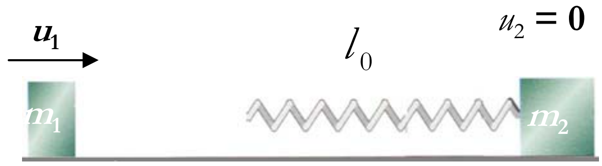
ΕΡΓΑΣΙΑ 4η
(Παράδοση: 18/04/2005)

Άσκηση 1

Πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο βρίσκεται ακίνητη η μάζα $m_2 = 4$Kg στην οποία είναι δεμένη η μια άκρη του ελατηρίου σταθεράς $k = 300$N/m. Η μάζα $m_1 = 2$Kg κινείται με ταχύτητα μέτρου u_1=30m/s στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου με αμελητέα μάζα.



α. Να γραφεί η εξίσωση της κίνησης για κάθε σώμα και για το κέντρο μάζας του συστήματος ελατήριο – σώματα από την στιγμή που το σώμα μάζας m_1 έρχεται σε επαφή με το ελατήριο. Τι είδους κίνηση εκτελούν; Αιτιολογήστε την απάντησή σας

β. Πότε επιτυγχάνεται η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου και πόση είναι αυτή; Πόση είναι τότε η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος;

γ. Αν l_0 είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου, να βρείτε τις συναρτήσεις $F = f(l)$ και $U = f(l)$, όπου l, F, U είναι το μήκος, η δύναμη που ασκείται από το ελατήριο στην μάζα m_2 και η Δυναμική ενέργεια του ελατηρίου αντίστοιχα από την στιγμή της επαφής μέχρι την στιγμή που το ελατήριο αποκτά την μέγιστη συσπείρωση.

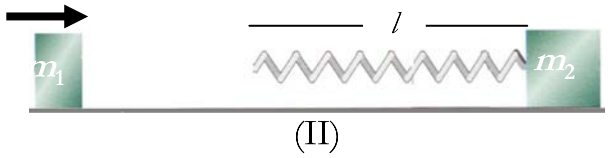
Μονάδες: 10

Λύση:

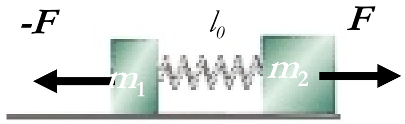
α.

Την χρονική στιγμή t μετά την επαφή του σώματος m_1 με το ελατήριο, η δύναμη που ασκείται σε κάθε σώμα κατά τον οριζόντιο άξονα x, είναι η δύναμη του ελατηρίου, μέτρου $F = kx$ (όπου $x = l - l_0$ η παραμόρφωση του ελατηρίου), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (II).

(I)



(II)



Οι δυνάμεις στον άξονα y (τα βάρη των σωμάτων και οι δυνάμεις από το έδαφος) έχουν συνισταμένη μηδέν και δεν σημειώνονται στο σχήμα. Οι εξισώσεις κίνησης για το κάθε σώμα είναι της μορφής

$$m_1 : -kx = \frac{dP_1}{dt}, \quad m_2 : kx = \frac{dP_2}{dt}$$

όπου P_1 και P_2 είναι οι ορμή του κάθε σώματος αντίστοιχα.

Για το σύστημα σώματα – ελατήριο η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν (Οι δυνάμεις **-*F***, ***F*** είναι εσωτερικές). Άρα για το σύστημα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής και κατά συνέπεια η ορμή του κέντρου μάζας, P_{cm}, θα παραμένει σταθερή και θα είναι

$$P_{cm} = (m_1 + m_2)V_{cm} = m_1 u_1 + 0 \qquad (1)$$

Η εξίσωση της κίνησης του κέντρου μάζας παίρνει τότε την μορφή:

$$\frac{dP_{cm}}{dt} = 0$$

Επομένως η κίνηση κάθε σώματος είναι ευθύγραμμη μεταβαλλόμενη με επιτάχυνση της μορφής

$$m_1 : \frac{du_1}{dt} = -\frac{k}{m_1}x, \quad m_2 : \frac{du_2}{dt} = \frac{k}{m_2}x$$

και το m_1 επιβραδύνεται, ενώ το m_2 επιταχύνεται από την ηρεμία.
Προφανώς το κέντρο μάζας του συστήματος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα που δίνεται από την σχέση (1):

$$V_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}u_1 = 10\, m/s \qquad (2)$$

β.
Η μέγιστη συσπείρωση επιτυγχάνεται όταν οι ταχύτητες των δύο σωμάτων εξισωθούν και γίνουν ίσες με αυτήν του κέντρου μάζας (Σχήμα ΙΙ). Τότε εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (τριβές δεν υπάρχουν) μεταξύ της αρχικής κατάστασης Ι και της τελικής ΙΙ:

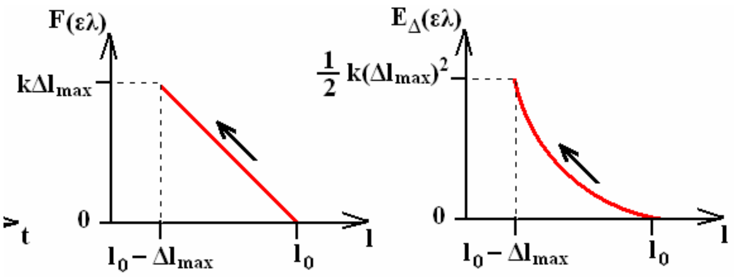
$$E^{(I)}_{\kappa\iota\nu}(m_1) + E^{(I)}_{\kappa\iota\nu}(m_2) + E^{(I)}_{\delta\upsilon\nu}(\varepsilon\lambda) = E^{(II)}_{\kappa\iota\nu}(m_1) + E^{(II)}_{\kappa\iota\nu}(m_2) + E^{(II)}_{\delta\upsilon\nu}(\varepsilon\lambda) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}m_1 V_{cm}^2 + \frac{1}{2}m_2 V_{cm}^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_{max}^2 \overset{(2)}{\rightarrow}$$

$$\Delta l_{max} = 2\ \mathrm{m}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι αυτή που υπολογίστηκε στην σχέση (2).

γ.
Η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $x = l - l_0$. Τότε η δύναμη και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου γράφονται με την μορφή: $F = kx = k(l - l_0)$ και $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$. Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Άσκηση 2

Α. Σώμα μάζας m = 10Kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Την χρονική στιγμή t = 0 ξεκινάει να κινείται κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση μεταβλητής δύναμης F με σταθερή διεύθυνση, που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία $\varphi = 30^o$. Η δύναμη έχει μέτρο που δίνεται από τη σχέση $F = 20+20x$ (N) όπου x είναι η θέση του σώματος στον άξονα x. Αν ο συντελεστής τριβής του σώματος με το δάπεδο είναι $\mu = 0.1$, να υπολογιστεί το έργο W_F της δύναμης F και το έργο της τριβής W_T, από την θέση $x = 0$ μέχρι τη θέση που το σώμα χάνει την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο. (Δίνεται g=10m/s^2)

Β. Ρυμουλκό τραβά με σταθερή ταχύτητα όχημα ασκώντας του σταθερή δύναμη F=5000N. Διακρίνονται δύο περιπτώσεις: το ρυμουλκούμενο όχημα κινείται με ταχύτητα μέτρου u = 2 m/s σε 1.) οριζόντιο επίπεδο και 2.)προς τα πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογιστούν:

