Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (26-7-2008)
Μηχανική

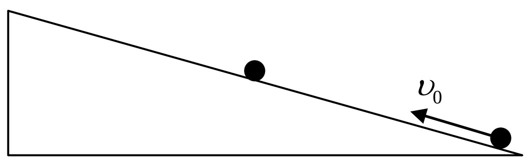
Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α. Μία μπάλα αφήνεται να πέσει από την κορυφή ψηλού γκρεμού με μηδενική αρχική ταχύτητα. Αν η επιβράδυνση που υφίσταται από τον αέρα δίνεται από τη σχέση με $\alpha_\delta = - \beta \cdot \upsilon$, όπου $\beta = 0.1 s^{-1}$, εκφράστε την απόσταση της μπάλας από την κορυφή του γκρεμού συναρτήσει του χρόνου και υπολογίστε την απόσταση και ταχύτητα της μετά από t = 10s. ($g=10 m/s^2$)

Β. Σώμα μάζας m εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου σε πεδίο βαρύτητας επιτάχυνσης g με αρχική ταχύτητα υ_0. Εάν δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβής α) σε ποιο μέγιστο ύψος h_{max} θα φθάσει το σώμα;
Έστω ότι στη θέση που αντιστοιχεί σε $h = h_{max}/2$ υπάρχει ακίνητο σώμα ίσης μάζας m με το οποίο συγκρούεται το κινούμενο σώμα και συσσωματώνονται. β) Σε ποιο ύψος θα φθάσει το συσσωμάτωμα; (εκφράστε την απάντησή σας συναρτήσει του h_{max}) γ) Πόση ενέργεια καταναλώνεται κατά τη συσσωμάτωση;



ΛΥΣΗ

Α. Η μπάλα θα κινηθεί υπό την επίδραση της βαρύτητας και της αντίστασης του αέρα και η επιτάχυνση της θα δίνεται από την σχέση $\frac{d\upsilon}{dt} = g - \beta \cdot \upsilon$ (1)

Από την (1) υπολογίζουμε την ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου:

$$\frac{d\upsilon}{g-\beta\cdot\upsilon} = dt \Rightarrow \frac{d(g-\beta\cdot\upsilon)}{g-\beta\cdot\upsilon} = -\beta\cdot dt \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\frac{d(g-\beta\cdot\upsilon)}{g-\beta\cdot\upsilon} = -\beta\cdot\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\ln\frac{(g-\beta\cdot\upsilon)}{g} = -\beta\cdot t \Rightarrow \frac{g-\beta\cdot\upsilon}{g} = e^{-\beta\cdot t} \Rightarrow g-\beta\cdot\upsilon = g\cdot e^{-\beta\cdot t} \Rightarrow \upsilon = \frac{g}{\beta}\cdot(1-e^{-\beta\cdot t})$$
(2)

Και μετά από την (2) την θέση σαν συνάρτηση του χρόνου:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{\beta}\cdot(1-e^{-\beta\cdot t}) \Rightarrow \int_0^y dy = \frac{g}{\beta}\cdot\int_0^t(1-e^{-\beta\cdot t})\cdot dt \Rightarrow y = \frac{g}{\beta}\cdot t - \frac{g}{\beta^2}\cdot\left[e^{-\beta\cdot t}\right]_0^t$$

και

$$y = \frac{g}{\beta}\cdot t - \frac{g}{\beta^2}\cdot(e^{-\beta\cdot t} - 1) = \frac{10\,m/s^2}{0.1s^{-1}}\cdot 10s - \frac{10\,m/s^2}{0.01s^{-2}}\cdot(e^{-0.1s^{-1}\cdot 10s} - 1) =$$

$$= 1000\,m - 1000\,m\cdot(e^{-1} - 1) = 368\,m$$

$$\upsilon = \frac{g}{\beta}\cdot(1 - e^{-\beta\cdot t}) = \frac{10\,m/s^2}{0.1s^{-1}}\cdot(1 - e^{-1}) = 100\,m/s\cdot(1 - e^{-1}) = 63.2\,m/s$$

