ΕΡΓΑΣΙΑ 2
(Παράδοση: ....)

Σημείωση: Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε τα όρια:

I. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-3x+2}$, II. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}$, III. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$

Όπου χρειαστεί να θεωρήσετε γνωστό ότι $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\sin z}{z}\right)=1$

Λύση

I. Το πεδίο ορισμού Α, θα προκύψει από την απαίτηση ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός. Έτσι, $A = R-\{1,2\}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sin(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x-1}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right]\cdot\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-1}\right] \qquad \text{(A)}$$

επειδή όμως:

$\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}\right]=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ (έχουμε αντικαταστήσει: x-2=u, οπότε για x → 2 το u → 0).

και $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x-1}\right]=1$ η σχέση (Α) δίνει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-3x+2}=1\cdot 1=1$

II. Θα πρέπει αφ'ενός μεν η υπόριζη παράσταση να είναι θετική, αφ'ετέρου ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός.

Δηλ.: $x+1\geq 0$, απ' όπου προκύπτει: $x\geq -1$

και $\sqrt{x+1}-1\neq 0\to x+1\neq 1\to x\neq 0$

άρα το πεδίο ορισμού είναι: $[-1,0)\bigcup(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sin x)}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(\sqrt{x+1}+1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot(\sqrt{x+1}+1)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=1\cdot 2=2$$

III. Το πεδίο ορισμού: $x\in(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=(0)\cdot(-\infty)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right]=\frac{-\infty}{+\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Άσκηση 2

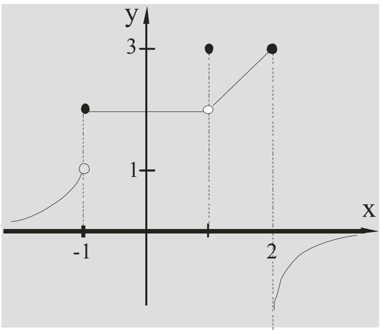
Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x\in(-\infty,\ -1) \\ 2, & x\in[-1,1) \\ 3, & x=1 \\ x+1, & x(1,2] \\ \dfrac{-1}{(x-2)^2}, & x\in(2,\ \infty) \end{cases}$$

Να παρασταθεί γραφικά και να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:
1.) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, 2.) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, 3.) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, 4.) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, 5.) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, 6.) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, 7.) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$, 8.) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, 9.) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$, 10.) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$, 11.) $\lim\limits_{x\to5} f(x)$ και 12.) $\lim\limits_{x\to1.5} f(x)$

Λύση

Η γραφική παράσταση της $f(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



1.) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)= \lim\limits_{x\to-1^+} 2=2$

2.) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)= \lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)= \lim\limits_{x\to-1^-}\left[\dfrac{1}{(-1)^2}\right]=1$

3.) Το όριο: $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ δεν υπάρχει, αφού το $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ δεν είναι ίσο με το $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$.

4.) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)= \lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=1+1=2$

5.) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)= \lim\limits_{x\to1^=} 2=2$

6.) Το $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$ αφού $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2= \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

7.) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)= \lim\limits_{x\to2^+}\left[\dfrac{-1}{(x-2)^2}\right]=\dfrac{-1}{0}=-\infty$ (Ο αριθμητής είναι πάντα -1 και ο παρονομαστής πάντα θετικός αριθμός που τείνει στο μηδέν. Έτσι, το όριο δεν υπάρχει)

8.) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)= \lim\limits_{x\to2^-}(x+1)=2+1=3$

9.) Το όριο: $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ δεν υπάρχει, αφού το $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ δεν είναι ίσο με το $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

10.) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)= \lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{(-3)^2}=\dfrac{1}{9}$

11.) $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\left[\frac{-1}{(x-2)^2}\right] = \frac{-1}{3^2} = -\frac{1}{9}$

12.) $\lim_{x\to 1.5} f(x) = \lim_{x\to 1.5}(x+1) = 1.5+1 = 2.5$

Άσκηση 3

Α) Δίδεται η συνάρτηση *f* με $f(x) = \frac{ax^3+bx+c}{x^2+dx+e}$, που έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$, μια πλάγια ασύμπτωτη με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και ακρότατο το $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.Να ευρεθούν τα *a, b, c, d, e.*

Β) Να ευρεθεί η συνάρτηση *f*(*x*) η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και για την οποία ισχύει $\frac{df(x)}{dx}\cdot e^{f(x)} = 3x^2+2$. Επίσης η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $M(2, f(2))$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{7}{6}$.