α. η ισχύς του ρυμουλκού σε κάθε περίπτωση,

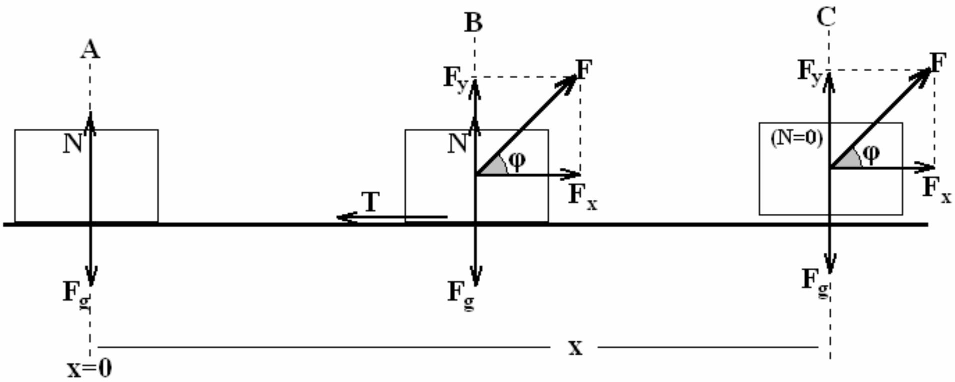
β. ο ρυθμός μετατροπής της προσφερόμενης ενέργειας σε θερμική ενέργεια σε θερμική ενέργεια του οχήματος στην πρώτη περίπτωση και

γ. ο ρυθμός μεταβολής τής δυναμικής ενέργειας του οχήματος στην δεύτερη περίπτωση.

Μονάδες: 10

Λύση:

Α.



Το κιβώτιο αρχικά ηρεμεί στη θέση Α. Με την εφαρμογή της δύναμης F και σε μια τυχαία θέση Β η δύναμη F αναλύεται σε δυο συνιστώσες F_x, F_y, όπου $F_x = F\cos\phi = (10+10x)\sqrt{3}$ και $F_y = F\sin\phi = (10+10x)$

[Προσοχή, ο αριθμός 10 δεν είναι αδιάστατο μέγεθος]!

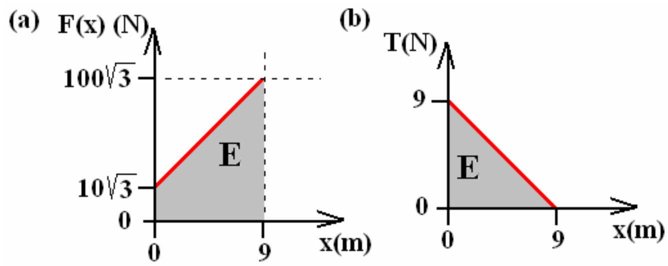
Το κιβώτιο θα χάσει την επαφή του με το επίπεδο στη θέση C όπου $F_y = F_g$ (επειδή N = 0) ή $10+10x=100 \to x =$ 9m.

[*Υπόδειξη*: οι μονάδες στην προηγούμενη σχέση είναι F_y(N) = 10(N) + 10(N/m)·x(m)=100 *N*].

Για όσο διάστημα, το κιβώτιο βρίσκεται σε επαφή με το επίπεδο θα ισχύει:

$$T = \mu N = \mu(F_g - F_y) \text{ ή } T = 0.1(100-10-10x) = 9-x.$$

Όταν το κιβώτιο χάσει την επαφή με το επίπεδο, τότε θα ισχύει $T = 0$ επειδή $N = 0$.



Το έργο της δύναμης F θα είναι (Σχήμα a)

$$W_F = \int_0^9 F_x dx = \int_0^9 (10 + 10x)\sqrt{3}dx = 495\sqrt{3} \text{ J} = 857.4 \text{ J}$$

Το έργο της τριβής θα είναι (Σχήμα b)

$$W_T = -\int_0^9 T dx = -\int_0^9 (9 - x) dx = -40.5 \text{ J}$$

Β.

α. Ο κινητήρας του ρυμουλκού προσφέρει ενέργεια στο όχημα για την κίνησή του, μέσω του έργου της δύναμης **F**. Η ισχύς του κινητήρα του ρυμουλκού θα είναι [*Τόμος Β' Κλασσική Μηχανική, σελ.88, σχέση (3.89)*]:

$$P = \frac{\Delta W_{\mathrm{F}}}{\Delta t} = F\frac{\Delta x}{\Delta t} = Fu = 5000 \cdot 2 = 10000 \text{ J/s}$$

που είναι ίδια και στις δυο περιπτώσεις.

β. Αφού **u** = σταθ. η κινητική ενέργεια του οχήματος παραμένει σταθερή και άρα $\sum F = 0$. Άρα η δύναμη **F** θα είναι ίση με την συνισταμένη δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση του οχήματος. 'Ετσι ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρει ενέργεια το ρυμουλκό στο όχημα, θα είναι ίσος κατ' απόλυτη τιμή με αυτόν που μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια μέσω των αντιστάσεων

$$P_\theta = -\frac{\Delta W_F}{\Delta t} = -F \cdot u = -10000 \text{ J/s}$$

γ. Αφού **u** = σταθ. η κινητική ενέργεια του οχήματος παραμένει σταθερή και κατά συνέπεια $\sum F = 0$. Άρα η δύναμη **F** θα είναι ίση με το βάρος του οχήματος, που αντιστέκεται στην προς τα πάνω κίνηση του οχήματος. Επομένως

$\frac{\Delta W_{\mathrm{F}}}{\Delta t} = -\frac{\Delta W_{\mathrm{F_g}}}{\Delta t}$ και επειδή $\Delta E_\Delta = -\Delta W_{\mathrm{F_g}}$ προκύπτει ότι

$$\frac{\Delta E_\Delta}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{\mathrm{F_g}}}{\Delta t} = F_{\mathrm{g}} \cdot u = 5000 \cdot 2 = 10000 \text{ J/s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι θετικός, αφού εκφράζει την αύξηση της δυναμικής ενέργειας κατά την άνοδο του οχήματος.

Άσκηση 3

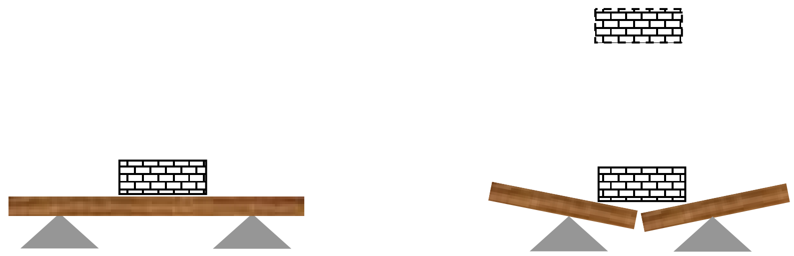
Α. Σφαίρα μάζας $m = 2\text{Kg}$ προσκρούει με κατακόρυφη ταχύτητα $u_1 = 10\text{m/s}$ σε οριζόντιο δάπεδο και αναπηδά με ταχύτητα $u_2 = 6\text{m/s}$. Η διάρκεια επαφής της σφαίρας με το δάπεδο είναι $\Delta t = 0.1\text{s}$. Να υπολογιστούν:

α. η μεταβολή της ορμής της σφαίρας και

β. η μέση δύναμη, που δέχεται η σφαίρα από το δάπεδο.

(Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$).

Β. Εξηγήστε ποιοτικά την κατάσταση που περιγράφεται στα σχήματα (α) και (β)



(α) (β)

Στο σχήμα (α) το σώμα ισορροπεί στην οριζόντια σανίδα με τάση θραύσης μέτρου T_θ, ενώ στο Σχήμα (β) αφέθηκε από ύψος H πάνω από αυτήν.

Μονάδες: 10

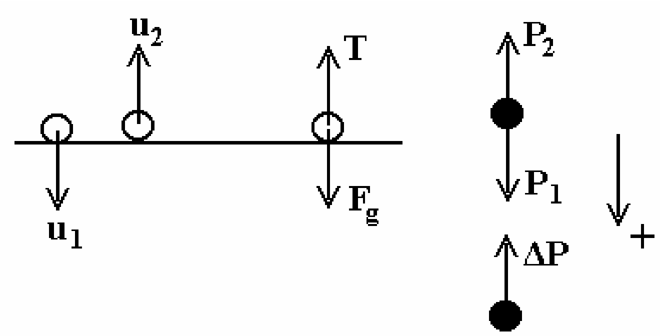
Λύση:

Α.

α) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας θα είναι $\mathbf{\Delta P} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$, όπου $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$ είναι η ορμή της σφαίρας πριν και μετά την αναπήδηση αντίστοιχα, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αν θεωρήσουμε ως θετική την κατεύθυνση της ορμής $\mathbf{P}_1$ έχουμε:

$$\Delta P = -P_2 - (+P_1) = -mu_2 - mu_1 = -32\ \text{Kgm/s}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το διάνυσμα $\mathbf{\Delta P}$ έχει φορά αντίθετη της φοράς του διανύσματος $\mathbf{P}_1$.



β) Κατά την διάρκεια της επαφής της με το δάπεδο, η σφαίρα δέχεται μια μέση δύναμη από το δάπεδο $\mathbf{T}$. Αν $\mathbf{F}_g$ είναι το βάρος της σφαίρας, από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:.

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \to \sum F = \frac{-32\,\text{Kgm/s}}{0.1\text{s}} = -320\,\text{N}$$

Επειδή $\sum F = F_g + T$ η μέση δύναμη $\mathbf{T}$ είναι: $T = \sum F - F_g = -320 - 2\cdot 10 = -340\,\text{N}$ (Το «-» στο αποτέλεσμα δικαιολογείται με βάση την φορά των αξόνων που έχει τεθεί στο σχήμα).

Β. Στο σχήμα (α) ισχύει ότι η δύναμη που δέχεται η σανίδα από το σώμα είναι ίση με το βάρος του σώματος που προφανώς είναι μικρότερο από την τάση θραύσης T_θ, της σανίδας. Στο σχήμα (β), όπως προκύπτει από το προηγούμενο ερώτημα, το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σανίδα από το σώμα θα είναι $T' = F_g + \dfrac{dP}{dt}$, όπου F_g είναι το βάρος του σώματος. Αν η T' είναι μεγαλύτερη από την τάση θραύσης, T_θ, της σανίδας, τότε έχουμε το αποτέλεσμα του σχήματος (β).

Άσκηση 4

Α. Οβίδα μάζας M = 50Kg εκτοξεύεται με ταχύτητα V = 600m/s υπό γωνία φ = 15° σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο. Μόλις η οβίδα βρεθεί στο μέγιστο ύψος της τροχιάς της εκρήγνυται και διασπάται σε δύο τμήματα με μάζες $m_1 = \dfrac{1}{3}$M και $m_2 = \dfrac{2}{3}$M. Το δεύτερο τμήμα μετά την έκρηξη κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα v_2 = 500m/s. Υπολογίστε την ταχύτητα του άλλου τμήματος αμέσως μετά την έκρηξη και την ενέργεια που απελευθερώθηκε.

Β. Επάνω σε ένα αντικείμενο μάζας 2 kg ασκείται δύναμη $\mathbf{F} = \left(\alpha t^2\right)\,\mathbf{i} - \left(\beta - \gamma t\right)\mathbf{j}$, όπου $\alpha = 15\ N/s^2$, $\beta = 12\ N$, $\gamma = 20\ N/s$. Αν το αντικείμενο ήταν αρχικά ακίνητο, ποιο είναι το διάνυσμα της ταχύτητάς του όταν η δύναμη έχει ασκηθεί για 0.5 s;

Μονάδες: 10

Λύση:

Η οβίδα εκτοξεύεται με οριζόντιο συνιστώσα ταχύτητας $\mathbf{v}$ μέτρου $v = V\cos\varphi$. Αυτή είναι και ταχύτητα που θα έχει η οβίδα στο μέγιστο ύψος της τροχιάς της μόλις πριν την έκρηξη. Μετά την έκρηξη το πρώτο τμήμα κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}_1$ και το δεύτερο με ταχύτητα $\mathbf{v}_2$ κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω (Σχήμα).

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \to M\mathbf{v} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2.$$

Αναλύουμε τις ορμές σε δύο άξονες x, y (Σχήμα) πριν και μετά την έκρηξη στο μέγιστο ύψος και έχουμε:

$$Mv = m_1 v_{1x} + m_2 \cdot 0 \qquad (1)$$

και

$$0 = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} \qquad (2)$$

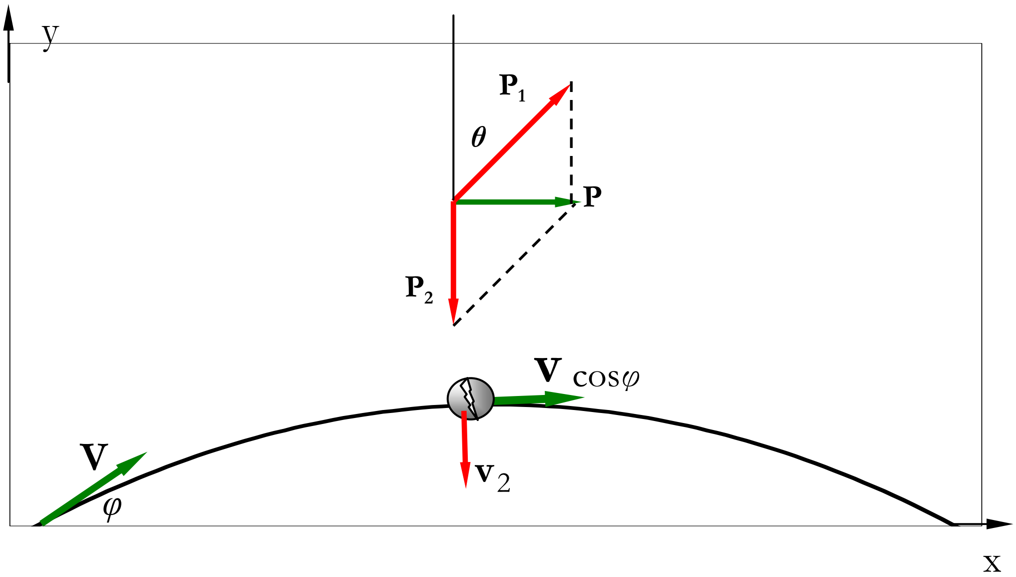
Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει αντίστοιχα ότι