B. α) Ισχύει ότι $\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}$

β) Η ταχύτητα υ_1 του σώματος στη θέση που αντιστοιχεί σε $h = h_{max}/2$ προκύπτει από την αρχή διατήρησης της ενέργειας μέσω της σχέσης

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + mg\frac{h}{2} \Rightarrow \upsilon_0^2 = \upsilon_1^2 + gh \Rightarrow \upsilon_1^2 = \upsilon_0^2 - gh = \upsilon_0^2 - g\frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{\upsilon_0^2}{2} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{2}}$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει ότι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά τη σύγκρουση δίνεται από τη σχέση

$$m\upsilon_1 = 2mV_1 \Rightarrow V_1 = \frac{\upsilon_1}{2} = \frac{\upsilon_0}{2\sqrt{2}}$$

Επομένως η κινητική του ενέργεια είναι $E_{k,1} = \frac{1}{2}2mV_1^2 = mV_1^2 = \frac{1}{4}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{8}m\upsilon_0^2$

Άρα το μέγιστο ύψος h' - πάνω από το επίπεδο $h_{max}/2$ - στο οποίο θα φθάσει το συσσωμάτωμα προκύπτει από τη σχέση

$$\frac{1}{8}m\upsilon_0^2 = 2mgh' \Rightarrow h' = \frac{\upsilon_0^2}{16g} = \frac{h_{max}}{8}$$

Επομένως το συνολικό ύψος στο οποίο θα ανέλθει το συσσωμάτωμα είναι

$$h_1 = h' + \frac{h}{2} = \frac{\upsilon_0^2}{16g} + \frac{1}{2}\frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{5\upsilon_0^2}{16g} = \frac{5h_{max}}{8}$$

γ) Η ενέργεια που καταναλώθηκε κατά τη συσσωμάτωση μπορεί να υπολογισθεί με δύο τρόπους

i) Βρίσκοντας τη διαφορά δυναμικής ενέργειας μεταξύ του σώματος και του συσσωματώματος στο μέγιστο ύψος

$$\Delta E = mgh - \left(2mgh_1 - mg\frac{h}{2}\right) = mgh - \left(2mg\frac{5h}{8} - mg\frac{h}{2}\right) = mgh - mg\frac{6h}{8} = \frac{1}{4}mgh$$

Όπου οι όρος $mg\frac{h}{2}$ προστέθηκε για να ληφθεί υπόψη η αρχική δυναμική ενέργεια του δεύτερου σώματος.

ii) Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει θεωρώντας τη διαφορά κινητικής ενέργειας του σώματος λίγο πριν την κρούση και του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}2mV_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - m\frac{\upsilon_1^2}{4} = \frac{1}{4}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{4}m\frac{\upsilon_0^2}{2} = \frac{1}{4}E_{K,0} = \frac{1}{4}mgh$$

όπου $E_{K,0}$ η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος.

ΘΕΜΑ 2

Α. Ένας κύλινδρος μάζας *m* και ακτίνας *R* ενώ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0 τοποθετείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς μεταφορική ταχύτητα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ επιπέδου και κυλίνδρου είναι *μ*.

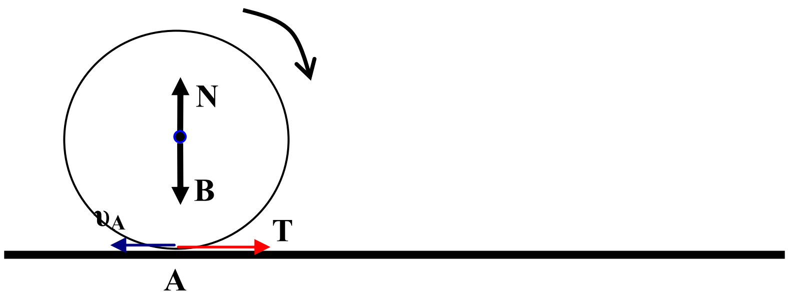
a. να σχεδιαστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο και να βρεθεί πώς επηρεάζει η κάθε δύναμη την κίνηση.
b. να γραφούν οι εξισώσεις που δίνουν τη γωνιακή ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο και η ταχύτητα του κέντρου μάζας με το χρόνο.
c. να βρεθεί η ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο του σημείου επαφής του κυλίνδρου με το οριζόντιο επίπεδο.
d. να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο ο κύλινδρος θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει..