Λύση

Α) Η συνάρτηση *f*(*x*) έχει πλάγια ασύμπτωτη με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$. Επομένως εξ ορισμού ισχύει ότι : $\lambda = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$. Αλλά: $\lambda = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = a$. Επομένως $a = 1$.

Η συνάρτηση έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$. Επομένως οι αριθμοί 1 και –1 πρέπει να είναι ρίζες του παρονομαστού της. Άρα προκύπτει εύκολα $d=0$ και $e=-1$.

Η συνάρτηση έχει τώρα την μορφή: $f(x) = \frac{x^3+bx+c}{x^2-1}$

Πρέπει να υπολογίσουμε τα *b* και *c*.

Η συνάρτηση έχει ακρότατο στο σημείο $x=\sqrt{3}$. Αυτό σημαίνει ότι: $f'\left(\sqrt{3}\right) = 0$

Οπότε ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις :

$$\begin{Bmatrix} f'\left(\sqrt{3}\right) = 0 \\ f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix}$$

Προκύπτει δηλαδή ένα σύστημα από το οποίο υπολογίζουμε τα *b* και *c* .Προκύπτουν οι τιμές: $b=c=0$. Επομένως η συνάρτηση είναι η $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

Β) Δίδεται ότι: $\frac{df(x)}{dx}\cdot e^{f(x)} = 3x^2+2 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = 3x^2+2 \Rightarrow \int d\left(e^{f(x)}\right) = \int\left(3x^2+2\right)dx \Rightarrow$

$e^{f(x)} = x^3+2x+c \Rightarrow f(x) = \ln\left(x^3+2x+c\right)$, όπου $c\in R$.

Ισχύει επίσης ότι: $\lambda = f'(2) = \frac{7}{6}$. Είναι όμως $f'(x) = \left(\ln\left(x^3+2x+c\right)\right)' = \frac{3x^2+2}{x^3+2x+c}$. Επομένως:

$f'(2)=\dfrac{3\cdot 2^2+2}{2^3+2\cdot 2+c}=\dfrac{14}{12+c}$ και άρα: $\dfrac{14}{12+c}=\dfrac{7}{6}\Rightarrow c=0$. Επομένως η συνάρτηση έχει την μορφή: $f(x)=\ln\left(x^3+2x\right)$ με $x>0$.

Άσκηση 4

Δίδεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} a\sin x+\cos x, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right] \\ \tan x+2a\cdot\cot x, & x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right] \end{cases}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi/3} f(x)dx$$

Λύση

Η συνάρτηση *f*(*x*) είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ και $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right]$. Πρέπει να είναι συνεχής και στο σημείο $x=\dfrac{\pi}{4}$. Πρέπει δηλαδή να ισχύει: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. Οπότε προσδιορίζεται η τιμή $a=\dfrac{\sqrt{2}-3}{7}$.

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi/3} f(x)dx=\int_0^{\pi/4} f(x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/3} f(x)dx=\int_0^{\pi/4}\left(a\sin x+\cos x\right)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\tan x+2a\cdot\cot x\right)dx=$$

$$\int_0^{\pi/4} a\sin xdx+\int_0^{\pi/4}\cos xdx+\int_{\pi/4}^{\pi/3}\tan xdx+\int_{\pi/4}^{\pi/3}2a\cdot\cot xdx=a\int_0^{\pi/4}\sin xdx+\int_0^{\pi/4}\cos xdx+\int_{\pi/4}^{\pi/3}\tan xdx+2a\int_{\pi/4}^{\pi/3}\cot x$$

Αλλά: $\int_0^{\pi/4}\sin xdx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi/4}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\int_0^{\pi/4}\cos xdx=\left[\sin x\right]_0^{\pi/4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\tan xdx=-\left[\ln\left|\cos x\right|\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\dfrac{1}{2}\ln 2$ και $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\cot xdx=\left[\ln\left|\sin x\right|\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 2$

Επομένως: $$\int_0^{\pi/3} f(x)dx=\frac{\sqrt{2}-3}{7}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{2\left(\sqrt{2}-3\right)}{7}\left(\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 2\right)=$$

$$=\frac{6\sqrt{2}-4}{7}+\frac{13-2\sqrt{2}}{14}\ln 2+\frac{\sqrt{2}-3}{7}\ln 3$$

Άσκηση 5

Α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y=e^x$, $y=e^{-x}$ και την ευθεία $x=1$.