$v_{1x} = \frac{M}{m_1} v$ και η $v_{1y} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2y}$. Το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{v}_1$ θα είναι τελικά

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{m_1}\right)^2 \cdot v^2 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cdot v_{2y}^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{M/3}\right)^2 \cdot V^2 \cdot \cos^2 \phi + \left(\frac{2M/3}{M/3}\right)^2 \cdot v_2^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 \cdot 600^2 \cdot \cos^2 15 + 2^2 \cdot 500^2} \quad m/s = \sqrt{3022961 + 1000000} \quad m/s =$$

$$= \sqrt{4022961}\ m/s = 2006\ m/s \qquad \Rightarrow \quad v_1 = 2006 \text{ m/s}.$$



και θα σχηματίζει γωνία $\theta = \arctan \dfrac{-\frac{m_2}{m_1} \cdot v_{2y}}{\frac{M}{m_1} \cdot v} = \arctan \dfrac{-\frac{2M/3}{M/3} \cdot v_{2y}}{\frac{M}{M/3} \cdot v} =$

$$= \arctan \frac{-2 \cdot (-500) m/s}{3 \cdot 600 \cdot \cos 15\ m/s} = \arctan(0.575) \rightarrow \theta = 30^\circ$$ ως προς την κατακόρυφο.

Από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας πριν και μετά την έκρηξη στο μέγιστο ύψος προκύπτει:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + Q \qquad (3)$$

όπου Q το ποσό της ενέργειας που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη. Δεδομένου ότι ο μοναδικός άγνωστος στην εξίσωση (3) είναι το Q, παίρνουμε $Q = -33.2 \cdot 10^6$ J.

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι απελευθερώθηκε ενέργεια από την χημική ενέργεια των εκρηκτικών

B.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι $d\mathbf{P} = \mathbf{F}dt \rightarrow \mathbf{P} = \int \mathbf{F}dt + C$. Έτσι παίρνουμε για κάθε άξονα χωριστά:

$$P_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt = \int_0^{0.5} \left(at^2\right)dt = \frac{1}{3}at^3 \Big|_{0.0}^{0.5} = \ldots = 0.625N \cdot s \quad \textit{και}$$

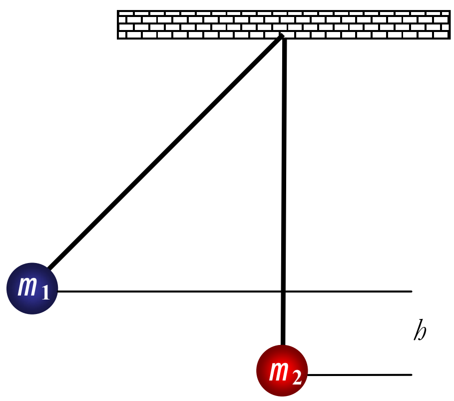
$$P_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt = -\int_0^{0.5} (\beta - \gamma t)dt = -\left(\beta t_2 - \gamma t_2^2\right)\Big|_{0.0}^{0.5} = \ldots = -3.5N \cdot s$$

Άρα το διάνυσμα της ταχύτητάς του είναι

$$\mathbf{V} = 0.31\mathbf{i} - 1.75\mathbf{j} \ \text{(m/s)}.$$

Άσκηση 5

A. Δύο πλαστικές σφαίρες μάζας m_1 και m_2 είναι αναρτημένες όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν αφήσουμε την m_1 ελεύθερη, συγκρούεται πλαστικά με την m_2. Το συσσωμάτωμα φτάνει σε ύψος $h/3$. Αν η μάζα $m_1 = 10$ gr, υπολογίστε την μάζα m_2 και το ποσό της ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα. Δίνεται $h = 10$ cm. (Δίνεται g=10m/s^2).



B. Βόμβα είναι ακίνητη σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή εκρήγνυται σε τρία κομμάτια. Τα δυο κομμάτια με μάζες m_1 = 2Kg και m_2 = 3Kg κινούνται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις με ταχύτητες μέτρων u_1 = 40m/s και u_2 = 20m/s αντίστοιχα. Αν το τρίτο κομμάτι έχει μάζα m_3 = 5Kg, να υπολογιστεί η ταχύτητά του.

Μονάδες: 10

Λύση:

A.

Η σύγκρουση θα γίνει στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του σώματος m_1 και αφού η κρούση είναι πλαστική οι δύο σφαίρες μετά την σύγκρουση θα κινηθούν σαν μία σφαίρα μάζας $m_1 + m_2$ και θα ανέβουν μέχρι το ύψος $h/3$.

Η δυναμική ενέργεια των σφαιρών m_1 και m_2 πριν αρχίσει την κίνηση η m_1 είναι U_1=$m_1 \cdot g \cdot h$

και U_2=0 αντίστοιχα (θεωρούμε ως επίπεδο αναφοράς το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται η m_2). Μόλις πριν από την κρούση η δυναμική ενέργεια της m_1 θα ισούται με 0 και η κινητική της θα ισούται με την αρχική δυναμική ενέργεια που είχε, δηλαδή

$$E_1 = \tfrac{1}{2}\cdot m_1\cdot v_1^2 = m_1\cdot g\cdot h \qquad (1)$$

ενώ αμέσως μετά την κρούση η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος θα ισούται με $E = \tfrac{1}{2}\cdot(m_1+m_2)\cdot v^2$. Αντίστοιχα για τα μέτρα των ορμών θα έχουμε

$$P_1 = m_1\cdot v_1,\ \ P_2 = (m_1+m_2)\cdot v \quad \text{και } P_1 = P_2 \qquad (2)$$

(Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής αφού θεωρήσουμε ότι τα διανύσματά τους είναι παράλληλα).

Λόγω της διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε:

$$E_1 = E + Q \qquad (3)$$

όπου Q η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την διάρκεια της κρούσης.

Τέλος, η κινητική ενέργεια E θα ισούται με την δυναμική ενέργεια του συσσωματώματος όταν αυτό φτάσει στο μέγιστο ύψος h_1, συνεπώς έχουμε

$$\tfrac{1}{2}\cdot(m_1+m_2)\cdot \mathrm{v}^2 = (m_1+m_2)\cdot g\cdot h_1 = (m_1+m_2)\cdot g\cdot h/3 \rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{3}} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα στις εξισώσεις (2) από την εξίσωση (1) και (4), προκύπτει τελικά

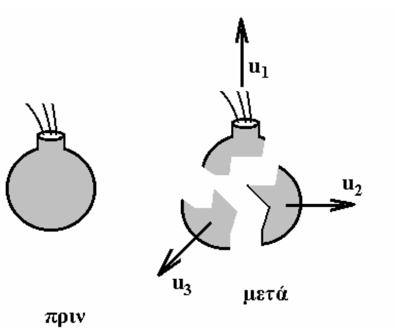
$$m_2 = m_1\left(\sqrt{3} - 1\right) = 10\text{x}10^{-3}\text{Kg} \cdot (1.732 - 1) = 10^{-2} \cdot 0.732\ \text{Kg} = 7.32 \cdot 10^{-3}\text{Kg} \approx 7.3\text{g}$$

