωγό στο μή κοίλο τμήμα του, η διατομή του οποίου είναι $\pi(\beta^2-\alpha^2)$. Άρα ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα πυκνότητας

$$\frac{I_o}{\pi\left(\beta^2-\alpha^2\right)}$$

Έστω ο κύκλος ακτίνας r (r > α). Το ρεύμα το οποίο περικλείει αυτή η κλειστή καμπύλη είναι:

$$I(r)=\int_S\frac{I_0}{\pi(\beta^2-\alpha^2)}ds=\frac{I_0}{\pi(\beta^2-\alpha^2)}\int_a^r 2\pi r dr=\frac{I_0(r^2-a^2)}{(\beta^2-\alpha^2)}$$

Ως εκ τούτου, ο νόμος Ampère γράφεται:

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl}=\frac{\mu_0 I_0(r^2-a^2)}{(\beta^2-\alpha^2)}\Longrightarrow B2\pi r=\frac{\mu_0 I_0(r^2-a^2)}{(\beta^2-\alpha^2)}\Longrightarrow B=\frac{\mu_0 I_0(r^2-a^2)}{2\pi r(\beta^2-\alpha^2)}$$