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο $x^2+y^2=8$ και την παραβολή $y=\dfrac{1}{2}x^2$

Γ) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση *f*(*x*) για την οποία ισχύει: $f'(x)=\dfrac{2x-1}{e^x}$ και $f(0)=-1$

I) Να ευρεθεί η συνάρτηση.

II) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{2x+1}$, τον άξονα y’y και την ευθεία $x=1$.

Λύση

Α) Οι δύο καμπύλες έχουν σημεία τομής τα οποία υπολογίζονται από την εξίσωση: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow e^{x}=e^{-x}\Leftrightarrow x=0$. Επίσης για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει ότι $e^{x}\geq e^{-x}$.

Επομένως: $E=\int_{0}^{1}\left(e^{x}-e^{-x}\right)dx=\left[e^{x}+e^{-x}\right]_{0}^{1}=e+\dfrac{1}{e}-2$

Β) Έχουμε $x^2+y^2=8\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{8-x^2}$. Η παραβολή $y=\dfrac{1}{2}x^2$ λαμβάνει μόνο θετικές τιμές για κάθε x. Επομένως τα κοινά σημεία (σημεία τομής) των δύο καμπύλων προσδιορίζονται από την λύση της εξίσωσης: $\dfrac{1}{2}x^2=\sqrt{8-x^2}\Leftrightarrow 8-x^2=\dfrac{1}{4}x^4\Leftrightarrow x^4+4x^2-32=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$E=\int_{-2}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}\,\right)dx-\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}x^2dx$$

Υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα: $\int_{-2}^{2}\dfrac{1}{2}x^2dx=\dfrac{1}{6}\left[x^3\right]_{-2}^{2}=\dfrac{8}{3}$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα: $\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}\,\right)dx$: θέτουμε: $x=2\sqrt{2}\sin z$ με $z\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ και έχουμε:

$$\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}\right)dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\sqrt{8-8\sin^2 z}\cdot\left(2\sqrt{2}\sin z\right)'\right)dz=$$

$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\sqrt{8\left(1-\sin^2 z\right)}\cdot 2\sqrt{2}\cos z\right)dz=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(2\sqrt{2}\cos z\cdot 2\sqrt{2}\cos z\right)dz=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}8\cos^2 z\cdot dz=....=2\pi+4$$

Τελικά: $E=\int_{-2}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=2\pi+4-\dfrac{8}{3}=2\pi+\dfrac{4}{3}$

Γ.Ι) Εφόσον $f'(x)=\dfrac{2x-1}{e^{x}}\Leftrightarrow f(x)=\int\dfrac{2x-1}{e^{x}}dx=\int(2x-1)\cdot e^{-x}\cdot dx=$

$=-\int(2x-1)\cdot\left(e^{-x}\right)'\cdot dx=-(2x-1)e^{-x}+\int e^{-x}(2x-1)'\cdot dx=-(2x-1)e^{-x}+2\int e^{-x}\cdot dx$

$=-(2x-1)e^{-x}-2e^{-x}+c=-(2x+1)e^{-x}+c$

Είναι όμως: $f(0)=-1\Leftrightarrow -1+c=-1\Leftrightarrow c=0$. Επομένως η συνάρτηση είναι η $f(x)=-(2x+1)e^{-x}$

Γ.ΙΙ) Βρίσκουμε την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{2x+1}=-e^{-x}$.

Επειδή $f(x)-g(x)=-(2x+1)e^{-x}+e^{-x}=-2xe^{-x}\leq 0$ για κάθε $x\in[0,\ 1]$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1\left(g(x)-f(x)\right)\cdot dx=\int_0^1\left(2xe^{-x}\right)\cdot dx=-\int_0^1 2x\left(e^{-x}\right)'\cdot dx=-\left[2xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\left(2x\right)'\cdot dx=$$

$$-\frac{2}{e}+2\int_0^1 e^{-x}\cdot dx=-\frac{2}{e}-2\left[e^{-x}\right]_0^1=2-\frac{4}{e}$$

Άσκηση 6

A. Να μελετηθεί η συνάρτηση $y=\ln\left(4-x^2\right)$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

B. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{-2}^{2}\left|x^2-4x\right|dx$, β) $\int\frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}dx$, γ) $\int\left(x^2-bx\right)\sin 2x dx$, δ) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}dx$