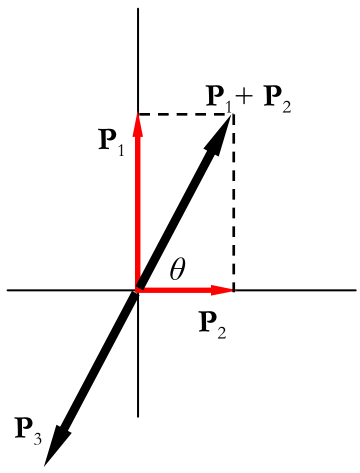
Από την εξίσωση (3) προκύπτει και η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα:

$$Q = E_1 - E = m_1\, g\, h - \left(m_1 + m_2\right) g\, h/3 = 1/3 gh\left(2m_1 - m_2\right) =$$

$$= 1/3 \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 0.1\text{m} \cdot (2\cdot 0.010 - 0.0073)\ \text{Kg} = 0.0042\ \text{J} \text{ και συνεπώς } Q = 0.0042\text{J}$$

Β.





Από την αρχή της διατήρησης της ορμής του συστήματος παίρνουμε

$\mathbf{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \mathbf{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \rightarrow 0 = \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2} + \mathbf{P_3} \rightarrow \mathbf{P_3} = -\left(\mathbf{P_1} + \mathbf{P_2}\right)$. Αυτή η διανυσματική σχέση παριστάνεται γραφικά στο παραπάνω σχήμα. Άρα $P_3 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$ και $\tan\theta = \dfrac{P_1}{P_2}$. Αλλά

$P_1 = m_1 u_1 = 80\,\text{Kgm/s}$ και $P_2 = m_2 u_2 = 60\,\text{Kgm/s}$, οπότε $P_3 = 100\text{Kgm/s}$ και

$\tan\theta = 1.33 \rightarrow \theta = 53^0\,8'$. Επομένως το μέτρο της ταχύτητας του τρίτου κομματιού θα είναι $u_3 = 20\,\mathrm{m/s}$ και η κατεύθυνσή της καθορίζεται από την γωνία *θ*.

Άσκηση 6

Ένα jetski (ταχύπλοο το οποίο αναρροφά νερό από την καρίνα και το εκτοξεύει προς τα πίσω) ξεκινά από την ηρεμία. Αν η αντίσταση του νερού δίνεται από την σχέση $\mathbf{A} = -k\mathbf{v}$, όπου **v** η ταχύτητα του ταχύπλοου και *k* σταθερά και το νερό εκτοξεύεται με σχετική ως προς το ταχύπλοο ταχύτητα u = 35m/s και ρυθμό λ = 10 Kg/s, υπολογίστε την τελική ταχύτητα του jetski. Δίνεται ότι k = 10 N·s/m.

Μονάδες: 10

Λύση:

Κατά την κίνηση του ταχύπλοου η μάζα του δεν μεταβάλλεται, αφού απλώς εκτοξεύει το νερό, το οποίο αναρροφά από κάτω, προς τα πίσω. Το νερό είναι αρχικά ακίνητο.

Θεωρούμε ότι τα διανύσματα ορμών, ταχυτήτων και δυνάμεων είναι παράλληλα με τον άξονα x και συνεπώς εργαζόμαστε μόνο με τα μέτρα και την φορά (διατηρώντας το κατάλληλο πρόσημο).

Ας υποθέσουμε ότι εκτοξεύεται μάζα νερού *dm* σε χρόνο *dt*. Η ορμή του μεταβάλλεται σύμφωνα με την σχέση: $dP = dm \cdot \mathrm{V}$ όπου V η ταχύτητα του ως προς ακίνητο παρατηρητή.

Η ορμή του ταχύπλοου πριν είναι $P_{\pi\rho\iota\nu}$ = M · ν, ενώ αμέσως δε μετά την εκτόξευση θα είναι:

$$P_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \mathrm{M} \cdot (\nu + d\nu) + dm \cdot \mathrm{V} = \mathrm{M} \cdot \nu + \mathrm{M} \cdot d\nu + dm \cdot (\nu - u)$$

Η μεταβολή της ορμής θα είναι: $dP = \mathrm{M} \cdot d\nu + dm \cdot (\nu - u)$

και η δύναμη που αναπτύσσεται σε χρόνο dt ισούται με

$$\mathrm{F} = dP/dt = \mathrm{M} \cdot d\nu/dt + dm/dt \cdot (\nu - u)$$

Η δύναμη αυτή θα ισούται τελικά με την αντίσταση του νερού. Ετσι θα έχουμε:

$$\lambda = dm/dt$$

$$\mathrm{M} \cdot d\nu/dt + dm/dt \cdot (\nu - u) = -k \cdot \nu \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M} \cdot d\nu/dt + \lambda \cdot (\nu - u) = -k \cdot \nu$$

Ακολούθως χωρίζοντας τις μεταβλητές ν και t έχουμε:

$$\mathrm{M} \cdot d\nu/dt = -k \cdot \nu - \lambda \cdot \nu + \lambda \cdot u = -(k + \lambda) \cdot \nu + \lambda \cdot u \quad \Rightarrow \quad \frac{d\nu}{-(k+\lambda)\cdot\nu + \lambda \cdot u} = \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot dt$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int_0^{\nu} \frac{d\nu}{-(k+\lambda)\cdot\nu+\lambda\cdot u} = \frac{1}{M}\cdot\int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{-(k+\lambda)}\int_0^{\nu} \frac{d(-(k+\lambda)\nu+\lambda u)}{-(k+\lambda)\cdot\nu+\lambda\cdot u} = \frac{1}{M}\cdot t \Rightarrow$$

$$\frac{1}{-(k+\lambda)}\ln\frac{-(k+\lambda)\cdot\nu+\lambda\cdot u}{\lambda\cdot u} = \frac{1}{M}\cdot t \Rightarrow \ln\frac{-(k+\lambda)\cdot\nu+\lambda\cdot u}{\lambda\cdot u} = \frac{-(k+\lambda)}{M}\cdot t$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-(k+\lambda)\cdot\nu}{\lambda\cdot u}+1 = e^{\frac{-(k+\lambda)}{M}\cdot t} \Rightarrow \nu = \frac{\lambda\cdot u}{(k+\lambda)}\left(1-e^{\frac{-(k+\lambda)}{M}\cdot t}\right) \Rightarrow$$

$$\nu = \frac{\lambda\cdot u}{(k+\lambda)}\left(1-e^{c\cdot t}\right)$$

όπου $c = -\dfrac{(k+\lambda)}{M}$

Η τελική ταχύτητα, την οποία αποκτά όταν $t\to\infty$ ($\lim_{t\to\infty} e^{ct} = 0$) θα ισούται με:

$$\nu = \frac{\lambda\cdot u}{(k+\lambda)} = \frac{10\text{Kg/s}\cdot 35\text{m/s}}{10\text{Kgs}+10\text{Kg/s}} = \frac{350\text{Kgm/s}^2}{20\text{Kg/s}} = 17.5\text{m/s}$$

Συνεπώς η τελική ταχύτητα θα ισούται με ν = 17.5m/s ≈ 63km/h.