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = mR^2/2$.

Β. Ένας αστέρας νετρονίων ακτίνας 3 km σχηματίστηκε από έναν αστέρα που είχε ακτίνα 10000 km και περίοδο περιστροφής 30 ημέρες γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. *(Συγκεκριμένα, ο αστέρας νετρονίων σχηματίστηκε λόγω της βαρυτικής κατάρρευσης που υπέστη ο αστέρας με τη μεγαλύτερη ακτίνα μετά από μία έκρηξη υπερκαινοφανούς -supernova)*. Υποθέστε ότι δεν δρουν εξωτερικές ροπές στον αστέρα και ότι η μάζα, μετά την κατάρρευση, παραμένει ίδια. Ποια είναι η περίοδος περιστροφής του αστέρα νετρονίων; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
Α) 0.02 s, Β) 0.23 s. Γ) 1.58 s , Δ) 723 s

ΛΥΣΗ

Α) α) Έστω ότι ο κύλινδρος περιστρέφεται όπως στο σχήμα



Το σημείο επαφής Α του κυλίνδρου με το επίπεδο έχει γραμμική ταχύτητα λόγω της περιστροφής υ_A. Άρα η τριβή *T* θα έχει φορά αντίθετη της υ_A. Η τριβή *T* επιβραδύνει την περιστροφική κίνηση και επιταχύνει τη μεταφορική.

β) Στον κατακόρυφο άξονα έχουμε το βάρος *B* και την αντίδραση του επιπέδου *N*.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

Στον οριζόντιο άξονα ασκείται μόνο η δύναμη της τριβής *T*. Ο κύλινδρος με την επίδραση της *T* ολισθαίνει και συγχρόνως λόγω της ροπής της *T* περιστρέφεται.

$$\sum F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = m\alpha_{cm} \Rightarrow \mu mg = mg \Rightarrow \alpha_{cm} = \mu g$$

$$\sum \tau_{cm} = I a_\gamma \Rightarrow \mathrm{T}R = I a_\gamma \Rightarrow \mu mgR = \frac{1}{2} mR^2 a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{2\mu g}{R}$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha_\gamma t = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t$$

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_0 + \alpha_{cm} t = \mu g t$$

γ) Το σημείο Α εκτελεί σύνθετη κίνηση, μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και περιστροφική με γωνιακή ταχύτητα *ω*.

$$\upsilon_{\mathrm{A}} = \upsilon_{cm} - \upsilon_\gamma = \upsilon_{cm} - \omega R = \upsilon_0 + \alpha_{cm} t - \omega_0 R + \alpha_\gamma R t$$

$$\upsilon_{\mathrm{A}} = 3\mu g t - \omega_0 R$$

δ) Ο κύλινδρος παύει να ολισθαίνει όταν $\upsilon_{\mathrm{A}} = 0$.

$$\upsilon_{\mathrm{A}} = 0 \Rightarrow 3\mu g t - \omega_0 R = 0 \Rightarrow t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$$

Β. Η περίοδος περιστροφής του αστέρα είναι $T_0 = 30 \cdot 24 \cdot 3600 = 2.592 \cdot 10^6$ s

Από τη διατήρηση της στροφορμής και με δεδομένα ότι η μάζα δεν μεταβάλλεται και ότι η ροπή αδράνειας είναι ανάλογη του γινομένου της μάζας επί της ακτίνας στο τετράγωνο προκύπτει:

$$I_0 \omega_0 = \mathrm{I}_f \omega_f \Rightarrow R_0^2 \omega_0 = R_f^2 \omega_f \Rightarrow R_0^2 \frac{2\pi}{T_0} = R_f^2 \frac{2\pi}{T_f} \Rightarrow T_f = T_0 \frac{R_f^2}{R_0^2} \Rightarrow T_f = 0.23328 \text{ s}$$

Επομένως σωστή είναι η απάντηση **Β.**

ΘΕΜΑ 3

Α. Α. Ο πιλότος ενός αεροπλάνου παρατηρεί την πυξίδα και συμπεραίνει ότι κινείται με κατεύθυνση προς την δύση. Το αεροπλάνο κινείται ως προς τον αέρα με σταθερή ταχύτητα 150 km/h. Εάν φυσάει άνεμος με ταχύτητα 30 km/h με διεύθυνση προς τον βορρά να βρεθεί η ταχύτητα του αεροπλάνου (μέτρο και κατεύθυνση) ως προς παρατηρητή ακίνητο στο έδαφος.