Λύση

A. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι

$$\{x|4-x^2>0\}=\{x|x^2<4\}=\{x||x|<2\}=(-2,2)$$

B. Η καμπύλη της συνάρτησης τέμνει τον άξονα y στο σημείο (0, ln4). Για τον υπολογισμό του σημείου τομής με τον άξονα x πρέπει να λυθεί η εξίσωση

$$y=\ln\left(4-x^2\right)=0\Rightarrow$$

$$4-x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

Γ. Ισχύει ότι $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$, άρα είναι άρτια και κατά συνέπεια συμμετρική ως προς τον άξονα y.

Δ. Κατακόρυφες ασύμπτωτες.: Επειδή

$$\lim_{x\to 2^-}\ln(4-x^2)=-\infty \qquad \lim_{x\to -2^+}\ln(4-x^2)=-\infty$$

οι ευθείες $x=2$ και $x=-2$ είναι οι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

E. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης δίνεται από την σχέση

$$f'(x)=\frac{-2x}{4-x^2}$$

Επειδή η $f'\left(x\right)>0$ για $-2<x<0$ και $f'\left(x\right)<0$ για $0<x<2$, η *f* είναι αύξουσα στο διάστημα (-2,0) και φθίνουσα στο (0,2).

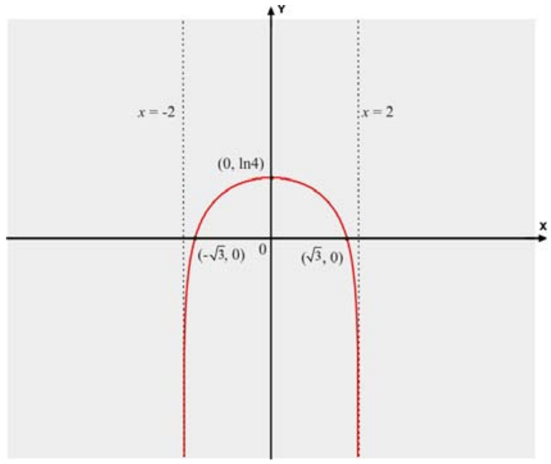
E. Επειδή η $f'\left(x\right)=0$ για , η τιμή $f\left(0\right)=\ln 4$ αποτελεί τοπικό ακρότατο.

ΣΤ. Η δεύτερη παράγωγος της *f* δίνεται από την σχέση

$$f''(x)=\frac{(4-x^2)(-2)+2x(-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{-8-2x^2}{(4-x^2)^2}$$

Επειδή $f''\left(x\right)<0\ \forall\ x$ η γραφική της παράσταση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και επιπλέον δεν εμφανίζει σημείο καμπής.

Με βάση τα παραπάνω η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Β. α). Στο διάστημα [0,4] ισχύει ότι $x^2-4x<0$. Άρα

$$\int_{-2}^{2}\left|x^2-4x\right|dx=\int_{-2}^{0}\left(x^2-4x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(4x-x^2\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=16$$

β) $u=\sqrt[3]{x}\Rightarrow x=u^3,\ dx=3u^2du$. Άρα

$$\int\frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{3u^2}{u^3+u}du=\frac{3}{2}\int\frac{2u}{u^2+1}du=\frac{3}{2}\ln\left(u^2+1\right)+C=\frac{3}{2}\ln\left(x^{2/3}+1\right)+C$$

γ)

$$\begin{aligned}\int\left(x^2-bx\right)\sin 2x\,dx&=-\frac{1}{2}\left(x^2-bx\right)\cos 2x+\frac{1}{2}\int(2x-b)\cos 2x\,dx\\&=-\frac{1}{2}\left(x^2-bx\right)\cos 2x+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2x-b)\sin 2x-\int\sin 2x\,dx\right]\\&=-\frac{1}{2}\left(x^2-bx\right)\cos 2x+\frac{1}{4}(2x-b)\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\end{aligned}$$