Άσκηση 7

Πύραυλος μάζας *m* εκτοξεύεται από την επιφάνεια της γης με ταχύτητα ίση με το μισό της ταχύτητας διαφυγής από την γη. Να υπολογιστούν:

α. η ταχύτητα του πυραύλου όταν αυτός θα απέχει απόσταση *r* από το κέντρο της γης και

β. η μέγιστη απόσταση $r_{\max}$ από το κέντρο της γης στην οποία μπορεί να φτάσει ο πύραυλος αυτός

Δίνονται: η ακτίνα της γης, R = 6400 km και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης, $g = 10$ m/s^2.

Μονάδες: 10

Λύση:

α. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας στο πεδίο βαρύτητας της γης έχουμε [*Κλασσική Μηχανική, Μέρος Β, Εφαρμογή τύπου 3.128 σελ. 115*]:

$$U_1 + T_1 = U(r) + T(r) \quad (1)$$

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mV^2(r)}{2} - \frac{GMm}{r} \quad (2)$$

όπου $V_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$ (3)

[Χρήση χωρίς απόδειξη της σχέσης 3.129, σελ. 115 στην Κλασσική Μηχανική, Μέρος Β]

Τότε η (2) λόγω της (3) γίνεται

$$V(r)=\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{4/3R}\right)} \qquad (4)$$

και επειδή $g=\dfrac{GM}{R^2}\longrightarrow GM=gR^2$ η (4) γίνεται

$$V(r)=\sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{4/3R}\right)} \qquad (5)$$

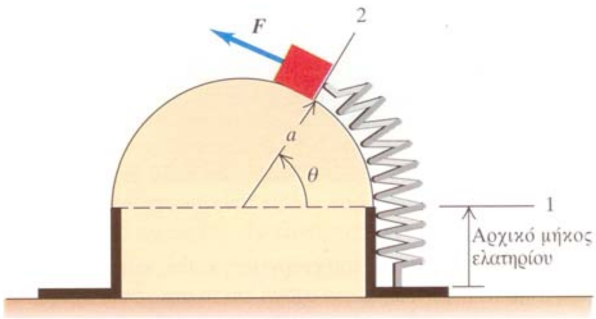
β.

Για να είναι $r = r_{\max}$ πρέπει $V(r_{\max}) = 0$, τότε από την σχέση (5) προκύπτει ότι

$$r_{\max}=\frac{4}{3}R$$

Άσκηση 8

Α. Μια μεταβλητή δύναμη F διατηρείται εφαπτομενική κατά μήκος μιας λείας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας a (Σχήμα). Επιβάλλοντας βραδεία μεταβολή του μέτρου της δύναμης, ένα σώμα βάρους W κινείται κατά μήκος της επιφάνειας, ενώ το ελατήριο στο άκρο του οποίου έχει προσκολληθεί το σώμα, εκτείνεται από την θέση 1 (όπου το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος) στην θέση 2. Υπολογίστε το έργο που παράγεται από την δύναμη F.



Β. Διαπιστώνεται ότι ένα συγκεκριμένο ελατήριο δεν ακολουθεί τον νόμο του Hooke αλλά ασκεί μια δύναμη επαναφοράς της μορφής $F_x(x)=-ax-bx^2$, όταν εκτείνεται η συμπιέζεται κατά μήκος x, όπου a = 70 N/m και b = 12 N/m².

α. Υπολογίστε την συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ για το ελατήριο αυτό. Υποθέστε ότι $U(0) = 0$.

β. Ένα αντικείμενο μάζας 2 Kg προσαρτάται στο άκρο του ελατηρίου αυτού, έλκεται για μήκος 1 m προς τα δεξιά πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια και στην συνέχεια αφήνεται ελεύθερο. Πόση είναι η ταχύτητα του αντικειμένου όταν βρίσκεται σε απόσταση 0.5 m δεξιά από την θέση ισορροπίας όπου $x = 0$;

Μονάδες: 10

Λύση

Α.

Το σώμα κινείται πολύ αργά και κατά συνέπεια η κινητική του ενέργεια δεν μεταβάλλεται. Μεταβάλλεται η όμως η δυναμική του. Αν x είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου στην θέση 2, θα έχουμε για το σύστημα ελατήριο – σώμα:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = U_g + U_s - 0 = mga\sin\theta + \frac{1}{2}K\left(a\theta\right)^2$$ **,** όπου

$U_{\text{g}} = mgh = mg\left(a\sin\theta\right)$ είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια στην θέση 2 και

$U_{\text{s}} = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}K\left(a\theta\right)^2$ η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στην θέση 2.

Στην θέση 1 όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος θεωρήσαμε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μηδέν.

Β.

α. Γνωρίζουμε ότι: $W_{F_X} = -\left(U_2 - U_1\right) = \int_{x_1}^{x_2} F_x\left(x\right)dx$ *[Σχέση 3.113, σελ. 108, στην Κλασσική Μηχανική, Μέρος Β]*

Στο $x_1 = 0$ είναι $U_1 = 0$, τότε

$$U\left(x\right) = -\int_0^x F_x\left(x\right)dx = -\int_0^x\left(-ax - \beta x^2\right)dx = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}\beta x^3$$

β. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τις δύο θέσεις $x_1 = 1\text{m}$ και $x_2 = 0.5\text{m}$ του αντικειμένου και έχουμε

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ **όπου**

$U_1 = U\left(x_1\right) = \frac{1}{2}ax_1^{\,2} + \frac{1}{3}\beta x_1^{\,3}, \quad U_2 = U\left(x_2\right) = \frac{1}{2}ax_2^{\,2} + \frac{1}{3}\beta x_2^{\,3}$ **και**

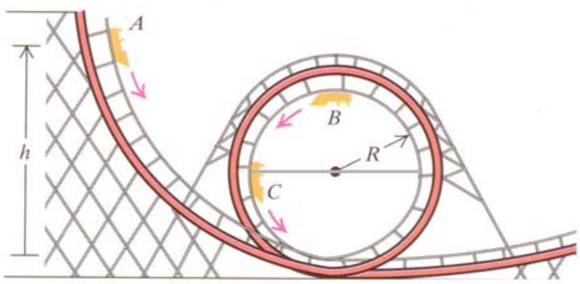
$K_1 = 0, \quad K_2 = \frac{1}{2}mV_2^2$

Ο συνδυασμός των παραπάνω σχέσεων δίνει $V_2 = 5.45\, m/s$ **.**

Άσκηση 9

Α. Μια σφαίρα πυροβόλου μάζας $m = 0.1$ kg που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $V = 200$ m/s κτυπά και διαπερνά ξύλινη πλάκα μάζας $M = 2$ kg, που είναι στερεωμένη στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $K = 50$ N/m. Η πλάκα μπορεί να κινείται στο οριζόντιο δάπεδο με αμελητέα τριβή. Η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $x_{\max} = 0.2$ m. Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία η σφαίρα εγκατέλειψε την πλάκα.

Β. Ένα αμαξάκι σε λούνα-πάρκ κυλάει χωρίς τριβές κατά μήκος της ανακυκλούμενης τροχιάς που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ξεκινά, ενώ ηρεμεί αρχικά από το σημείο Α, σε ύψος h πάνω από το κατώτατο σημείο της τροχιάς.