Β. Σωμάτιο μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση μιας ελκτικής δύναμης που έχει μέτρο

$$F = k/r^2$$

(k = σταθερά). Η τροχιά είναι κύκλος ακτίνας r. Να βρεθούν συναρτήσει των k, r, m:

α) Η δυναμική ενέργεια,

β) η ολική ενέργεια,

γ) η ταχύτητα,

δ) η στροφορμή του σωματίου.

ΛΥΣΗ

.

Α. Έστω

$\vec{\upsilon}_{\alpha-\alpha\kappa}$ = ταχύτητα αεροπλάνου ως προς ακίνητο παρατηρητή

$\vec{\upsilon}_{\alpha-\alpha\varepsilon\rho}$, = ταχύτητα αεροπλάνου ως προς τον αέρα

$\vec{\upsilon}_{\alpha\varepsilon\rho-\alpha\kappa}$, = ταχύτητα αέρα ως προς ακίνητο παρατηρητή

Τότε θα ισχύει

$\vec{\upsilon}_{\alpha-\alpha\kappa} = \vec{\upsilon}_{\alpha-\alpha\varepsilon\rho} + \vec{\upsilon}_{\alpha\varepsilon\rho-\alpha\kappa}$ (1)

Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι το αεροπλάνο πηγαίνει προς τη δύση άρα $\vec{\upsilon}_{\alpha-\alpha\kappa} = \upsilon_{\alpha-\alpha\kappa}(-x)$, ο άνεμος έχει ταχύτητα 30 km/h με διεύθυνση προς τον βορρά άρα $\vec{\upsilon}_{\alpha\varepsilon\rho-\alpha\kappa} = 30y$ και $\upsilon_{\alpha-\alpha\varepsilon\rho} = 150$.

Άρα από την (1) θα πρέπει $\vec{\upsilon}_{\alpha-\alpha\varepsilon\rho}y = -30y$ και $\upsilon_{\alpha-\alpha\varepsilon\rho}x = \sqrt{150^2 - 30^2}(-x)$

δηλαδή ταχύτητα αεροπλάνου ως προς ακίνητο παρατηρητή θα είναι

$\vec{\upsilon}_{\alpha-\alpha\kappa} = \sqrt{150^2 - 30^2}(-x)$

Β. Το μέτρο της ελκτικής δύναμης δίνεται από τη σχέση:

$$F = \frac{k}{r^2} \qquad (1)$$

α) Για τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας του σωματίου $U(r)$, θεωρώντας ότι $U(\infty) = 0$, έχουμε διαδοχικά:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} F dr \cos 180^o = \int_{\infty}^{r} F dr = \int_{\infty}^{r} \frac{k}{r^2} dr = k\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} dr = $$
$$= [-k\frac{1}{r}]_{\infty}^{r} = -\frac{k}{r} \qquad (2)$$

β) Η κινητική ενέργεια του σωματίου ισούται με:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (3)$$

Εξάλλου, η ελκτική δύναμη της σχέσεως (1) παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης για το σωμάτιο, οπότε:

$$\frac{k}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{k}{r} = mv^2 \Rightarrow \frac{k}{2r} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow K = \frac{k}{2r} \qquad (4)$$

Η ολική ενέργεια θα είναι:

$$E = K + U(r) = \frac{k}{2r} - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2r}$$

γ) Από την σχέση (4) προκύπτει ότι:

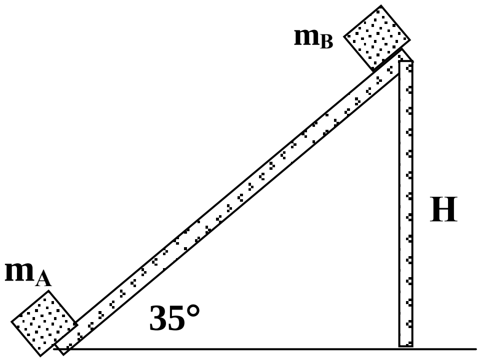
$$\frac{k}{2r}=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{k}{mr}} \qquad (5)$$

δ) Η στροφορμή του σωματίου είναι:

$l = mvr$ και λόγω της (5) έχουμε

$$l = mr\sqrt{\frac{k}{mr}} = \sqrt{mkr}$$

ΘΕΜΑ 4



Α. Δύο σώματα, m_A και m_B βρίσκονται σταματημένα σε κεκλιμένο επίπεδο όπως στο σχήμα. Αφήνουμε το Β ελεύθερο να κινηθεί, ενώ συγχρόνως το Α αρχίζει να κινείται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_{A,o}$. Αν τα δύο σώματα συναντηθούν στο μέσον της διαδρομής, υπολογίστε την ταχύτητα $\upsilon_{A,o}$ και τις ταχύτητες υ_A και υ_B που θα έχουν τα δύο σώματα όταν συναντηθούν καθώς και τον χρόνο συνάντησης. Δίνονται H = 2.0 m , g = 9,81 m/s^2

Β. Ένα βλήμα με μάζα 5m εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\vec{V}$ η οποία σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Παρατηρητής βρίσκεται ακίνητος στην αρχή των αξόνων Ο. Ύστερα από χρόνο t_o το βλήμα σπάει με έκρηξη σε τρία τμήματα με μάζες m, , m, και 3m. Τα δύο τμήματα με ίσες μάζες αμέσως μετά την έκρηξη αποκτούν ως προς το κ.μ του βλήματος ταχύτητες $\upsilon\hat{x}$ και $\upsilon\hat{y}$ αντίστοιχα. Να βρεθεί η θέση των τριών τμημάτων ύστερα από χρόνο t_1 ($t_1>t_o$) από τη στιγμή της έκρηξης ως προς τον ακίνητο παρατηρητή.

Λύση

Α. $x_A = \upsilon_{A,o}\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot \sin\theta \cdot t^2$ (1) και $x_B = \frac{1}{2}\cdot g\cdot\sin\theta\cdot t^2$ (2) με

$x_A = x_B = L/2$

όπου L η αρχική απόσταση μεταξύ των Α και Β.

Αλλάζοντας το πρόσημο στην (1) και προσθέτοντας στην (2) έχουμε:

$0 = -\upsilon_{A,o}\cdot t + g\cdot\sin\theta\cdot t^2$ από την οποία προκύπτει ότι t = 0 (χωρίς φυσική σημασία) και $t = \dfrac{\upsilon_{A,o}}{g\cdot\sin\theta}$ (3)

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) έχουμε:

$$\frac{L}{2}=\frac{1}{2}\cdot g\cdot\sin\theta\cdot\frac{\upsilon_{A,o}{}^2}{g^2\cdot\sin^2\theta} \quad \text{και} \quad L=\frac{\upsilon_{A,o}{}^2}{g\ \cdot\sin\ \theta} \quad \text{και}$$

$$\upsilon_{A,o} = \sqrt{L \cdot g \cdot \sin\theta} = \sqrt{g \cdot H} = \sqrt{9.81 m/s^2 \cdot 2.0 m} = 4.43 m/s$$

Επίσης

$$\upsilon_A = \upsilon_{A,o} - g \cdot \sin\theta \cdot t = \upsilon_{A,o} - g \cdot \sin\theta \cdot \frac{\upsilon_{A,o}}{g \cdot \sin\theta} = \upsilon_{A,o} - \upsilon_{A,o} = 0$$

και

$$\upsilon_B = g \cdot \sin\theta \cdot t \ = g \cdot \sin\theta \cdot \frac{\upsilon_{A,o}}{g \cdot \sin\theta} \ = \upsilon_{A,o} = \sqrt{g \cdot H} = 4.43 m/s$$

Ο χρόνος συνάντησης δίνεται από την (3):

$$t = \frac{\upsilon_{A,o}}{g \cdot \sin\theta} = \frac{\sqrt{g \cdot H}}{g \cdot \sin\theta} = \sqrt{\frac{H}{g}} \cdot \frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{\frac{2.0 m}{9.81 m/s^2}} \cdot \frac{1}{\sin 35} = 0.79 s$$

B.