δ) $u=\sqrt{4x+1}$. Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}dx=\int\frac{1/2udu}{\left[\frac{1}{4}\left(u^2-1\right)\right]^2u}=8\int\frac{du}{\left(u^2-1\right)^2}$. Από ανάλυση σε απλά κλάσματα προκύπτει

$$\frac{1}{\left(u^2-1\right)^2}=\frac{1}{(u+1)^2(u-1)^2}=\frac{A}{u+1}+\frac{B}{(u+1)^2}+\frac{C}{u-1}+\frac{D}{(u-1)^2}\Rightarrow$$

$$1=A(u+1)(u-1)^2+B(u-1)^2+C(u-1)(u+1)^2+D(u+1)^2\Rightarrow$$

Αν $u=1\Rightarrow D=\frac{1}{4},\ u=-1\Rightarrow B=\frac{1}{4}$. Εξισώνοντας με τους συντελεστές του u^3 παίρνουμε $A+C=0$. Εξισώνοντας με τους συντελεστές του 1 παίρνουμε $1=A+B-C+D$ και άρα $A=\frac{1}{4}$ και $C=-\frac{1}{4}$. Τότε το ολοκλήρωμα παίρνει την μορφή

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}dx = 8\int\left[\frac{1/4}{u+1}+\frac{1/4}{(u+1)^2}+\frac{-1/4}{u-1}+\frac{1/4}{(u-1)^2}\right]du$$

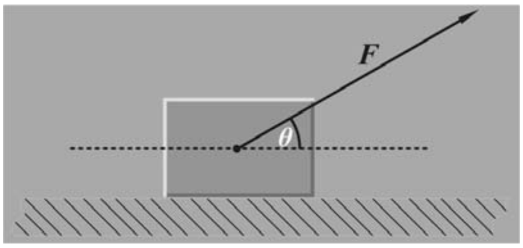
$$= \int\left[\frac{2}{u+1}+2(u+1)^{-2}-\frac{2}{u-1}+2(u-1)^{-2}\right]du$$

$$= 2\ln|u+1| - \frac{2}{u+1} - 2\ln|u-1| - \frac{2}{u-1} + C$$

$$= 2\ln\left(\sqrt{4x+1}+1\right) - \frac{2}{\sqrt{4x+1}+1} - 2\ln\left|\sqrt{4x+1}-1\right| - \frac{2}{\sqrt{4x+1}-1} + C$$

Άσκηση 7

Υπόδειξη: *Η άσκηση αυτή δεν απαιτεί γνώσεις Μηχανικής. Θα πρέπει να θεωρήσετε ότι η δύναμη F είναι συνάρτηση της γωνίας θ*



Σώμα βάρους W τοποθετείται σε οριζόντιο επίπεδο και μετακινείται με την βοήθεια τεντωμένου σχοινιού. Όταν το σχοινί σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο, τότε η δύναμη, F, που ασκείται στο σώμα μέσω του σχοινιού δίνεται από την σχέση: $F = \dfrac{\mu W}{\mu\sin\theta + \cos\theta}$, όπου μ είναι μια σταθερά που παίρνει πάντα θετικές τιμές (*συντελεστής τριβής*) και $0 \le \theta \le \pi/2$.

Δείξτε ότι η δύναμη ελαχιστοποιείται όταν $\tan\theta = \mu$.

Λύση

Θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι η δύναμη F είναι συνάρτηση της γωνίας θ, δηλ. $F = F(\theta)$. Αφού η $F(\theta)$ γίνεται ελάχιστη πρέπει $\dfrac{dF}{d\theta} = 0$. Άρα

$$F=\frac{\mu W}{\mu\sin\theta+\cos\theta} \Rightarrow \frac{dF}{d\theta}=\frac{(\mu\sin\theta+\cos\theta)(0)-\mu W(\mu\cos\theta-\sin\theta)}{(\mu\sin\theta+\cos\theta)^2}=\frac{-\mu W(\mu\cos\theta-\sin\theta)}{(\mu\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

Έτσι,

$$\frac{dF}{d\theta}=0 \Rightarrow \mu\cos\theta-\sin\theta=0 \Rightarrow \mu=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

Τώρα πρέπει να αποδείξουμε, αν το τοπικό ακρότατο που εμφανίζει η $F(\theta)$ όταν $\tan\theta = \mu$, είναι απόλυτο ελάχιστο. Αντικαθιστώντας στην $F(\theta)$, όπου $\tan\theta = \mu$, βρίσκουμε ότι

$$F=\frac{(\tan\theta)W}{(\tan\theta)\sin\theta+\cos\theta}=\frac{W\tan\theta}{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta}=\frac{W\tan\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{W\sin\theta}{1}=W\sin\theta\ .$$

Με δεδομένο ότι $\sin\theta = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$, η F γίνεται $F(\mu) = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}W$. Συγκρίνουμε την τιμή αυτή με τις τιμές που παίρνει η F στα άκρα του διαστήματος $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, όπου $\tan 0 = 0$ και $\tan\dfrac{\pi}{2} \to \pm\infty$.