α. Ποια η ελάχιστη τιμή του h (ως συνάρτηση του R), ώστε το αμαξάκι να ολοκληρώσει την ανακύκλωση χωρίς να διακινδυνεύσει πτώση στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς (σημείο B),

β. Αν $h = 3.5R$ και R = 30 m, υπολογίστε την ταχύτητα, την ακτινική επιτάχυνση και την εφαπτομενική επιτάχυνση των επιβατών όταν το αμαξάκι βρίσκεται στο σημείο C, που αντιστοιχεί στο άκρο μιας οριζόντιας διαμέτρου. (Δίνεται g=10m/s^2)

Μονάδες: 10

Λύση

A.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την σύγκρουση της σφαίρας με την ξύλινη πλάκα. Μετά την σύγκρουση η σφαίρα αποκτά ταχύτητα V_1 και η πλάκα V_2.

$$\mathbf{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \mathbf{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \to mV = mV_1 + MV_2 \qquad (1)$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα ελατήριο – ξύλινη πλάκα από την στιγμή που η σφαίρα εξέρχεται της πλάκας (θέση 1) ως την στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης (θέση 2).

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \to \frac{1}{2}MV_2^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}Kx_{\max}^2 \to V_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}x_{\max} = \ldots = 1\,m/s \qquad (2)$$

από σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$V_1 = \frac{mV - MV_2}{m} = 180\,m/s$$

B.

α. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τις θέσεις Α και Β:

$$U_A - U_B = mg\left(h - 2\mathrm{R}\right) = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 \qquad (1)$$

Αποδεικνύεται ότι για να μην χάσει την επαφή του με την τροχιά του, το αμαξάκι πρέπει να έχει ταχύτητα τουλάχιστον $v_{\mathrm{A}} = \sqrt{g\mathrm{R}}$ *[Άσκηση αυτοαξιολόγησης 3.29, σχέση 3.283, σελ. 345, Κλασσική Μηχανική, Μέρος Β]*. Από την σχέση (1) έχουμε:

$$mg\left(h_{\min} - 2R\right) = \frac{1}{2}mg\mathrm{R} \to h_{\min} = \frac{5}{2}\mathrm{R}$$

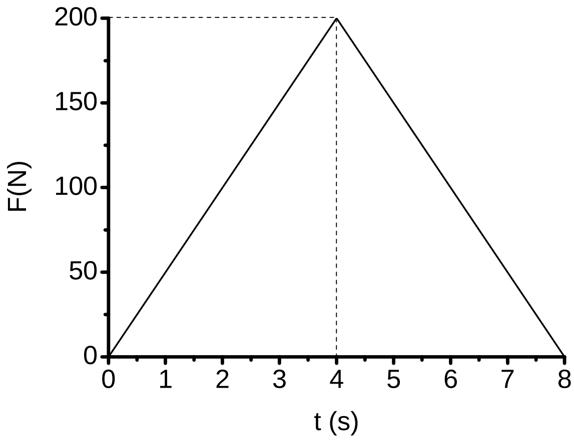
β. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τις θέσεις Α και C:

$$U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{C}} = 2.5Rmg = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{C}}^2 \to v_{\mathrm{C}} = \sqrt{5g\mathrm{R}} = 38.7\ \mathrm{m/s}.$$

Η ακτινική επιτάχυνση είναι φυσικά η κεντρομόλος επιτάχυνση που δίνεται από την σχέση $a_{\mathrm{rad}} = \frac{v_{\mathrm{C}}^2}{\mathrm{R}} = 5g = 50\,m/s^2$, ενώ η εφαπτομενική είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας $a = g = 10\,m/s^2$

Άσκηση 10

Σώμα μάζας m = 20 kg ενώ ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, αρχίζει να δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης F που το μέτρο της σε συνάρτηση με τον χρόνο μεταβάλλεται όπως δείχνει το διπλανό διάγραμμα. Θεωρείστε ότι ο μέγιστος συντελεστής στατικής τριβής είναι ίσος με τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου που είναι $n = 0.5$. Ζητούνται:



α. Η γραφική παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ως συνάρτηση του χρόνου

β. Να βρεθεί η ορμή του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου και να παρασταθεί γραφικά

γ. Η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει;

δ. Η ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή $t = 8$ s.

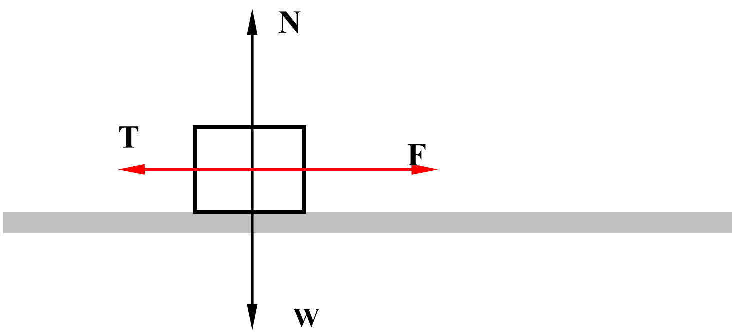
ε. Η ολική διάρκεια της κίνησης του σώματος

Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

Μονάδες: 10

Λύση

α. Στο σώμα ασκούνται η δύναμη **F**, η τριβή **T**, το βάρος του $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$ και η δύναμη από το δάπεδο **N** (Σχήμα). Από το διάγραμμα $F = f(t)$ προκύπτει ότι



$$F = \begin{cases} 50t, & 0 \le t \le 4\text{s} \\ 400 - 50t, & 4 < t \le 8\text{s} \end{cases} \qquad (1)$$

Η μέγιστη στατική τριβή, που θα είναι ίση με την τριβή ολίσθησης θα είναι:

$T_{\sigma\tau,\max} = n_{\sigma\tau,\max} N = nN = 100N$,

αφού στον κατακόρυφο άξονα y ισχύει $N = mg = 200N$. Το σώμα αρχίζει να κινείται από την στιγμή που ισχύει $\mathbf{T}_{\sigma\tau,\max} = \mathbf{F}$. Αυτό θα συμβεί την χρονική στιγμή $t = 2$ s. Από την στιγμή αυτή και έπειτα έχουμε:

Άξονας x:

$$\sum F_x = F - T = F - nN \qquad (2)$$

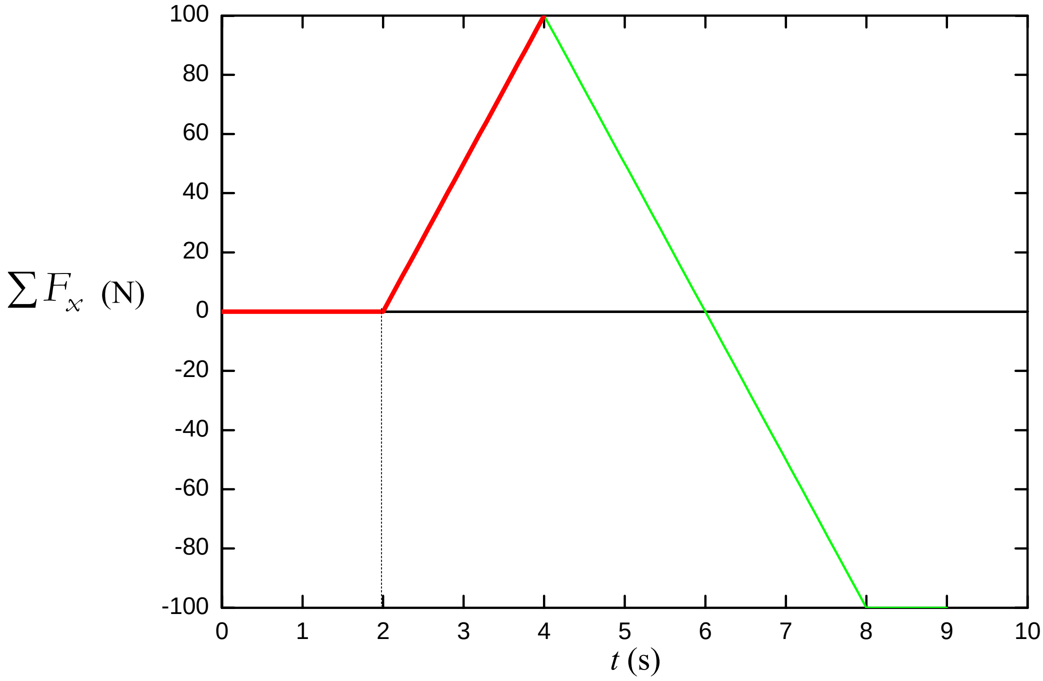
Άξονας y:

$$N = mg = 200N \qquad (3)$$

Λόγω των (1) και (3), η σχέση (2) γράφεται:

$$\sum F_x = F - nN = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\text{s} \\ 50t - 100, & 2 \le t \le 4\text{s} \\ 300 - 50t, & 4 < t \le 8\text{s} \end{cases} \qquad (4)$$

Η γραφική παράσταση της $\sum F_x$ ως συνάρτηση του χρόνου t φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



β.

Από την σχέση (4) είναι δυνατόν να υπολογιστεί η ορμή του σώματος.

$$0 \le t \le 4s$$

$$P_1(t) = \int_0^t \sum F_x dt = \int_0^2 \sum F_x dt + \int_2^t \sum F_x dt = 0 + \int_{t_0=2}^{t} \sum F_x dt = \int_{t_0=2}^{t} (50t - 100)\,dt \rightarrow$$

$$P_1(t) = 25t^2 - 100t + 100, \quad \text{Kgm/s}$$

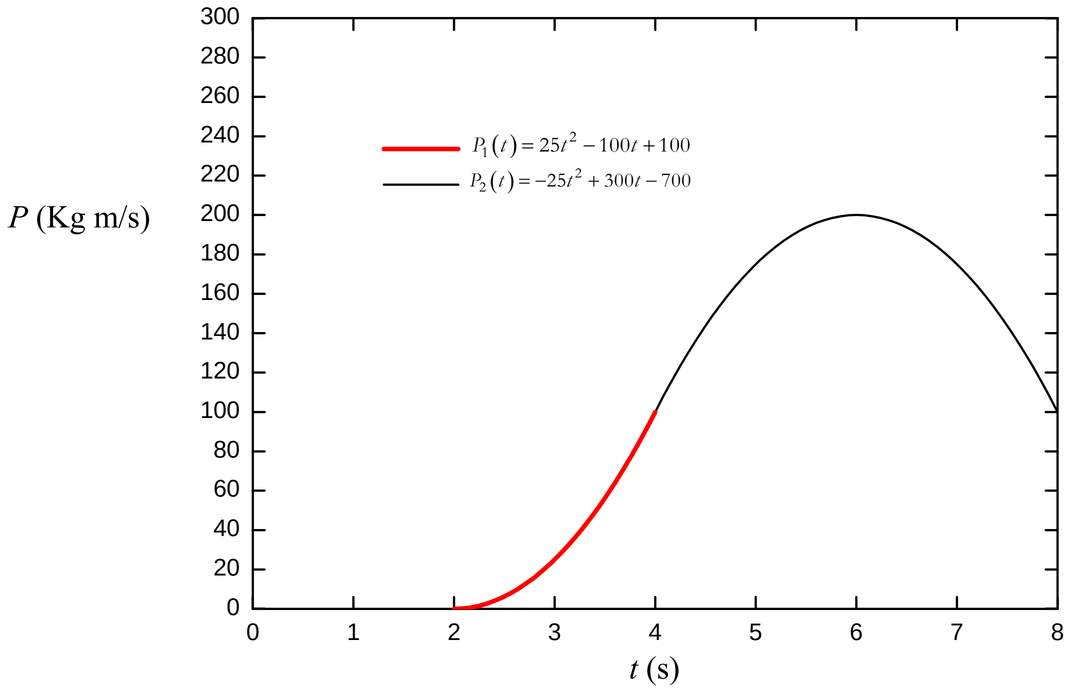
Ομοίως για

$$4 \le t \le 8s$$

$$P_2(t) = \int_0^t \sum F_x dt = \int_0^2 \sum F_x dt + \int_2^4 \sum F_x dt + \int_4^t \sum F_x dt = 0 + P_1(4) + \int_{t_0=4}^{t} (300 - 50t)\,dt \rightarrow$$

$$P_2(t) = -25t^2 + 300t - 700, \quad \text{Kgm/s}$$

Η γραφική παράσταση των P_1 και P_2 δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



γ. Όπως φαίνεται στην παραπάνω γραφική παράσταση, η μέγιστη ταχύτητα επιτυγχάνεται μετά την χρονική στιγμή t = 4s. Έτσι μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $P_2(t)$ βρίσκουμε την χρονική στιγμή που έχουμε την μέγιστη ορμή:

$$\frac{dP_1}{dt} = 0 \to -50t_1 + 300 = 0 \to t_1 = 6\text{s}$$

Οπότε η μέγιστη ταχύτητα θα είναι $V\left(t_1\right) = \dfrac{P_1}{m} = ... = 10\,\text{m/s}$

δ. Ομοίως η ταχύτητά του την χρονική στιγμή t = 8 s θα είναι

$$V_0\left(t = 8\right) = \frac{P_1(t = 8)}{m} = ... = 5\,\text{m/s}$$

ε. Την στιγμή t = 8 s σταματάει η επίδραση της δύναμης **F** και η μόνη δύναμη που δρά στο σώμα είναι η τριβή **T** με μέτρο $T = nN = 100\text{N}$ και το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση $a = -\dfrac{T}{m}$.

Την ίδια χρονική στιγμή έχει ταχύτητα V_0 όπως βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Έτσι από το θεώρημα έργου ενέργειας από την στιγμή t = 8s μέχρι την στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του έχουμε:

$$\Delta E_k = -W_T \to 0 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -TS \to S = \frac{mV_0^2}{2T} = ... = 2.5\text{m}$$

Από την σχέση $V = V_0 + at$ [*Κλασσική Μηχανική, Μέρος Α*], όπου $V = 0$ έχουμε

$$0 = V_0 + at \to 0 = V_0 + \left(-\frac{T}{m}\right)t \to t = \frac{V_0 m}{T} = ... = 1\text{s}$$

Άρα ο συνολικός χρόνος της κίνησης του σώματος είναι: $t_{ολ} = (8 - 2) + 1 = 7\text{s}$, όπου (8-2)s είναι ο χρόνος που η δύναμη **F** επιδρά στην κινητική κατάσταση του σώματος.