Οι εξισώσεις κίνησης του βλήματος ως προς τον άξονα με αρχή Ο (ως προς τον ακίνητο παρατηρητή) είναι

$x = V\cos\theta\ t$

$y = V\sin\theta\ t - (1/2)\ gt^2$

και για $t = t_o$ δηλαδή τη στιγμή της έκρηξης η θέση του βλήματος δίνεται από τις

$x_o = V\cos\theta\ t_o$

$y_o = V\sin\theta\ t_o - (1/2)\ gt_o^2$

Τη στιγμή της έκρηξης οι δυνάμεις που δρούν είναι εσωτερικές και επομένως η ορμή του συστήματος των τριών τμημάτων παραμένει σταθερή και η κίνηση του κέντρου μάζας δεν αλλάζει. Για το σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κ.μ. O' το βλήμα αρχικά έχει ταχύτητα μηδέν και επομένως και ορμή μηδέν. Άρα και ύστερα από την έκρηξη το σύστημα των τριών τμημάτων έχει ως προς το κ.μ ορμή μηδέν δηλαδή

$$m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 + 3m\vec{\upsilon}_3 = 0$$

από την οποία προκύπτει

$$\vec{\upsilon}_3 = \frac{1}{3}\left(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2\right) = -\frac{\upsilon}{3}\left(\hat{x} + \hat{y}\right)$$

Τη χρονική στιγμή $t_o + t_1$ οι θέσεις των τριών τμημάτων σχετικά με το κ.μ και του κ.μ σχετικά με το Ο είναι αντίστοιχα:

$$\vec{r}_1 = \vec{\upsilon}_1 t_1 = \upsilon t_1 \hat{x}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{\upsilon}_2 t_2 = \upsilon t_1 \hat{y}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{\upsilon}_3 t_1 = -\frac{\upsilon}{3} t_1 \left(\hat{x} + \hat{y}\right)$$

$$\vec{R} = V\cos\theta(t_o + t_1)\hat{x} + \left[V\sin\theta(t_o + t_1) - \frac{1}{2}g(t_o + t_1)^2\right]\hat{y} = A\hat{x} + B\hat{y}$$

Επομένως η θέση των τμημάτων σχετικά με το Ο (ως προς τον ακίνητο παρατηρητή) καθορίζεται από τις

$$\vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1 = (A + \upsilon t_1)\hat{x} + B\hat{y}$$

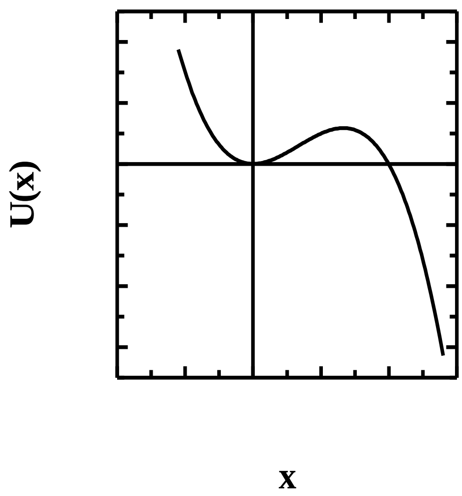
$$\vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{r}_2 = A\hat{x} + (B + \upsilon t_1)\hat{y}$$

$$\vec{R}_3 = \vec{R} + \vec{r}_3 = (A - \frac{\upsilon}{3} t_1)\hat{x} + (B - \frac{\upsilon}{3} t_1)\hat{y}$$