Τότε $F(0) = \mu W$ και $\lim\limits_{\mu\to\pm\infty} F(\mu) = \lim\limits_{\mu\to\pm\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\mu}+1}}W = 1\cdot W = W$. Επειδή όμως ισχύει ότι

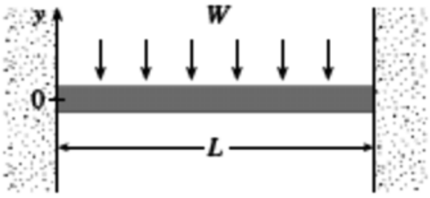
$$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \le 1 \text{ και } \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \le \mu$$

θα είναι

$$F(\mu) \le F(0) \text{ και } F(\mu) \le F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Άρα το $F(\mu) = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} W$ αποτελεί το απόλυτο ελάχιστο της συνάρτησης και συμβαίνει όταν $\tan\theta = \mu$.

Άσκηση 8



Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται δοκός μήκους L. Τα δύο άκρα της είναι ακλόνητα συνδεδεμένα (πακτωμένα) σε τοίχους. Η εφαρμογή ενός σταθερού φορτίου W, που κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος της δοκού, έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή του σχήματός της. Το νέο σχήμα της δοκού περιγράφεται από την συνάρτηση

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

Όπου E και I είναι θετικές σταθερές (*Το E ορίζεται ως το μέτρο ελαστικότητας Young της δοκού και το I ως η ροπή αδράνειας της δοκού*). (α) Μελετήστε την συνάρτηση και (β) κάντε την γραφική της παράσταση για να δείτε το νέο σχήμα της δοκού αν $\frac{W}{24EI} = 1$.

Λύση

Η συνάρτηση y μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2 = \frac{-W}{24EI}x^2\left(x^2 - 2Lx + L^2\right) = \frac{-W}{24EI}x^2(x-L)^2 \Rightarrow$$

$$y(x) = cx^2(x-L)^2 \qquad \text{(I)}$$

όπου $c = \frac{-W}{24EI}$ είναι μια αρνητική σταθερά και $0 \le x \le L$.

Η σχέση (I) δίνει ότι $y(0) = y(L) = 0$, ενώ η πρώτη παράγωγος y' θα είναι:

$$y' = cx^2\left[2(x-L)\right] + (x-L)^2 2cx = 2cx(x-L)\left[x + (x-L)\right] = 2cx(x-L)(2x-L).$$

Διάστημα	$0 < x < L/2$	$L/2 < x < L$
y'	-	+
y	$\searrow$	$\nearrow$

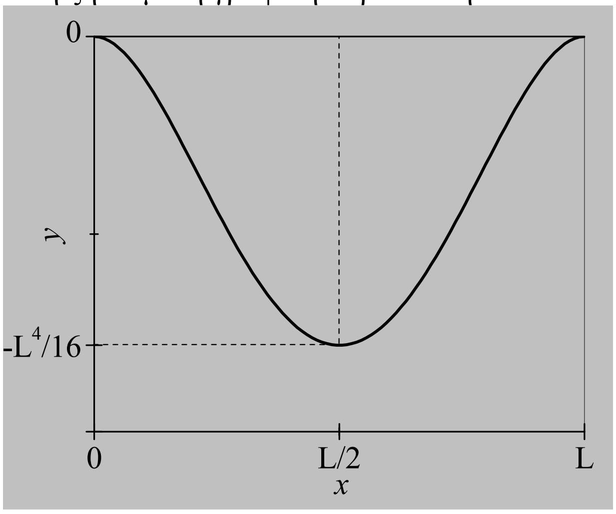
Από τον πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση y έχει απόλυτο ελάχιστο στο σημείο

$$\left(L/2, y(L/2)\right) = \left(L/2, cL^4/16\right).$$

Τέλος, υπολογίζεται η y'' ως $y'' = 2c\left(6x^2 - 6Lx + L^2\right)$. Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η y'' αποτελούν σημεία καμπής και είναι δύο. Οι συντεταγμένες τους θα είναι $x = \frac{6L \pm \sqrt{12L^2}}{12} \Rightarrow$

$$x = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right)L.$$

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η ζητούμενη γραφική παράσταση



Άσκηση 9

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα σημεία A(1,0), B(0,1) και C(2,2).

Λύση

Η γενική εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$. Τα τρία σημεία A, B και C ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου, έτσι η γενική εξίσωση του κύκλου στα τρία σημεία μας παρέχει 3 εξισώσεις με 3 αγνώστους:

A(1,0): $1 + 0 + A + 0 + \Gamma = 0$

B(0,1): $0 + 1 + 0 + B + \Gamma = 0$

C(2,2): $4 + 4 + 2A + 2B + \Gamma = 0$

οι οποίες μπορούν να γραφούν ως:

$$A + 0B + \Gamma = -1$$

$$0A + B + \Gamma = -1$$

$$2A + 2B + \Gamma = -8$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Cramer έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

η ορίζουσα του πίνακα $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι 1(1-2)+1(-2) = -3 και οι επί μέρους πίνακες για Δ_A, Δ_B και Δ_Γ βρίσκονται εύκολα και είναι 7, 7 και -4, αντίστοιχα. Τελικά βρίσκουμε A = -7/3, B = -7/3 και Γ = 4/3. Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{4}{3} = 0$

ή πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της εξίσωσης με 3:

$3x^2+3y^2-7x-7y+4=0$

Άσκηση 10

A. Να γίνει πλήρης μελέτη της εξίσωσης $2x^2+5y-3x+4=0$. Τι είδους καμπύλη παριστά;

B. Αρχίζοντας με την γενική εξίσωση $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0,\;\; A\neq 0$, δείξτε ότι $\dfrac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}=r^2$, όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου που ικανοποιεί την πάρα πάνω εξίσωση.

Λύση

A. Η προς μελέτη εξίσωση είναι δευτεροβάθμια ως προς x και γραμμική ως προς y, και άρα έχει χαρακτηριστικά παραβολής. Διαιρώντας με 2 (όχι τυχαία επιλογή αλλά με τον συντελεστή του x^2) έχουμε:

$$x^2+\frac{5}{2}y-\frac{3}{2}x+2=0\Rightarrow x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{5}{2}y-2 \qquad (1)$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο των όρων ως προς x και y ξεχωριστά με την προσθήκη του όρου $(-3/4)^2=(9/16)$ και στις δύο πλευρές της εξίσωσης η εξίσωση (1) γίνεται:

$$(x-\frac{3}{4})^2=-\frac{5}{2}y-2-\frac{9}{16}=-\frac{5}{2}(y+\frac{23}{40}) \qquad (2)$$

Η εξίσωση (2) είναι της μορφής

$$\left(x-h\right)^2=-4p\left(y-k\right) \qquad (3)$$

όπου βεβαίως $h=3/4$, $k=-23/40$ και $2p=-5/2$. Σαφώς πρόκειται για παραβολή με κορυφή V(3/4, -23/40) και άξονα συμμετρίας $\left(x^2-3/4\right)=0\rightarrow x=3/4$. Τέλος, η απόσταση από την κορυφή στην εστία είναι $p=-5/4$.

B. Διαιρώντας την εξίσωση που μας δίνεται με A και ομαδοποιώντας τους όρους ως προς x και y, έχουμε:

$$(x^2+\frac{D}{A}x)+(y^2+\frac{E}{A}y)=-\frac{F}{A} \qquad (1)$$

Με τον γνωστό τρόπο της συμπλήρωσης των τετραγώνων έχουμε:

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2-\left(\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2-\left(\frac{E}{2A}\right)^2=-\frac{F}{A} \qquad (2)$$

που με μετακίνηση των αρνητικών όρων της αριστερής πλευράς της εξίσωσης δεξιά δίνει:

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=-\frac{F}{A}+\left(\frac{D}{2A}\right)^2+\left(\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}=r^2 \qquad (3)$$

Προφανώς η εξίσωση (3) είναι της μορφής $(x+a)^2+(y+b)^2=r^2$, δηλαδή εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο (a,b) όπου $a=-D/2A$ και $B=-E/2A$, με ακτίνα

$$r=\sqrt{\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}}\,.$$