ΘΕΜΑ 5

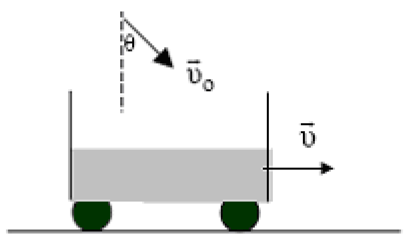
Α. Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ενός σώματος ως συνάρτηση της απόστασης x είναι:

$$U(x) = ax^2 - bx^3$$



όπου τα a, b είναι θετικές σταθερές.
α) Για ποιες τιμές του x η U(x) γίνεται μηδέν;
β) Βρείτε την έκφραση της δύναμης που ασκείται στο σώμα ως συνάρτηση του x.
γ) Προσδιορίστε το σημείο ή τα σημεία όπου η δύναμη μηδενίζεται.
δ) Τι είδους ισορροπία του σώματος έχουμε σε αυτά τα σημεία;
ε) Τί είδους κίνηση θα προκύψει, αν το σώμα αφεθεί ελεύθερο σε μικρή απόσταση από καθένα από αυτά τα σημεία;

Β) Ένα καρότσι μάζα m κινείται με σταθερή ταχύτητα υ σε οριζόντιο επίπεδο. Το καρότσι μαζεύει βροχή η οποία πέφτει στο καρότσι με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ που σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν αμελήσουμε τις τριβές και τις αντιστάσεις να βρεθεί η γωνία θ ώστε η κίνηση του καροτσιού να παραμείνει ισοταχής χωρίς να ασκηθούν εξωτερικές δυνάμεις.



Λύση

Α. α) Η δυναμική ενέργεια

$U(x) = ax^2 - bx^3 (1)$

μηδενίζεται, όταν

$$U(x) = 0 \Rightarrow ax^2 - bx^3 = 0 \Rightarrow x^2(a - bx) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{a}{b}$$

β) Η δύναμη δίνεται από τη σχέση:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \Rightarrow F(x) = -(2ax - 3bx^2) \Rightarrow F(x) = 3bx^2 - 2ax \qquad (2)$$

γ) Η δύναμη μηδενίζεται για τις εξής τιμές του x:

$$F(x)=0 \Rightarrow 3bx^2-2ax=0 \Rightarrow x(3bx-2a)=0 \Rightarrow x_1=0, x_3=\frac{2a}{3b} \quad (3)$$

δ) Για την εύρεση του είδους ισορροπίας στα x_1 και x_3, ευρίσκουμε την δεύτερη παράγωγο της U(x):

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}=\frac{d(2ax-3bx^2)}{dx}=2a-6bx \quad (4)$$

Για x= x_1=0, έχουμε από τη (4):

$\frac{d^2U(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_1}=2a>0$, η U(x) παρουσιάζει ελάχιστο και η x_1 είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Για x= x_3=$\frac{2a}{3b}$, έχουμε επίσης από τη (4):

$\frac{d^2U(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_3}=2a-6b\frac{2a}{3b}=2\alpha-4\alpha=-2\alpha<0$, η U(x) παρουσιάζει μέγιστο και η x_3 είναι θέση ασταθούς ισορροπίας.

ε) Για την θέση x= x_1=0, το σώμα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση, ενώ για τη θέση x= x_3=$\frac{2a}{3b}$, θα απομακρυνθεί από τη θέση ασταθούς ισορροπίας (δεξιά ή αριστερά).

B) Θεωρώ το σύστημα καρότσι -βροχή. Επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις κατά τη διεύθυνση της κίνησης, η ορμή του συστήματος θα διατηρείται σταθερή. Αν τη χρονική στιγμή t η μάζα της βροχής που έχει πέσει στο καρότσι είναι $m_{βρ}$ η ορμή του συστήματος στη διεύθυνση της κίνησης θα είναι $m\,υ + m_{βρ}\,υ_o \sin θ$ και μετά από μικρό χρονικό διάστημα Δt δηλαδή τη χρονική στιγμή t+Δt, (αφού κινείται ισοταχώς το σύστημα) θα είναι $(m+m_{βρ})\,υ$

¨Αρα εξισώνοντας την αρχική ορμή του συστήματος με την τελική ορμή βρίσκουμε

$$m\,υ + m_{βρ}\,υ_o \sin θ=(m+m_{βρ})\,υ \Rightarrow m_{βρ}(υ_o \sin θ-υ)=0 \Rightarrow υ_o \sin θ=υ \Rightarrow \sin θ=\frac{υ}{υ_o}$$